سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نظری علم الحیل

تصنیف

جے۔ ایچ۔ جینس ایم۔ اے، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)
رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ

سنہ ۱۳۵۷ھ م سنہ ۱۳۴۷ف م سنہ ۱۹۳۸ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب پروفیسر جے۔ ایچ۔ جینس، مصنف اور مسرز جن اینڈ کمپنی، بوسٹن
(یو۔ ایس۔ اے۔) ناشرین کی اجازت سے ترجمہ کر کے شائع کی گئی ہے۔
مصنف کتاب اور ناشرین کتاب نے یہ اجازت بلا معاوضہ بخوشی عطا کی۔
ایسی علم دوستی قابلِ قدر اور قابلِ شکریہ ہے۔

فہرست مضامین

نظری علم الحیل

صفحہ	مضمون

نظری علم الحیل

پہلا باب

سکون اور حرکت

تمہید

۱ — **فطرت کی یکسانیت** — اگر ہم پانی میں ایک پتھر چھوڑیں تو وہ تہ تک ڈوب جائے گا، اگر ہم پانی میں ایک کاگ چھوڑیں تو وہ پانی کی سطح تک اُٹھ آئے گا۔ یہ دو بیانات نہ صرف اُن پتھروں اور کاگوں کے لیے درست تسلیم کیے جائیں گے جو ڈوبتے یا تیرتے دیکھے گئے ہیں بلکہ تمام پتھروں اور کاگوں کے لیے۔ اگر ہمارے پاس ایک پتھر کا ٹکڑا ہو جو کبھی بھی پانی میں نہ ڈالا گیا ہو تو ہمیں یقین ہوتا ہے کہ اگر ہم اُسے پانی میں چھوڑینگے تو وہ پانی میں ڈوبیگا۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ہمیں یہ فرض کرنے کا کیا حق حاصل ہے کہ یہ نیا اور ناآزمودہ پتھر کا ٹکڑا پانی میں ڈوبیگا۔ ہم جانتے ہیں کہ لاکھوں

پتھر کے ٹکڑے مختلف اوقات پانی میں ڈالے جا چکے ہیں ہم جانتے ہیں کہ ان میں ایک بھی ایسا نہ نکلا جو نہ ڈوبا ہو۔ اس سے ہم یہ مستنبط کرتے ہیں کہ فطرت تمام پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ یکساں سلوک کرتی ہے جبکہ وہ پانی میں ڈالے جاتے ہیں اور اس لیے ہمیں یقین ہوتا ہے کہ ایک نئے اور ناآزمودہ پتھر کے ٹکڑے کے ساتھ بھی قوائے فطرت وہی سلوک کریں گی جو وہ بے شمار پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ کرتی دیکھی گئی ہیں اور اس لیے وہ پانی میں ڈوبے گا۔ یہ اصول فطرت کی یکسانیت کے طور پر مشہور ہے، جب یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ قوائے فطرت نے فلاں کام ایک بار کیا ہے تو اُن ہی حالات کے تحت پھر وہ وہی کام کریں گی۔

۲ ۔ قوانین فطرت ۔ وہ اصول جو اوپر مذکور ہوا یہ کہنے کے مرادف ہے کہ قوائے فطرت کا عمل بعض قوانین کے تحت ہوتا ہے، اِن قوانین کو ہم **قوانین فطرت** کہتے ہیں۔ مثلاً اگر یہ معلوم ہو چکا ہو کہ ہر پتھر جو کبھی پانی میں ڈالا جا چکا ہے پانی میں ڈوبا ہے تو جیسا کہ ہم پہلے کہہ چکے ہیں فطرت کی یکسانیت کا اصول اس مفروض کی رہبری کرتا ہے کہ ہر پتھر جو (۲) آیندہ کبھی پانی میں ڈالا جائے گا تہ تک ڈوبے گا اور پھر ہم قانون فطرت کے طور پر اس کا اعلان کر سکتے ہیں کہ ہر پتھر جو پانی میں ڈالا جائے تہ تک ڈوبے گا۔

سائنس کا وہ حصہ جس میں قوانین فطرت سے بحث کی جاتی ہے علم الفطرت (Natural Science) کہلاتا ہے۔ یہ دو حصوں میں منقسم ہے ایک تجربی اور دوسرا نظری۔ تجربی سائنس میں قوانین فطرت کی جستجو وقتاً فوقتاً قوائے فطرت کے عمل کا مشاہدہ کرنے سے کی جاتی ہے۔ نظری سائنس میں اُن قوانین فطرت کو جو تجربی سائنس نے دریافت کئے ہیں مواد کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے، ممکن ہو تو اِن قوانین فطرت کو سادہ تر شکلوں میں تحویل کیا جاتا ہے، اور پھر یہ معلوم کیا جاتا ہے کہ اِن قوانین سے کیونکر

پیشین گوئی ہوسکتی ہے کہ قوائے فطرت کا عمل اُن صورتوں میں کیا ہوگا جو تجربہ کی کسوٹی پر فی الواقع آزمائے نہیں گئے ہیں۔ مثلاً تجربی سائنس سے معلوم ہوتا ہے کہ پتھر ڈوبتا ہے، کاگ تیرتا ہے، اور علیٰ ہذا متعدد متشابہ قوانین۔ اِن قوانین کی مدد سے نظری سائنس میں وہ سادہ قوانین فطرت ماخوذ ہوتے ہیں جو ڈوبنے یا تیرنے کے تمام مظاہر پر حکمران ہیں اور پھر ایک قدم آگے بڑھنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ان قوانین کی مدد سے ہم کس طرح تجربہ کو فی الواقعی عمل میں لانے سے پیشتر پیشین گوئی کرسکتے ہیں کہ ایک دی ہوئی شئے ڈوبے گی یا تیرے گی۔ مثلاً تجربی سائنس یہ دریافت نہیں کرسکتی کہ آیا پچاس ہزار ٹن کا ایک جہاز تیرے گا یا ڈوبیگا کیونکہ پچاس ہزار ٹن کا کوئی جہاز موجود نہیں ہے جس سے تجربہ کیا جائے لیکن بحری معمار فطرت کی یکسانیت کے بھروسہ تجربی سائنس سے معلوم شدہ قوانین فطرت کی بناء پر اور اِن قوانین کو استعمال کرنے کے اُس طریقہ سے جو نظری سائنس سے معلوم ہو پچاس ہزار ٹن کا ایک جہاز بنا سکتا ہے پورے اعتماد کے ساتھ کہ وہ اُسی طریقہ پر پیش آئے گا جس کی پیشین گوئی نظری سائنس نے کی ہے۔

۳ ۔ علم الحیل۔ سائنس کی اُس شاخ میں جو علم الحیل کے طور پر معروف ہے اجسام کی حرکت پر اور اُن قوائے فطرت پر بحث کی جاتی ہے جو اِس حرکت کا سبب ہوتی ہیں یا حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں۔ وہ قوانین فطرت جو اِن قوتوں کے عمل اور اجسام کی حرکت پر حاوی ہیں مدت سے معلوم ہیں اور نیوٹن انہیں سادہ ترین شکل میں تحویل کرچکا ہے۔ اِس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تجربی علم الحیل سائنس کی ایک تکمیل یافتہ شاخ ہے۔

اِس کتاب میں نظری علم الحیل سے بحث کی جائے گی۔ ہم اُن قوانین سے ابتدا کریں گے جو تجربی علم الحیل نے مہیا کئے ہیں اور

پھر اس پر بحث کریں گے کہ ان قوانین کو اجسام کی حرکت کے متعلق پیشین گوئی کرنے میں کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے، مثلاً زمین پر اجسام کا گرنا، مرمیوں کا پھینکنا، سورج کے گرد زمین کی اور سیاروں کی حرکت وغیرہ۔ سوالات کی ایک اہم جماعت جن پر ہمیں بحث کرنی ہو گی وہ ہوں گے جن میں کوئی حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی کیونکہ قوائے فطرت جو حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ کوئی حرکت واقع نہیں ہوتی۔ ایسے مسئلوں کو سکونیاتی کہا جاتا ہے۔

ایک نقطہ کی حرکت

۴۔ سکون کی حالت

کسی جسم کی حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر یہ متعین کرنا ضروری ہے کہ کسی جسم کے سکون سے کیا مراد ہے۔ معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ ٹرین ساکن ہے جبکہ وہ پٹریوں پر حرکت نہ کر رہی ہو۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ ٹرین، زمین کے بقیہ حصہ کے اشتراک میں فی الواقع ساکن نہیں ہے بلکہ سورج کے گرد ایک بڑی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ اسی طرح ایک مکھی جو ریل کے ڈبہ کی دیوار پر رینگ رہی ہو ایک لحاظ سے ساکن کہی جا سکتی ہے جبکہ وہ دیوار کے ایک ہی مقام پر ٹھہری رہے لیکن مکھی فی الواقعی ساکن نہیں ہو گی، وہ دیہات میں ٹرین کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لے گی، دیہات سورج کے گرد زمین کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لیں گے، اور سورج فضا میں نظام شمسی کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لے گا۔

یہ مثالیں اس امر کی متقاضی ہیں کہ سکون اور حرکت کے تصورات کو صاف، صریح اور ٹھیک معنے دیے جائیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ہمارے بیانات کافی ٹھیک ہوتے اگر ہم پہلی صورت میں کہتے کہ ٹرین زمین کے لحاظ سے ساکن تھی اور دوسری صورت میں کہتے کہ مکھی ڈبہ کے

لحاظ سے ساکن تھی۔

۵۔ حوالے کا فریم۔ پس سکون اور حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر یہ ضروری معلوم ہوتا ہے کہ حوالے کے فریم کے تصور کا اضافہ کیا جائے۔ زمین نے ٹرین کی حرکت کے لیے حوالے کا ایک فریم مہیا کیا اور جب ٹرین پٹڑیوں پر حرکت نہ کر رہی ہو تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ٹرین ساکن
ہے جبکہ زمین کو حوالے کے فریم کے طور پر لیا گیا ہو۔ اسی طرح (۴)
ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ مکھی ساکن تھی جبکہ ڈبہ کو حوالے کا فریم لیا گیا ہو۔ صریحاً کوئی 'فریم کاری' حقیقی یا خیالی 'یا کوئی مادی جسم حوالے کے فریم کے طور پر لیا جا سکتا ہے بشرطیکہ وہ استوار ہو یعنی وہ خود اپنی شکل اور جسامت نہ بدل رہا ہو۔

اِس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک نقطہ بلحاظ کسی حوالے کے فریم کے ساکن ہے جبکہ اُس نقطہ کا فاصلہ حوالے کے فریم کے ہر نقطہ سے غیر متبدل رہے۔

۶۔ حوالے کے فریم کے لحاظ سے حرکت۔ حوالے کے فریم کے تصور کو واضح کر دینے کے بعد اُس کے لحاظ سے ہم نہ صرف سکون پر بحث کر سکتے ہیں بلکہ حرکت پر بھی۔ جب ٹرین پٹڑیوں پر ایک میل حرکت کر لیتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ٹرین اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی زمین کے لحاظ سے ایک میل حرکت کر چکی ہے۔ جب مکھی ڈبہ کے فرش سے چھت تک رینگ جاتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی ڈبہ کے لحاظ سے آٹھ فٹ (مثلاً) حرکت کر چکی ہے۔

دو لمحات ت۱، ت۲ کے درمیانی وقفہ میں ٹرین کے لحاظ سے مکھی نے جو فاصلہ طے کیا ہے اُسے مقرر کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ وہ حقیقی نقطہ جہاں سے

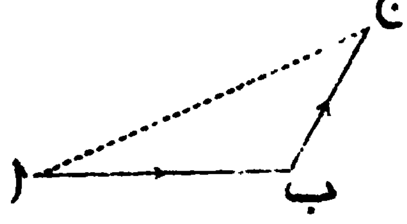
مکھی چلی ہے ٹرین کے موجودہ محل سے (فرض کرو) ایک میل پیچھے ہے لیکن وہ نقطہ جہاں سے ہم پیمائش کرتے ہیں وہ نقطہ ہے جو ڈبہ میں وقت ت₂ پر اُسی جگہ ہے جس جگہ وہ وقت ت₁ پر تھا۔ اس لیے بالعموم ایک دئے ہوئے حوالے کے فریم کے لحاظ سے اوقات ت₁ اور ت₂ کے درمیانی وقفہ میں طے شدہ فاصلہ مقرر کرنے میں ہم اول وہ نقطہ ا معلوم کرتے ہیں جو وقت ت₂ پر حوالے کے فریم کے لحاظ سے اسی محل میں قائم رہتا ہے جس میں وہ نقطہ جہاں سے متحرک نقطہ وقت ت₁ پر چلا ہے قائم تھا۔ اس نقطہ ا سے نقطہ ب تک جس پر متحرک نقطہ وقت ت₂ پر پہنچا ہے وہ فاصلہ ہوگا جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے طے ہوا ہے۔

ایک ذرہ ا کے لحاظ سے کسی ذرہ ب کی حرکت سے اس کی وہ حرکت مراد ہے جو ا کے ساتھ حرکت کرنے والے حوالے ایک فریم کے لحاظ سے معلوم کی گئی ہو۔

۷ ۔ حرکتوں کی ترکیب ۔ فرض کرو کہ ایک دئے ہوئے وقت میں متحرک نقطہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے ایک خاص فاصلہ طے کرتا ہے اور اس اثنا میں حوالے کا یہ فریم خود ایک دوسرے حوالے کے فریم کے لحاظ سے کوئی اور فاصلہ طے کرتا ہے، چنانچہ ایسی صورت واقع ہوگی اگر مکھی ڈبہ کی دیوار پر چڑھے اور اس اثنا میں ڈبہ خود زمین کے لحاظ سے حرکت کرے۔

فرض کرو کہ اس کاغذ کے مستوی میں جس پر شکل (۱) کھینچی گئی ہے حوالے کا ایک فریم حرکت کر رہا ہے اور کاغذ خود حوالے کا دوسرا فریم ہے۔ فرض کرو کہ متحرک نقطہ ا سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور اثنائے حرکت میں حوالے کے پہلے فریم کا وہ نقطہ جو ابتداً متحرک نقطہ پر منطبق تھا ا سے ب تک حرکت کر چکا ہے اور اس اثنا میں متحرک نقطے نے ج تک حرکت کی ہے۔ اب خط اب، (۵)

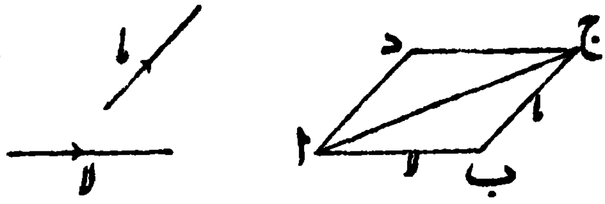
فریم ۲ کے لحاظ سے فریم ا کی حرکت کو تعبیر کرتا ہے اور ب ج فریم ا کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت کو تعبیر کرتا ہے۔ متحرک نقطہ کی کل حرکت بلحاظ فریم ۲ کے ا ج سے تعبیر ہوتی ہے۔ حرکت ا ج کو دو حرکتوں



شکل (۱)

ا ب، ب ج کا مرکب یا ان دو حرکتوں کا حاصل کہتے ہیں۔ پس اگر ایک نقطہ فریم ا کے لحاظ سے فاصلہ ب ج طے کرے اور اس اثنا میں فریم ا فریم ۲ کے لحاظ سے فاصلہ ا ب طے کرے تو نقطہ کی حاصل حرکت بلحاظ فریم ۲ کے فاصلہ ا ج کے مساوی ہوگی جو دو فاصلوں ا ب، ب ج کو لیکر انہیں اس طریقہ سے رکھنے سے حاصل ہوتی ہے کہ نقطہ ب جس پر ایک فاصلہ ختم ہوتا ہے وہی نقطہ ہوتا ہے جس پر دوسرا فاصلہ ابتدا کرتا ہے۔

دو حرکتوں کو مرکب کرنے کا ایک اور طریقہ ہے۔ فرض کرو کہ لا، ما سے دو حرکتیں تعبیر ہوتی ہیں۔ محصلہ بالا قاعدہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ہمیں ایک مثلث ا ب ج بنانا چاہئے جس کے اضلاع ا ب، ب ج طول میں لا، ما کے مساوی ہوں تو مطلوبہ حرکت ا ج کے مساوی ہوگی۔ ایسا ایک مثلث ا ب ج بنا لینے کے بعد فرض کرو کہ ہم مثلث کے اضلاع کے متوازی خطوط ا د، ج د کھینچ کر متوازی الاضلاع



شکل (۲)

ا ب ج د کی تکمیل کرتے ہیں ۔ اب چونکہ ا د، ب ج کے مساوی ہے اِس لئے وہ بھی حرکت ما کو تعبیر کرے گا اور اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وہ دو اضلاع جو ا پر ملتے ہیں دی ہوئی حرکتوں کو تعبیر کرتے ہیں اور وتر ا ج جو ا میں سے گذرتا ہے حاصل حرکت کو تعبیر کرتا ہے ۔ اس لیے دو حرکتوں لا، ما کو مرکب کرنے کے لیے حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے :

ایک متوازی الاضلاع ا ب ج د بناؤ ایسا کہ اضلاع ا ب، ا د جو ا پر ملتے ہیں دی ہوئی دو حرکتوں لا، ما کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کریں تو وتر ا ج جو ا میں سے گذرتا ہے اُس حاصل حرکت کو تعبیر کریگا جو اِن دو حرکتوں کو مرکب کرنے سے حاصل ہوتی ہے ۔ (۶)

رفتار

۸ ۔ **یکساں اور متغیر رفتار** ۔ رفتار سے مُراد صرف حرکت کی شرح ہے ۔ وہ یکساں ہوگی یا متغیر ۔ اگر ایک نقطہ اس طریقے سے حرکت کرے کہ اس کی حرکت کے ہر ثانیہ میں خواہ منتخبہ ثانیہ کوئی ہو مرتسمہ فاصلہ ا فٹ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی رفتار، ا فٹ فی ثانیہ کی ایک **یکساں** رفتار ہے ۔ لیکن اگر نقطہ ایک ثانیہ میں ا فٹ حرکت کرے، دوسرے ثانیہ میں ب فٹ حرکت کرے اور تیسرے میں

ج فٹ اور علیٰ ہذا تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ ا، ب، ج میں سے کسی سے رفتار کی پیمائش ہوتی ہے۔ اس صورت میں رفتار کو متغیر کہا جاتا ہے کیونکہ وہ حرکت کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوتی ہے۔ کسی لمحہ پر رفتار معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کا ایک صغیر وقفہ فرت لیتے ہیں اور فاصلہ فرس کی پیمائش کرتے ہیں جو اس وقفہ میں مرتسم ہوا ہے۔ اب ہم نسبت $\frac{فرس}{فرت}$ کو اس لمحہ پر کی رفتار کہتے ہیں جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے۔ اگر رفتار ایکساں ہے تو $\frac{فرس}{فرت}$ وہ فاصلہ ہوگا جو اکائی وقت میں مرتسم ہوتا ہے اور اس لیے رفتار کی موجودہ تعریف وہی ہو جاتی ہے جو اوپر بیان کی جا چکی ہے۔

اوسط رفتار۔ اگر کوئی نقطہ متغیر رفتار سے حرکت کرے اور ت ثانیوں میں ا فٹ فاصلہ مرتسم کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وقت ت میں متحرک نقطہ کی "اوسط رفتار" $\frac{ا}{ت}$ ہے۔ یہ اوسط رفتار وہ رفتار ہے جو ایک خیالی نقطہ کی ہوگی جو ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور وقت ت میں وہی فاصلہ طے کرتا ہے جو حقیقی نقطہ متغیر رفتار سے طے کرتا ہے۔

اکائیاں۔ رفتار کی پیمائش میں طول کی ایک اکائی اور وقت کی ایک اکائی کی ضرورت ہے، مثلاً جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک نقطہ ا فٹ فی ثانیہ کی رفتار رکھتا ہے تو گویا ہم نے فٹ کو طول کی اکائی اور ثانیہ کو وقت کی اکائی منتخب کیا ہے۔ ہم اسی رفتار کی مقدار کو دوسری اکائیوں میں ایک سادہ تناسب کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں۔ (۷)

مثلاً فرض کرو کہ ا فٹ فی ثانیہ کی رفتار کو میلوں اور گھنٹوں کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے۔

نقطہ ایک ثانیہ میں ۱ فٹ حرکت کرتا ہے اور اس لیے ایک گھنٹہ میں ۱ × ۶۰ × ۶۰ فٹ حرکت کریگا اور اس لیے ایک گھنٹہ میں

$$\frac{۱ \times ۶۰ \times ۶۰}{۱۷۶۰ \times ۳} = \frac{۱۵}{۲۲}۱ \text{ میل}$$

حرکت کرے گا۔ پس نقطہ کی رفتار $\frac{۱۵}{۲۲}۱$ میل فی گھنٹہ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک ریل گاڑی ۱۸ گھنٹوں میں ۹۱۸ میل کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اس کی اوسط رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو۔

۲۔ ایک ٹرین اور ایک موٹر کی رفتاروں کا مقابلہ کرو جبکہ اول الذکر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ طے کرے اور ثانی الذکر ۱۵۰۰ گز فی دقیقہ۔

۳۔ ایک آدمی $\frac{۴}{۵}$ ۹ ثانیوں میں ۱۰۰ گز دوڑتا ہے۔ اس کی اوسط چال میلوں میں فی گھنٹہ کیا ہے۔

۴۔ ایک شہری گھڑی کی دو سوئیاں ۱۰ اور ۷ فٹ لمبی ہیں۔ ان کے سروں کی رفتاریں معلوم کرو۔

۵۔ زمین کے قطر کو ۷۹۲۷ میل لیکر معلوم کرو کہ اس آدمی کی رفتار فٹ ثانیہ اکائیوں میں کیا ہوگی جو خط استوا پر کھڑا ہے (زمین کے محور کے گرد زمین کی یومی گردش کی وجہ سے)۔

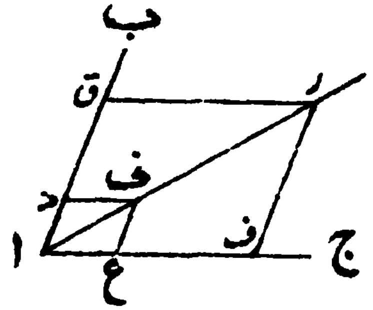
۶۔ دو گاڑیاں، علی الترتیب ۲۳۰ اور ۴۴۰ فٹ لمبی، متوازی راستوں پر ایک دوسرے سے گذر جاتی ہیں، پہلی گاڑی دوسری سے دوچند رفتار سے حرکت کررہی ہے۔ چھوٹی گاڑی کا ایک مسافر دیکھتا ہے کہ لمبی گاڑی اس سے تین ثانیوں میں گذر جاتی ہے۔ دونوں گاڑیوں کی رفتاریں معلوم کرو۔

۹۔ رفتاروں کی ترکیب۔ تمام حرکتیں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں

حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کی جانی چاہئیں۔ پس رفتار یعنی حرکت کی شرح کو بھی حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنا چاہئے۔ ایک نقطہ حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے ایک خاص رفتار رکھ سکتا ہے اور خود حوالے کا فریم ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے ایک دوسری رفتار رکھ سکتا ہے۔ اب اگر متحرک نقطہ کی رفتار دوسرے فریم کے لحاظ سے معلوم کرنی ہو تو اس عمل کو دو رفتاروں کو مرکب کرنے کا عمل کہتے ہیں۔

اس غرض کے لیے ہم ان حرکتوں پر غور کرتے ہیں جو وقت کے ایک ایک صغیر وقفہ فرت میں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ پہلے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی رفتار سمت ا ب میں $و_۱$ ہے اور دوسرے فریم کے لحاظ سے پہلے فریم کی رفتار سمت ا ج میں $و_۲$ ہے۔ پس (۸) متحرک نقطہ پہلے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں ا ب پر فاصلہ $و_۱$ فرت (فرض کرو ا د) طے کرتا ہے اور اس اثناء میں خود فریم دوسرے فریم کے لحاظ سے ا ج پر فاصلہ $و_۲$ فرت (فرض کرو ا ع) طے کرتا ہے۔

فرض کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا وتر ا ف ہے جس کے دو کنارے ا د، ا ع ہیں تو نقطہ کی حاصل حرکت دوسرے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں ا ف ہوگی۔ اب چونکہ متحرک نقطہ وقت فرت میں فاصلہ ا ف مرتسم کرتا ہے اس لیے حاصل رفتار $\frac{اف}{فرت}$ ہوگی۔



شکل (۳)

اب فرض کرو کہ ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ رفتاریں خطوط مستقیم سے تعبیر ہوں گی، خط کی سمت رفتار کی سمت کے متوازی ہوگی اور اس کا طول رفتار کی مقدار کے متناسب لیا جائے گا، خطوں کے طول کسی پیمانہ کی بموجب کھینچے جا سکتے ہیں مثلاً ہم طول کے ہر انچ سے ایک فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر کر سکتے ہیں چنانچہ ایسی صورت میں تین فٹ فی ثانیہ کی رفتار تین انچ لمبے خط سے جو حرکت کی سمت کے متوازی کھینچا گیا ہو تعبیر ہوگی۔

شکل (۳) میں فرض کرو کہ اف، اق سے رفتاریں و٫، و٫ کسی پیمانہ پر تعبیر ہوتی ہیں۔ چونکہ پیمانہ دونوں رفتاروں کے لیے ایک ہی ہے اس لیے

اف : اق = و٫ : و٫

لیکن اع = و٫ فرت، اد = و٫ فرت

اس لیے اع : اد = و٫ : و٫

اور اس لیے اف : اق = اع : اد

اگر ہم متوازی الاضلاع اف رق کی تکمیل کریں تو وتر ار ف میں سے گذرے گا اور ہمیں حاصل ہوگا

ار : اف = اف : اع

اگر حاصل رفتار و ہو تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$و = \frac{اف}{فرت}$$

(۹) اس لیے اف : اع = و فرت : و٫ فرت

= و : و٫

اور اس لیے ار : اف = و : و٫

پس ار، رفتار و کی مقدار کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے جس پر اف، رفتار و٫ کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز چونکہ ار، حاصل حرکت اف کی سمت

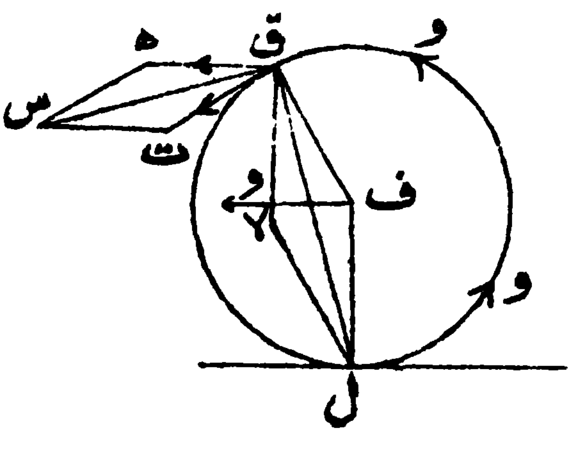
ہیں ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ا ر ' رفتار و کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلہ ثابت کر دیا۔

مسئلہ۔ اگر دو رفتاریں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے جو کسی راس ا سے نکلتے ہیں مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل مقدار اور سمت میں اُسی پیمانہ پر متوازی الاضلاع کے اُس قطر سے تعبیر ہوگا جو ا سے نکلتا ہے۔

یہ مسئلہ رفتاروں کے متوازی الاضلاع کے طور پر مشہور ہے۔

ہم اس کا مفہوم دو سادہ مثالوں سے واضح کریں گے۔

ا۔ فرض کرو کہ ایک گاڑی ایک ہموار سڑک پر رفتار و سے حرکت کر رہی ہے۔ ہم حوالہ کا پہلا فریم گاڑی کا جسم لیں گے اور دوسرا فریم سڑک۔ اب فریم ا کی رفتار فریم ۲ کے لحاظ سے و ہے۔ فریم ا کے لحاظ سے گاڑی کے کسی پہیہ ف کا مرکز ثابت ہے، اس لیے کور کا کوئی نقطہ ف کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ فریم ا کے لحاظ سے سڑک پیچھے کی طرف رفتار و سے حرکت کر رہی ہے، اس لیے اگر پہیہ سڑک پر نہ پھسلے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار فریم ا کے لحاظ سے و ہونی چاہیئے۔ اس لیے کور پر کے کسی نقطہ ق کی رفتار فریم ا کے لحاظ سے مماس ق ت پر و ہوگی۔ اس رفتار کو خط ق ت سے تعبیر کرو تو



شکل (۴)

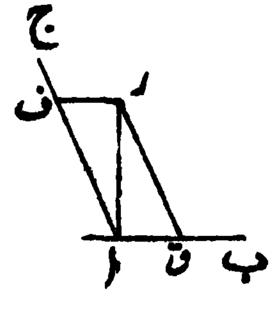
گاڑی کی رفتار سڑک کے لحاظ سے سڑک کے متوازی ایک مساوی خط ق ھ سے
تعبیر ہوگی۔ پس نقطہ ق کی حاصل رفتار متوازی الاضلاع ق ھ س ت
کے وتر ق س سے تعبیر ہوگی۔ صریحاً اس کی سمت زاویہ ھ ق ت کی
تنصیف کرتی ہے۔ فرض کرو کہ پہیہ کا زیر ترین نقطہ ل ہے اور فرض کرو کہ
لا سے متوازی الاضلاع ق ف ا ل لا کی تکمیل ہوتی ہے۔ صریحاً یہ (۱۰)
متوازی الاضلاع، متوازی الاضلاع ق ت س ھ کے مشابہ ہے
کیونکہ دونوں متوازی الاضلاعوں میں متناظر خطوط علی القوایم ہیں۔ اسلیے

ق س : ق ت = ق ل : ق ف

اس لیے اس پیمانہ پر جس میں گاڑی کی رفتار مقدار میں، پہیہ کے نصف قطر
ق ف سے تعبیر ہوتی ہے نقطہ ق کی رفتار، ق ل سے تعبیر ہوگی۔
پس کور پر کے مختلف نقطوں کی رفتاریں، ل سے ان کے جو فاصلے ہیں ان کے
متناسب ہیں اور رفتاروں کی سمتیں ہر صورت میں اس خط پر عمود ہیں جو نقطہ کو
ل سے ملاتا ہے۔

۲۔ ایک جنگی جہاز ۱۸ بحری میلوں کی رفتار سے سفر کر رہا ہے اور اس کی
توپوں سے بلحاظ جہاز کے ۲۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گولیاں فائر
کیجا سکتی ہیں۔ توپوں کو کس سمت میں قایم کرنا چاہیے کہ ان کی ضرب ایک
ایسی شئے پر پڑے جس کی سمت جہاز سے اس کی حرکت کی سمت پر عمود ہے

فرض کرو کہ جہاز کی
حرکت کی سمت ا ب
ہے اور فرض کرو کہ توپ کو
سمت ا ج میں قایم کیا گیا
ہے تو جہاز کے لحاظ سے
گولے کی جو رفتار ہے اس کو
ا ج پر کے ایک خط ا ف
سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور



شکل (۵)

سمندر کے لحاظ سے جہاز کی جو رفتار ہے اُس کو اب پر کے ایک خط اق سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ متوازی الاضلاع اف رق کی تکمیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ وتر ار، گولے کی رفتار کو سمندر کے لحاظ سے مقدار اور سمت دونوں میں تعبیر کرے گا۔ اِس لیے ار کو حسب سوال اب کے علی القوائم ہونا چاہیے۔ اِس لیے اگر زاویہ ف ار، ط ہو جس میں توپ کو نشانہ کی شئے نظر آنے کے بعد گھمانا پڑتا ہے تو

$$\text{جب ط} = \frac{\text{ف ر}}{\text{ا ف}} = \frac{\text{جہاز کی رفتار}}{\text{گولے کی رفتار}}$$

جہاز کی رفتار ۱۸ بحری میل فی گھنٹہ ہے اور ایک بحری میل = ۱٫۱۵۱۵ معمولی میل = ۶۰۸۰ فٹ اس لیے ۱۸ بحری میل کی رفتار ۱۰۹۴۴۰ فٹ فی گھنٹہ کی رفتار کے مساوی ہے یعنی ۳۰٫۴ فٹ فی ثانیہ۔ پس

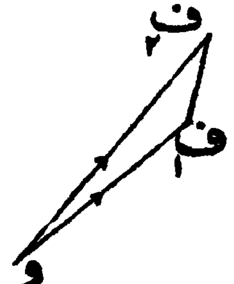
$$\text{جب ط} = \frac{۳۰٫۴}{۲۰۰۰} = ۰٫۱۵۲$$ اور اس لیے ط = ۲° ۵۲′ ۱۶″ ۔

رفتاروں کا مثلث

۱۰ — ہم رفتاروں کو ایک اور قاعدہ سے بھی مرکب کر سکتے ہیں، یہ قاعدہ رفتاروں کے مثلث کے طور پر مشہور ہے۔ شکل (۳) میں دو رفتاریں اف، اق سے تعبیر ہوئی تھیں اور اِن کا حاصل ار سے۔ لیکن اِن دو رفتاروں کو اف، ف ر سے بھی تعبیر کیا جا سکتا ہے اور ان کے حاصل کو ر ا سے۔ پس ہمیں حسب ذیل قاعدہ ملتا ہے:

اگر دو رفتاریں ایک مثلث کے دو ضلعوں سے جو ترتیب وار لئے گئے ہوں تعبیر ہوں تو اِن کا حاصل تیسرے ضلع سے تعبیر ہو گا جبکہ اسے سمت میں پہلے ضلع سے دوسرے ضلع تک لیا جائے (۱۱)

مثلاً فرض کرو کہ لمحات ت، ت پر کسی متحرک نقطہ کی رفتاریں کسی پیمانہ پر خطوط



شکل (۶)

وف$_2$ اور وف$_1$ سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں یہ خطوط و میں سے کھینچے گئے ہیں تو ف$_1$ف$_2$ سے اسی پیمانہ پر وہ زائد رفتار تعبیر ہو گی جو نقطہ نے اِس وقفہ میں حاصل کی ہے۔

کیونکہ ہم ایک ایسے فریم کا تصور کر سکتے ہیں جو وقت ت$_1$ پر ذرہ کی یکساں رفتار وف$_1$ سے حرکت کر رہا ہو۔ وقت ت$_2$ پر کی رفتار وف$_2$ کو فریم کی رفتار وف$_1$ اور اِس کے لحاظ سے ایک رفتار ف$_1$ف$_2$ کا مرکب سمجھا جا سکتا ہے۔ صریحاً یہ موخر الذکر رفتار، رفتار کا اضافہ ہے۔

مثالیں

۱ — ایک گاڑی ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے اور ایک شخص گاڑی سے ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اُس سمت میں کودتا ہے جو گاڑی کی رفتار کی سمت کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ زمین کے لحاظ سے اُس کی رفتار کیا ہے۔

۲ — ایک ریلوے ٹرین پر جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہی ہے ایک گولی کی زد پڑتی ہے جس کو اُفقاً اور ٹرین کے علی القوایم ۴۴۰ فٹ کی رفتار سے فائر کیا گیا ہے۔ اُس رفتار کی سمت اور مقدار معلوم معلوم کرو جس سے گولی ایک شخص کو جو ٹرین میں ہے ٹرین کی طرف آتی نظر آئے گی۔

۳ — ایک جہاز جس کا سر شمال مشرق کی جانب ہے ۱۲ بحری میل کی شرح سے سمندر میں جس کی موجیں جنوب مشرق کی جانب ۵ بحری میل کی شرح سے بہہ رہی ہیں حرکت کر رہا ہے۔ ڈھائی گھنٹوں میں جہاز کتنی دور جائیگا۔

۴ — ایک ٹرین ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے اور انتصابی سے ۳۰° کے زاویہ پر اسی سمت میں جس میں ٹرین حرکت کر رہی ہے بارش ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہو رہی ہے۔ ٹرین کی کھڑکیوں پر بارش کے قطرے کس سمت میں گرتے نظر آئیں گے۔

۵ — ایک جہاز کا راستہ جانب جنوب ہے اور اس کی چال ۲۰ بحری میل ہے

ہوا مغرب سے چل رہی ہے لیکن جہاز کے دودکش سے دھُواں شمال سے مشرقی جانب ۳۰° کی سمت میں جاتا ہوا دکھائی دیتا ہے ۔ ہوا کی رفتار کیا ہے ۔

٦ — ایک شخص ایک نہر کو جو ایک میل چوڑی ہے عبور کرنا چاہتا ہے ۔ وہ بہاؤ کے مخالف کنارے سے ۳۰° کا زاویہ بناتے ہوئے اپنی کشتی کھیتا ہے ۔ اُسے عبور کرنے میں کتنی دیر لگے گی اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اپنی کشتی چلائے اور بہاؤ کی رفتار بھی ۴ میل فی گھنٹہ ہو ۔

٧ — ایک نہر کے بہاؤ کی رفتار ا ہے اور ایک شخص اپنی کشتی رفتار ب سے چلا سکتا ہے ۔ اِس شخص کو اپنی کشتی کس سمت میں چلانی چاہئے اگر وہ ساحل کے ایک ایسے نقطہ پر پہنچنا چاہے جو اُس کی روانگی کے نقطہ کے ٹھیک مقابل ہو ۔ نیز اُسے کس سمت میں کشتی کھینی چاہئے کہ وہ نہر کو کم سے کم وقت میں عبور کرے ۔

٨ — ایک جہاز جس کا سر جانب جنوب ہے ایک نہر میں جس کا بہاؤ جانب مغرب ہے جا رہا ہے ۔ دو گھنٹوں کے ختم پر معلوم ہوا کہ جہاز جنوب سے جانب مغرب ١٥° کی سمت میں ٣٦ میل طے کر چکا ہے ۔ جہاز اور نہر کی رفتاریں معلوم کرو ۔ (١٢)

٩ — ایک شخص جو جانب مشرق ٣ میل فی گھنٹہ کی شرح سے سفر کر رہا ہے معلوم کرتا ہے کہ ہوا ٹھیک شمال سے چلتی ہوئی محسوس ہو رہی ہے ۔ لیکن جب وہ اپنی چال دُگنی کرتا ہے تو اُسے ہوا شمال مشرق سے چلتی ہوئی معلوم ہوتی ہے ۔ ہوا کی سمت اور اِس کی رفتار معلوم کرو ۔

اسراع

١١ — اسراع رفتار کے اضافہ کی شرح ہے ۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک متحرک نقطہ کی رفتار، ایک ثانیہ میں بقدر مقدار ع کے بڑھتی ہے خواہ یہ ثانیہ کوئی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی حرکت میں یکساں اسراع ع فی ثانیہ ہے ۔ مثلاً یہ معلوم ہوا ہے کہ جب ایک پتھر یا کوئی جسم جاذبہ ارض کے

تحت گرتا ہے تو اس کی رفتار میں ایک خاص مستقل رفتار ع فی ثانیہ کا اضافہ ہوتا ہے جہاں ع سے تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر ہوتی ہے۔ پس ہم کہتے ہیں کہ ایک گرتا ہوا پتھر ع فی ثانیہ یعنے تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے۔

بالعموم اسراع ایکساں نہیں ہوگا، رفتار کے اضافہ کی شرح سفر کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوگی۔ کسی لمحہ پر اسراع معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کے ایک صغیر وقفہ فرت میں رفتار کی تبدیلی کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ اگر رفتار کا اضافہ فرو ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ اس لمحہ پر اسراع ہے جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے۔ اسراع بلاشبہ مقدار اور علامت دونوں رکھے گا کیونکہ رفتار یا تو بڑھ رہی ہوگی یا گھٹ رہی ہوگی۔ جب رفتار گھٹ رہی ہو تو اسراع کی علامت منفی لینی چاہئے۔ منفی اسراع کو **ابطاء** کہا جاتا ہے مثلاً ابطا ع کا مطلب یہ ہوگا کہ رفتار بقدر مقدار ع فی اکائی وقت گھٹتی ہے۔

مثالیں

۱ ۔ ایک مزدور ایک مکان کی چھت سے گرا اور ۴ ثانیوں میں زمین پر آرہا۔ اس نے زمین کو کس رفتار سے ضرب لگائی جبکہ جاذبہ کی وجہ سے اسراع ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو۔

۲ ۔ ایک ٹرین کی رفتار ایک دئے ہوئے لمحہ پر ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے اور وہ ایک فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتی ہے۔ ۲۰ ثانیوں کے بعد اس کی رفتار معلوم کرو۔

۳ ۔ ایک ٹرین بریک ڈالنے کے دس ثانیوں بعد رکتی ہے۔ اگر ابطا ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو ٹرین کی رفتار بریک ڈالتے وقت کیا تھی۔ (۱۴)

۴ ۔ ایک جسم ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ابتدا کرتا ہے اور ۶ فٹ فی

فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتا ہے ۔ ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار حاصل کرنے میں اُسے کتنی دیر لگے گی ۔

۵ ۔ دو جسم ایک ہی لمحہ پر علی الترتیب رفتاروں ۶ اور ۹ سے ابتدا کرتے ہیں ۔ پہلے جسم کی حرکت میں ع فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا ابطا وقوع پذیر ہوتا ہے اور دوسرے جسم کی حرکت یکساں ہے پہلے جسم کے ساکن ہونے تک دوسرا جسم کتنی دور جائے گا ۔

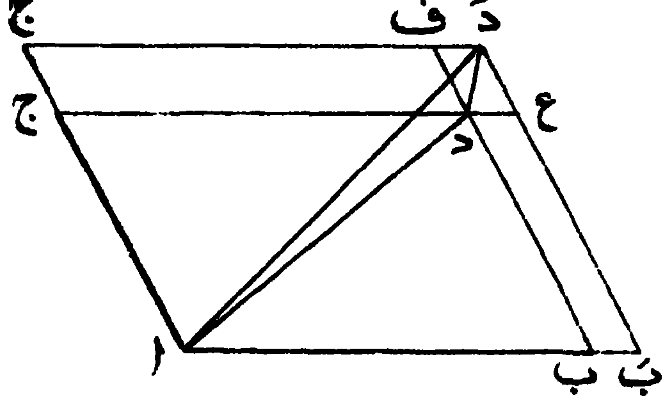
۶ ۔ ایک جسم سکون سے حرکت کی ابتداء کرتا ہے اور چار ثانیوں تک ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے ایکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے ۔ اگر اس کے بعد اسراع رُک جائے تو اس کے بعد پانچ ثانیوں میں جسم کتنی دور جائے گا ۔

۷ ۔ ایک ٹرین کی رفتار ۵ ثانیوں میں ۴۰ میل فی گھنٹہ سے ۳۰ میل فی گھنٹہ میں گھٹ جاتی ہے اگر ابطاع یکسان ہو تو ساکن ہونے سے پیشتر وہ اور کتنی دور جائے گی ۔

۸ ۔ ایک جسم جو جاذبہ کے تحت گر رہا ہے ۲ء۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے ۔ اس اسراع کو (ا) سینٹی میٹر ثانیہ اور (ب) میل، گھنٹہ کی اکائیوں میں بیان کرو ۔

۱۲ ۔ اسراعوں کا متوازی الاضلاع مسئلہ ۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ کی رفتار دو رفتاروں ر، ر، سے جو معلومہ سمتوں میں ہیں مرکب ہے اور فرض کرو کہ یہ رفتاریں متغیر ہیں اور اِنکے اسراع ع، ع ہیں ۔ اب اگر رفتاروں کی سمت میں دو خطوط کسی پیمانہ پر ع، ع کو تعبیر کرنے کے لیے کھینچے جائیں تو حاصل اسراع اسی پیمانہ پر اُس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوگا جسکے دو کنارے خطوط ایس ...

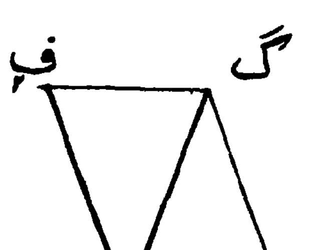
اِس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ہم نقطہ کی حرکت پر کسی صغیر وقفہ فرت میں غور کرتے ہیں جس میں ترکیبی اسراع ع، ع ہیں ۔ شکل میں



شکل (۷)

فرض کرو کہ اِس وقفہ کی ابتدا پر اب اور اج سے علی الترتیب رفتاریں و، و۲ تعبیر ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ ب بَ اور ج جَ سے اُسی پیمانہ پر وقفہ فرت میں اِن رفتاروں کے صغیر اضافے تعبیر ہوتے ہیں یعنے وہ ع، فرت اور ع۲ فرت کو تعبیر کرتے ہیں۔ تب ابَ، اجَ وقفہ فرت کے ختم پر رفتاروں کو تعبیر کریں گے۔ (۱۴)

شکل میں خطوط ب د ف، بَ ع دَ، ج د ع، جَ ف دَ رفتاروں کو تعبیر کرنے والے خطوں اب اور اج کے متوازی کھینچو۔ اِس طرح وقفہ فرت کی ابتدا پر حاصل رفتار اد سے تعبیر ہوگی اور وقفہ کے ختم پر ادَ سے۔ رفتار ادَ کو دو رفتاروں اد، ددَ کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے اور حسب دفعہ (۱۰) ددَ سے وقفہ فرت میں رفتار کا اضافہ تعبیر ہوتا ہے۔ پس اگر حاصل اسراع ع ہو تو خط ددَ، رفتار ع فرت کو تعبیر کرے گا۔ اُسی پیمانہ پر خطوط د ع اور د ف سے رفتاریں ع۱ فرت اور ع۲ فرت تعبیر ہوتی ہیں اور د ع دَ ف ایک متوازی الاضلاع ہے۔



شکل (۸)

اگر اسراع ع۱ اور ع۲ کو وف۱ اور وف۲ شکل (۸) کسی پیمانہ پر تعبیر کریں

اور اگر تکمیل یافتہ متوازی الاضلاع کا وتر وگ ہو تو صریحاً وف$_1$: وف$_2$ = ع$_1$: ع$_2$ = د ع : د ف اس لیے متوازی الاضلاع وف$_1$ گ ف$_2$ (شکل ۸) اور متوازی الاضلاع د ع دَ ف (شکل ۷) متشابہ اور متشابہاً واقع ہوں گے۔ اس لیے

وگ : وف$_1$ = ددَ : د ع = ع فرت : ع$_1$ فرت = ع : ع$_1$

پس وگ اسراع ع کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے جس پر وف$_1$ اور وف$_2$ اسراعوں ع$_1$ اور ع$_2$ کو تعبیر کرتے ہیں، نیز وگ چونکہ ددَ کے متوازی ہے اس لیے وہ ع کی سمت کو بھی تعبیر کرے گا اور اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔

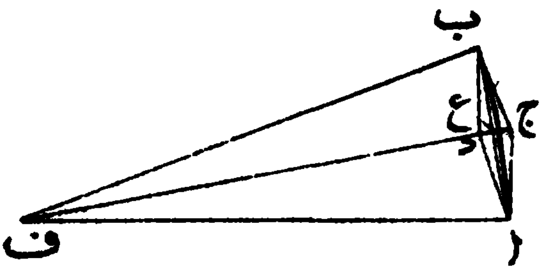
یہ ظاہر ہے کہ کسی لمحہ پر اسراع کا اسی سمت میں ہونا ضروری نہیں ہے جس میں رفتار ہے۔ شکل ۷ میں سمتیں اد اور ادَ، وقفہ فرت کی ابتدا اور ختم پر کی رفتاروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ جب انتہا میں ہم فرت = ۰ لیتے ہیں تو یہ خطوط منطبق ہو جاتے ہیں اور رفتار کی سمت اس لمحہ پر جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے اد کی سمت ہوتی ہے۔ لیکن اس لمحہ پر اسراع کی سمت ددَ ہے۔

تمثیلاً ہم ایک ذرہ کی حرکت پر غور کرتے ہیں جو ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے یعنے پہیہ کے محیط کے کسی نقطہ کی حرکت پر جبکہ پہیہ اپنے مرکز کے گرد یکساں رفتار و سے گردش کر رہا ہو۔

فرض کرو کہ اس نقطہ کے دو محل دو لمحات پر ا، ب (شکل ۹) ہیں اور ا، ب پر کے مماس نقطہ ج پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ د، متوازی الاضلاع اج ب د کی تکمیل کرتا ہے۔

پہلے لمحہ پر نقطہ کی رفتار، اج پر رفتار و ہے۔ فرض کرو کہ یہ رفتار خود خط اج سے تعبیر ہوتی ہے۔ دوسرے لمحہ پر رفتار، ج ب پر رفتار و ہے، اس رفتار کو اسی پیمانہ پر خط ج ب سے یا اد سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ اج اور اد سے دو لمحوں پر کی رفتاریں تعبیر ہوتی ہیں اس لیے خط ج د سے (۱۵)
رفتار کا اضافہ ان دو لمحات کے درمیان تعبیر ہوگا۔

اب فرض کرو کہ ان دو لمحات کے درمیان ایک صغیر وقفہ فرت کا فرق ہے تو نقطے ا، ب ایک دوسرے سے بہت ہی قریب ہونگے اور ان کے درمیان صغیر قوس و فرت کا فاصلہ ہوگا۔ شکل میں ج د، ف میں سے گذرتا ہے خواہ ا ب دائرہ پر کہیں ہوں، اس لیے جب ب کو ا پر منطبق کیا جاتا ہے تو ج د دائرہ کے اس نصف قطر پر منطبق ہوتا ہے جو ا میں سے گذرتا ہے۔ لیکن اگر متحرک نقطہ کا اسراع ع ہو تو وقت فرت میں رفتار میں ع فرت کا اضافہ ہونا چاہیئے۔ اس لیے رفتار کے اضافہ ع فرت کو سمت اور مقدار میں ج د تعبیر کرتا ہے اور اسی لیے



شکل (۹)

ا پر کا اسراع، ا میں سے گذرنے والے نصف قطر پر ہے۔

یہ وہ صورت ہے جس میں اسراع، رفتار کے علی القوائم ہے۔

اسراع کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج د = ۲ ج ع اور متشابہ مثلثوں سے

ع ج : ج ب = ب ع : ب ف

اب ع ج یا $\frac{1}{2}$ ج د، رفتار $\frac{1}{2}$ ع فرت کو تعبیر کرتا ہے اور ج ب اسی پیمانہ پر رفتار و کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے

$\frac{1}{2}$ ع فرت : و = ب ع : ب ف

انتہا میں جبکہ ب ا بہت چھوٹا ہو تو ب ع یا $\frac{1}{2}$ ب ا کو دائرہ قوس ب ا کے نصف کے مماثل ہو جاتا ہے اور اس لیے $\frac{1}{2}$ و فرت کے مماثل ہو جاتا ہے۔ پس اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو تو

$\frac{1}{2}$ ع فرت : و = $\frac{1}{2}$ و فرت : ا

یعنے $ع = \frac{و^2}{ر}$

مثالیں

۱۔ ایک ہوائی چکی کے بادبان طول میں ۲۰ فٹ ہیں اور چکی دس ثانیوں میں ایک بار گھومتی ہے۔ ایک بادبان کے سرے پر کے ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرو۔

۲۔ ۳ فٹ نصف قطر کا ایک پہیہ ۱۰ گردش فی ثانیہ کی شرح سے گھوم رہا ہے اور اسی اثناء میں جاذبہ کی وجہ سے ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے آزادانہ گر رہا ہے۔ پہیہ کے محیط پر کے مختلف نقطوں کے حاصل اسراع معلوم کرو۔

۳۔ زمین کے استوائی قطر کو ۷۹۲۰ میل لیکر زمین کے مرکز کی جانب (ا) ایک نقطہ کا اسراع جو خط استواء پر زمین کے لحاظ سے ساکن ہے، اور (ب) ایک جسم کا اسراع جو جاذبہ کے تحت خط استواء پر ایک ایسے اسراع سے گر رہا ہے جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ۳۲٫۰۹ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے، معلوم کرو۔ (۱۶)

۴۔ یہ فرض کرکے کہ چاند زمین کے گرد $\frac{1}{2}$ ۲۹ دنوں میں ۲۴۰۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اس کا اسراع جانب زمین معلوم کرو۔

۵۔ سیارے سورج کے گرد مختلف دوری مدتوں میں دائرے مرتسم کرتے ہیں اس طور پر کہ دوری مدتوں کے مربع دائروں کے نصف قطروں کے مکعبوں کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ سیاروں کے اسراع، سورج سے ان کے فاصلوں کے مربعوں کے بالعکس متناسب ہیں۔

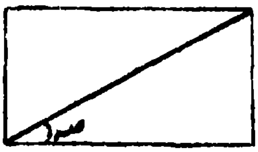
سمتی

۱۳۔ ہم نے تین مقداریں معلوم کی ہیں، حرکت، رفتار، اور اسراع۔ ان میں سے ہر ایک مقدار قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کی جا سکتی ہے۔

وہ مقداریں جو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مُرکب ہوسکیں سمتی کہلاتی ہیں۔ سمتی میں مقدار اور سمت دونوں ہونے چاہئیں اور اس لیے اس کو کسی پیمانہ پر ایک خط مستقیم کے ذریعہ تعبیر ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ حرکت، رفتار، اور اسراع اسب کے سب سمتی ہیں۔

ایک مستوی میں سمتیوں کی ترکیب اور تحلیل

۱۴ — سمتی کی تعریف سے ظاہر ہے کہ دو سمتی قانون متوازی الاضلاع کے اطلاق سے ایک سمتی میں مرکب کئے جا سکتے ہیں۔ تعریف سے یہ بھی مستنبط ہوتا ہے کہ کسی ایک سمتی کو دو سمتیوں کے مماثل سمجھا جا سکتا ہے جبکہ یہ دو سمتی ایک متوازی الاضلاع کے کناروں سے تعبیر ہوں جو اِس طریقہ سے بنایا گیا ہو کہ ابتدائی سمتی اس کے وتر سے تعبیر ہو جائے۔ یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ کوئی سمتی دو دوسرے سمتیوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔



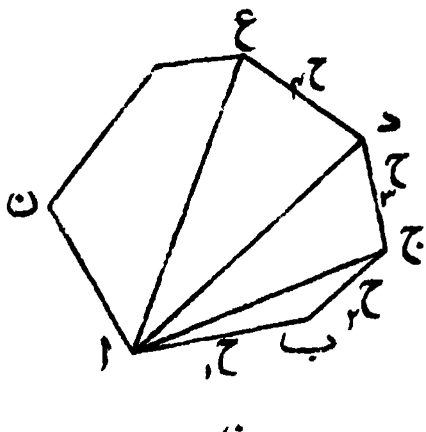
شکل (۱۰)

بالخصوص اگر ہم ایک قائم الزاویہ متوازی الاضلاع بنائیں جس کا وتر سمتی ح کو تعبیر کرے تو معلوم ہوگا کہ سمتی ح، دو سمتیوں ح جم صہ اور ح جب صہ میں تحلیل ہو سکتا ہے جہاں یہ اجزائے تحلیلی ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایسی سمتوں میں ہیں کہ سمتی ح اِن کے ساتھ زاویے صہ اور $\frac{\pi}{2}$ ـ صہ بناتا ہے۔

اگر ہم ایک مستوی میں دو ثابت قائم محاور و لا، و ما لیں تو ہم دیکھتے کہ کوئی سمتی ح دو اجزائے ترکیبی ح جم صہ اور ح جب صہ میں

دروں کے متوازی تحلیل کیا جا سکتا ہے جہاں صہ وہ زاویہ ہے (۱۷)
ح، محور ولا کے ساتھ بناتا ہے۔ اجزائے ترکیبی ح جم صہ،
سب صہ کو ح کے اجزائے ترکیبی محوروں ولا، وما کے
زی کہا جاتا ہے۔

متعدد سمتیوں $ح_1$، $ح_2$، $ح_3$، ...، $ح_ن$ کو مرکب کرنے کے
یقے ہیں۔ پہلا طریقہ یہ ہے کہ ایک کثیر الاضلاع ا ب ج د ... ن
جائے ایسا کہ اس کے اضلاع اب، ب ج، ج د، ...، م ن
لترتیب سمتیوں $ح_1$، $ح_2$، $ح_3$، ...، $ح_ن$ کو تعبیر کریں تو ا ن
کے حاصل کو تعبیر کرے گا۔ کیونکہ $ح_1$، $ح_2$ کو اول سمتی $ح_{12}$ میں
ا ج سے تعبیر ہوتا ہے مرکب کیا جا سکتا ہے، پھر $ح_{12}$ اور $ح_3$
ں سمتی میں مرکب کیا جا سکتا ہے جو ا د سے تعبیر ہوتا ہے اور علیٰ ہذا
ہ بالآخر ا ن حاصل ہو۔



شکل (۱۱)

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ
ہتی کو مثلاً $ح_س$ کو قائم
وں ولا، وما پر اس کے
ئے ترکیبی
جم $صہ_س$، $ح_س$ جب $صہ_س$
حلیل کر سکتے ہیں تو اس طرح
سمتی، ۲ ن سمتیوں میں

تحلیل ہوں گے جن میں سے ن سمتی محور ولا کے متوازی اور ن سمتی محور وما کے متوازی ہوں گے۔ پہلے جٹ کو محور ولا کے متوازی ایک واحد سمتی

$$\text{لا} \equiv \text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \cdots$$

میں مرکب کیا جا سکتا ہے اور دوسرے جٹ کو محور وما کے متوازی ایک واحد سمتی

$$\text{ما} \equiv \text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \cdots$$

میں۔ اِس طرح دو سمتی محوروں ولا، وما کے متوازی لا اور ما حاصل ہوں گے اگر اِن کا حاصل سمتی ح ہو جو ولا کے ساتھ زاویہ صہ بنائے تو

$$\text{ح جم صہ} = \text{لا} = \text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \cdots \quad (1)$$

$$\text{ح جب صہ} = \text{ما} = \text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \cdots \quad (2)$$

ح کی عددی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کے مربع لیتے ہیں اور انہیں جمع کرتے ہیں تو

$$\text{ح}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2$$

$$= (\text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \cdots)^2 + (\text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \cdots)^2$$

$$= \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 + \cdots + 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,(\text{جم صہ}_1\,\text{جم صہ}_2 + \text{جب صہ}_1\,\text{جب صہ}_2) + \cdots$$

$$= \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 + \cdots + 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم}\,(\text{صہ}_1 - \text{صہ}_2) + \cdots$$

حاصل ح کی سمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کی متناظر (۱۸)
طرفین کو تقسیم کرتے ہیں تو

$$\text{مس صہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \ldots\ldots}{\text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \ldots\ldots}$$

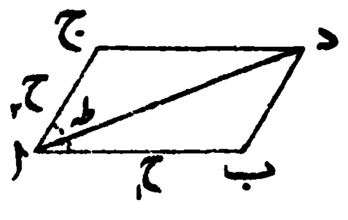
اگر صرف دو سمتیاں ح_1 اور ح_2 ہوں جو ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بنائیں تو ہم رکھ سکتے ہیں $\text{صہ}_1 - \text{صہ}_2 = \text{طہ}$ اور اس طرح

$$\text{ح}^2 = \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 + 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم طہ}$$

چونکہ ح صریحاً ایک متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے ح_1، ح_2 طول کے ہیں اور زاویہ طہ پر ملتے ہیں اس لیے نتیجۂ بالا کو راست مثلث ا د ج کے علم ہندسہ سے جس میں ج پر کا زاویہ صریحاً π - طہ ہے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ پس

$$\text{ح}^2 = \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 - 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم}(\pi - \text{طہ})$$

جو صریحاً اوپر کے جملے کے مماثل ہے۔ ہم اس طریقہ کی توضیح کے لیے کہ سمتی ایک مستوی میں قائم اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیے جا سکتے ہیں دو مثالیں لیتے ہیں۔



شکل (۱۲)

۱۔ شکل ۲ صفحہ (۸) میں فرض کرو کہ جہاز کی سمت (ا ب شکل ۵) کو محور و لا لیا گیا ہے اور اس سمت کو جس میں گولی چلتی ہے محور و ما لیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ گولی کو رفتار و سے فائر کیا گیا ہے جو و لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے اور فرض کرو کہ جہاز کی رفتار ع ہے۔ حاصل رفتار و ما پر ہونی چاہیے تاکہ و لا پر رفتار (فرض کرو لا) صفر ہو۔ لیکن

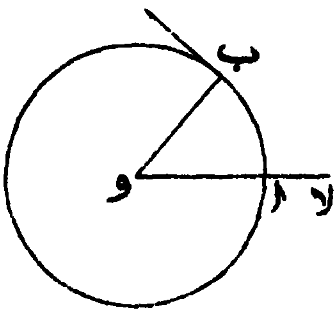
$$\text{لا} = \text{ع} + \text{و}\,\text{جم طہ}$$

اس لئے

$$\text{جم طہ} = -\frac{\text{ع}}{\text{و}}$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو حاصل ہو چکا ہے۔

۲ ـ ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرنا جو یکساں رفتار و سے نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے۔



شکل (۱۳)

فرض کرو کہ وقت ت = ۰ پر ذرہ کا محل ا ہے اور لا کا محور و ا ہے۔ وقت ت کے بعد ذرہ، قوس کا طول و ت طے کرے گا، اس لیے اگر وقت ت کے بعد اس کا محل ب ہے تو زاویہ ب و ا دائری ناپ میں $\frac{و ت}{ا}$ ہے۔ اسلیے ب پر رفتار کی سمت یعنے ب پر کے مماس کی سمت و لا کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{۲} + \frac{و ت}{ا}$ بنائے گی (۱۹)

اور اس لیے رفتار کے اجزائے ترکیبی محاور و لا، و ما پر $و_۱$ اور $و_۲$ ہوں تو

$$و_۱ = و\ جم\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{و ت}{ا}\right) = -و\ جب\ \frac{و ت}{ا}$$

$$و_۲ = و\ جب\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{و ت}{ا}\right) = و\ جم\ \frac{و ت}{ا}$$

و لا پر اسراع $\frac{فر و_۱}{فر ت}$ ہے اور اس لیے بلحاظ ت کے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$-\frac{و^۲}{ا}\ جم\ \frac{و ت}{ا}$$

اسی طرح و ما پر اسراع $\frac{فر و_۲}{فر ت}$ یعنے

$$-\frac{و^۲}{ا}\ جب\ \frac{و ت}{ا}$$

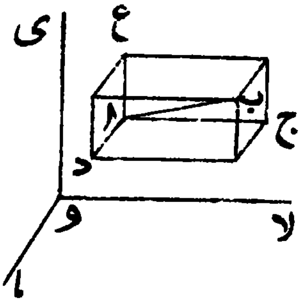
حاصل ہوتا ہے۔

اِن اسراعوں کو مرکب کرنے سے ب و پر اسراع $\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$ حاصل ہوتا ہے

اور یہ وہی نتیجہ ہے جو صفحہ (۲۳) پر حاصل کیا جا چکا ہے۔

فضا میں سمتیوں کی ترکیب اور تحلیل

یہ ہو سکتا ہے کہ وہ سمتی جنہیں مرکب کرنا ہے ایک ہی مستوی میں نہ ہوں۔ لیکن اِن کا حاصل دریافت کرنے کا طریقہ اصولاً وہی ہے۔ چنانچہ ہم فضا میں ایک کثیر الاضلاع ا ب ج د .... ن بناتے ہیں ایسا کہ اِس کے اضلاع اب، ب ج.... م ن سمتیوں $ح_1$، $ح_2$... ح کو تعبیر کریں حسب صورت ماسبق یہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حاصل سمتی ان ہے۔



شکل (۱۴)

بالعموم سہولت اِس میں ہوتی ہے کہ ہر سمتی کو فضا میں قائم محوروں کے متوازی تحلیل کیا جائے۔

اگر سمتی اب دیا گیا ہو تو ہم ا میں سے اور اسی طرح ب میں سے تین مستویاں محددوں کے مستویوں کے متوازی کھینچتے ہیں۔ اِن سے ایک قائم متوازی السطوح حاصل ہوتا ہے جس کا ایک وتر اب ہے۔ اس کے کناروں اج، اد، اع سے تین سمتی تعبیر ہوں گے جو اب کے عوض لیے جا سکتے ہیں یہ سمتی جو محوروں کے متوازی ہیں سمتی اب کے اجزائے ترکیبی ہیں۔

فرض کرو کہ ن سمتی ہیں اور سمتی $ح_س$ کے سمتی زاوئے $ع_س$، $ی_س$، $ج_س$

(۲۰) سے تعبیر ہوتے ہیں۔ حسب طریقۂ بالا ہر سمتی $ح_س$ کو محوروں کے متوازی تین
اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، اِن اجزائے ترکیبی کی مقداریں یہ

$$ح_س \text{ جم } عہ_س، \quad ح_س \text{ جم } بہ_س، \quad ح_س \text{ جم } جہ_س$$

اِس طریقہ سے ۳ ن سمتی حاصل ہوں گے، اِن میں سے محور لا کے متوازی ن سمتیوں کو ایک واحد سمتی لا میں مرکب کیا جا سکتا ہے چنانچہ

$$لا = ح_1 \text{ جم } عہ_1 + ح_2 \text{ جم } عہ_2 + \cdots + ح_ن \text{ جم } عہ_ن \quad \cdots (۳)$$

پس اِس پورے نظام کی بجائے ایک واحد سمتی لا کو لیا جا سکتا ہے اسی طرح محور ما اور محور ی کے متوازی سمتیوں کو ایک ایک واحد سمتی میں مرکب کیا جا سکتا ہے یعنی

$$ما = ح_1 \text{ جم } بہ_1 + ح_2 \text{ جم } بہ_2 + \cdots + ح_ن \text{ جم } بہ_ن \quad \cdots (۴)$$

$$ے = ح_1 \text{ جم } جہ_1 + ح_2 \text{ جم } جہ_2 + \cdots + ح_ن \text{ جم } جہ_ن \quad \cdots (۵)$$

اِن تین سمتیوں لا، ما، ے کا حاصل اور اِس لیے ابتدائی ن سمتیوں کا حاصل صریحاً اُس قائم الزاویہ متوازی السطوح کا ایک وتر ہے جس کے کنارے لا، ما، ے ہیں۔ اگر اِس حاصل کے طول کو ح سے تعبیر کیا جائے اور اِس کے سمتی زاویوں کو عہ، بہ، جہ سے تو

$$ح^2 = لا^2 + ما^2 + ے^2$$

$$\text{اور جم } عہ = \frac{لا}{ح}، \quad \text{جم } بہ = \frac{ما}{ح}، \quad \text{جم } جہ = \frac{ے}{ح}$$

اس لیے حاصل، مقدار اور سمت دونوں میں پوری طرح معلوم ہو گیا۔

مرکز ہندسی

۱۶ — فرض کرو کہ سمتیوں کا ایک نظام سمت میں و ا_1، و ا_2، ...، و ا_n سے اور مقداریں $\text{ک}_1 \times$ و ا_1، $\text{ک}_2 \times$ و ا_2، ....، $\text{ک}_n \times$ و ا_n سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ک_1، ک_2، ....، ک_n کوئی مقداریں ہیں۔ فرض کرو کہ ا_r کے محدد، و میں سے گذرنے والے محوروں کے لحاظ سے لا_r، ما_r، ی_r ہیں اور ان محوروں کے لحاظ سے و ا_r کے سمتی زاوئے ع_r، ب_r، ج_r ہیں اور سمتی $\text{ک}_r \times$ و ا_r کی مقدار ح_r ہے۔ ان محوروں پر اس سمتی کے اجزائے ترکیبی ہیں

$$\text{ح}_r \text{ جم ع}_r = \text{ک}_r \times \text{و ا}_r \text{ جم ع}_r = \text{ک}_r \text{ لا}_r$$

$$\text{ح}_r \text{ جم ب}_r = \text{ک}_r \times \text{و ا}_r \text{ جم ب}_r = \text{ک}_r \text{ ما}_r$$

$$\text{ح}_r \text{ جم ج}_r = \text{ک}_r \times \text{و ا}_r \text{ جم ج}_r = \text{ک}_r \text{ ی}_r$$

اس لیئے مساواتوں (۳)، (۴)، (۵) کو لکھا جاسکتا ہے اس طرح

$$\text{لا} = \sum_1^n \text{ک}_r \text{ لا}_r ،\quad \text{ما} = \sum_1^n \text{ک}_r \text{ ما}_r ،\quad \text{ے} = \sum_1^n \text{ک}_r \text{ ی}_r$$

اس نتیجہ کی تفہیم کے لیے ہم نقطوں کے ایک نظام کے مرکز ہندسی (۲۱) کے تخیل سے استفادہ کرتے ہیں۔ بموجب تعریف نقطوں کے کسی نظام کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے کہ اس کا فاصلہ محددوں کے تین مستویوں میں سے کسی سے ان فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے نظام کے تمام نقطوں کے ہیں جبکہ ہر فاصلہ کو اس کی واجب علامت کے ساتھ لیا گیا ہو

اِس تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہم خواہ کوئی مستوی لیں اُس سے مرکز ہندسی کا فاصلہ اُن فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے ن نقطوں کے ہیں۔ کیونکہ اگر رویں نقطہ کے محدد لار، مار، یار ہوں تو مرکز ہندسی کے محدد (فرض کرو لاَ، ماَ، یَ) ہوں گے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} \text{لا}_{\text{ر}} ،\quad \bar{\text{ما}} = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} \text{ما}_{\text{ر}} ،\quad \bar{\text{ی}} = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} \text{ی}_{\text{ر}} \quad \ldots\ldots (۹)$$

اور مرکز ہندسی سے کسی مستوی

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی} + \text{د} = ۰$$

کا عمودی فاصلہ ہوگا

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}} \left(\text{ا}\,\bar{\text{لا}} + \text{ب}\,\bar{\text{ما}} + \text{ج}\,\bar{\text{ی}} + \text{د}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}} \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\text{ا لا}_{\text{ر}} + \text{ب ما}_{\text{ر}} + \text{ج ی}_{\text{ر}} + \text{د}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} \frac{\text{ا لا}_{\text{ر}} + \text{ب ما}_{\text{ر}} + \text{ج ی}_{\text{ر}} + \text{د}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}}$$

جس سے نتیجہ ثابت ہے۔

اب فرض کرو کہ ان نقطوں میں سے ک نقطے سب کے سب نقطہ لار، مار، یار پر منطبق ہوتے ہیں، کب نقطے لاب، ماب، یب پر اور علیٰ ہذا القیاس تو مرکز ہندسی کے محدد ہوں گے (مساواتوں (۷) کی رو سے)

$$\left.\begin{aligned} \bar{\text{لا}} &= \frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ک}_{\text{ر}} \text{لا}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}} \text{لا}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \\ \bar{\text{ما}} &= \frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ک ما}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}} \text{ما}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \\ \bar{\text{ی}} &= \frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ک ی}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}} \text{ی}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۸)$$

جہاں عمل جمع فضا کے ان مختلف نقطوں پر لیا گیا ہے جن پر اصلی نقطے (۲۲)
مجتمع ہیں۔ اِن نقطوں کو ا، ب، ج ... سے تعبیر کرو تو نقطہ لاَ، ماَ، یَ کو
ضاربوں ک١، ک٢، ... کے جواب میں نقطوں ا، ب، ج ... کا مرکز ہندسی
کہتے ہیں۔

اِن نتیجوں کے ذریعہ مساواتیں (٦)

$$\text{لا} = \bar{\text{لا}} \sum_{1}^{\text{ن}} \text{ک}_\text{ر} \text{، ما} = \bar{\text{ما}} \sum_{1}^{\text{ن}} \text{ک}_\text{ر} \text{، ے} = \bar{\text{ی}} \sum_{1}^{\text{ن}} \text{ک}_\text{ر} \quad (٩)$$

میں تحویل ہوتی ہیں۔

اِس لیے سمتیوں کے مندرجۂ بالا جٹ کا حاصل، خط وج کی سمت میں ہے اور اِس کی مقدار $\text{وج} \sum_{1}^{\text{ن}} \text{ک}_\text{ر}$ ہے۔ مساواتوں (٩) کی رو سے ضارب $\text{ک}_\text{ر}$ کوئی عدد ہو سکتے ہیں مثبت یا منفی، اِس لیے مجموعہ $\sum_{1}^{\text{ن}} \text{ک}_\text{ر}$ مثبت، صفر یا منفی ہو سکتا ہے۔ بالخصوص اگر سمتی، مقدار اور سمت دونوں میں، و ا١، و ا٢، ... و ا_ن سے تعبیر ہوں تو حاصل، سمت وج میں ہے اور اس کی مقدار ن × وج ہے جہاں ن سمتیوں کی تعداد ہے اور نقطہ ج حسب تعریف بالا مرکز ہندسی ہے۔ پس حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:۔

مسئلہ۔ اگر مقداروں ک١ × و ا١، ک٢ × و ا٢، ..... کے سمتی خطوط و ا١، و ا٢ ... پر عمل کریں تو اِن کے حاصل کی مقدار (ک١ + ک٢ + ...) وث ہوگی اور وہ سمت

و ث میں عمل کرے گا جہاں ث، $ا_۱$، $ا_۲$..... کام کرنے والی ضاربوں ک، $ک_۱$، $ک_۲$... کے جواب میں ہے۔

مثالیں

۱۔ دو سمتیوں کا حاصل معلوم کرو جن کی مقداریں ۵ ف، ۱۲ ف ہیں اور جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۲۔ ایک سمتی ف، دو سمتیوں کا حاصل ہے جو اس کے ساتھ مخالف سمتوں میں ۳۰° اور ۴۵° کے زاویے بناتے ہیں۔ یہ موخرالذکر سمتی کتنے بڑے ہیں

۳۔ معلومہ مقداروں کے دو سمتیوں کی سمتیں کس طرح معلوم کیجا سکتی ہیں کہ ان کا حاصل دی ہوئی مقدار اور سمت کا ہو۔ یہ کب ناممکن ہوگا۔

۴۔ ثابت کرو کہ اگر دو معلومہ سمتیوں کے درمیانی زاویہ کو بڑھا دیا جائے تو ان کا حاصل گھٹتا ہے۔

۵۔ کن شرطوں کے تحت مقداروں ۷، ۲۴، اور ۲۵ کے سمتیوں کے ایک نظام کا حاصل صفر کے مساوی ہوگا۔

۶۔ طولوں ف، ف، اور ف $\sqrt{2}$ کے تین سمتی ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور باہم علی القوائم ہیں۔ حاصل کی مقدار اور وہ زاویے معلوم کرو جو حاصل کی سمت اور ہر جزو ترکیبی کی سمت کے درمیان ہیں۔ (۲۳)

۷۔ طولوں ف، ۲ف، ۳ف کے تین سمتی ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور ان کی سمتیں اس نقطہ پر ملنے والے ایک مکعب کے تین رخوں کے وتروں کی سمتیں ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔

۸۔ تین سمتی ایک متوازی السطوح کے تین رخوں کے وتروں سے جو ایک راس ا پر ملتے ہیں تعبیر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا حاصل متوازی السطوح کے اس وتر کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے جو ا سے کھینچا گیا ہے۔

۹۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ د ہے اور اس کے

اندرونی دائرہ کا مرکز ع ہے ۔ ثابت کرو کہ سمتیوں ا × ا دَ ب × ب دَ ج × ج د کا حاصل (ا + ب + ج) ع د ہے جہاں ا، ب، ج، مثلث کے ضلعوں کے طول ہیں ۔

۱۰ ۔ دو متوازی الاضلاع ا ب ج د ، اَ بَ جَ دَ ایک ہی مستوی میں ہیں ۔ ان سمتیوں کا حاصل معلوم کرو جو ایک نقطہ سے ااَ، ب بَ، ج جَ، د دَ کے متوازی اور ان کے متناسب کھینچے گئے ہیں ۔

۱۱ ۔ اگر مثلث ا ب ج کے محیط دائرہ کا مرکز و ہو اور مرکز عمودی ف تو ثابت کرو کہ و ف، سمتیوں و ا، و ب اور و ج کا حاصل ہے ۔ نیز یہ کہ ۲ ف و، سمتیوں ف ا، ف ب، ف ج کا حاصل ہے ۔

۱۲ ۔ ایک دائرے کے وتر ا و ب اور ج و د علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ سمتیوں و ا، و ب، و ج، و د کا حاصل سمتی و ف کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ف، دائرہ کا مرکز ہے ۔

عام مثالیں

(ان مثالوں میں اسراع بوجہ جاذبہ ارض کو ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ فرض کرو)

۱ ۔ ایک نقطہ ۲، ۴، ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتاریں ایک ساتھ ان سمتوں میں رکھتا ہے جو اس نقطہ کی ہیں جو ایک مثلث متساوی الاضلاع کے تین ضلعوں کو ترتیب وار مرتسم کرتا ہے ۔ اول الذکر نقطہ کی رفتار کی مقدار معلوم کرو ۔

۲ ۔ ایک نقطہ ایک ساتھ رفتاریں (ہر ایک و کے مساوی) ان خطوں کی سمتوں میں رکھتا ہے جو ایک منتظم مسدس کے مرکز سے اس کے پانچ راسوں تک کھینچے گئے ہیں ۔ حاصل رفتار کی مقدار اور سمت معلوم کرو ۔

۳ ۔ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ایک شامیانہ جو عرشے کے اوپر ۸ فٹ بلند ہے عرشہ کے اس حصہ کو بارش سے بچاتا ہے جو شامیانہ کے کنارے کے انتصابی ظل سے ۴ فٹ سے زیادہ پیچھے ہے لیکن جب جہاز ساکن ہوتا ہے تو

عرشہ کے خشک و تر حصوں کا خط فاصل اِس ظل سے ۶ فٹ آگے ہوتا ہے۔ جہاز کی رفتار معلوم کرو اگر بارش کی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۴ ــ ایک جہاز پر جو خط استوا پر شرق سے مغرب کی طرف جا رہا ہے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دن ظہر (مقامی وقت) سے دوسرے دن ظہر (مقامی وقت) تک فاصلہ طے شدہ ۲۰۰ میل ہے۔ دن کتنا طویل ہوگا اگر جہاز اسی شرح سے مغرب سے مشرق کی جانب چلے۔

(۲۴) ۵ ــ ایک ریل کی پٹڑی شرقاً غرباً عرض بلد λ میں واقع ہے۔ ایک ریل گاڑی کو اس پٹڑی پر کس شرح سے چلنا چاہئے کہ سورج ہمیشہ اس کے ٹھیک جنوب میں رہے۔

۶ ــ ایک جہاز کا ٹھیک راستہ اور رفتار معلوم کرو جو جانب شمال (بموجب کمپاس) ۱۰ بحری میلوں کی شرح سے ۴ بحری میل کے بہاؤ میں جو جنوب مشرق کی جانب ہے جا رہا ہے۔ نیز کمپاس سے سمت کی وہ تبدیلی معلوم کرو تاکہ جہاز ٹھیک شمالی راستہ اختیار کرے۔

۷ ــ ایک سیکل سوار ہوا کی رفتار سے زیادہ تیز سیکل چلاتا ہے اور ہوا کی سمت سمجھنے میں غلطی کرتا ہے اور اُس سمت کو ہوا کی سمت سمجھتا ہے جس میں ہوا اُسے آکر لگتی ہے جبکہ وہ متحرک ہے۔ ثابت کرو کہ ہوا ہمیشہ اُس کے خلاف چلتی ہوئی معلوم ہوگی خواہ وہ کسی سمت میں سیکل چلائے۔

۸ ــ ایک جہاز جو شرقاً ۲۰ بحری میل کی چال سے جا رہا ہے بوقت ۱۱ بجے صبح ایک روشنی کے مینار سے گذرتا ہے۔ یک دوسرا جہاز جو اُسی شرح سے جنوب میں جا رہا ہے اُسی نقطہ کو ایک بجے دوپہر پر عبور کرتا ہے۔ کس وقت وہ باہم قریب ترین ہوں گے اور اُس وقت اِن کے درمیان کیا فاصلہ ہوگا۔

۹ ــ دو ذرے ایک دائرے کے محیط میں علی الترتیب رفتاروں v اور 2v سے مخالف سمتوں میں حرکت کرتے ہیں کن محلوں میں اِن کی اضافی رفتار بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی ہوگی اور اِس وقت اِس کی قیمتیں کیا ہونگی۔

۱۰ ــ دو ذروں کی اضافی حرکت معلوم کرو جو ایک ہی رفتار v سے حرکت کر رہے ہیں لیکن ایک ذرہ نصف قطر a کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اور دوسرا

ایک قطر پر حرکت کرتا ہے۔

۱۱۔ دو ذرّے یکساں طور پر خطوطِ مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک معلومہ وقت پر ان کے درمیان فاصلہ ا ہے اور ان کی اضافی رفتار و ہے، اس اضافی رفتار کے اجزائے ترکیبی ا کی سمت میں اور اس کے عمود دار ع اور ط ہیں۔ ثابت کرو کہ جب وہ باہم قریب ترین ہوتے ہیں تو ان کے درمیان فاصلہ $\frac{\text{اط}}{\text{و}}$ ہے اور وہ اس محل پر وقفہ $\frac{\text{اع}}{\text{و}^{۲}}$ کے بعد پہنچتے ہیں۔

۱۲۔ ایک کھیت میں تین گھوڑے ایک خاص لمحہ پر ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راسوں پر ہیں۔ ایک شخص کے لحاظ سے جو ایک سڑک پر جا رہا ہے گھوڑوں کی اضافی حرکت سمت میں مثلث کے ضلعوں کے اطراف (ایک ہی جہت میں) اور مقدار میں شخص کی رفتار کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ تین گھوڑے ہم نقطہ خطوں پہ حرکت کر رہے ہیں۔

۱۳۔ دو نقطے نصف قطروں ا اور ب کے ہم مرکز دائرے ایسی رفتاروں سے مرتسم کرتے ہیں جو نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ اضافی رفتار اس خط کے متوازی ہے جو ان نقطوں کو ملاتا ہے جبکہ ان نقطوں سے کھینچے ہوئے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ

$$\text{جم}^{-1}\frac{\text{۲ اب}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}$$ ہو۔

۱۴۔ ایک پتھر کو ایک غبارے سے جو افقاً حرکت کر رہا ہے چھوڑا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ ۴ ثانیہ ہوا میں رہتا ہے اور زمین سے ایسی سمت میں ٹکراتا ہے جو انتصابی سے ۱۵ درجہ کا زاویہ بناتی ہے۔ غبارے کی رفتار معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک گولہ اوپر وار سمت میں افق کے ساتھ ۳۰ درجہ کے زاویہ پر (۲۵)
۶۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک مکان کی چھت سے پھینکا گیا ہے۔ پہلے اور دوسرے ثانیوں کے ختم پر اس کی حرکت کی سمتیں اور نیز اس کی رفتاریں معلوم کرو۔

۱۶ــ ایک گولہ ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہوا میں اُچھالا گیا اور ایک ثانیہ کے ختم پر معلوم ہوا کہ وہ اُچھال کی سمت کے علی القوائم خط میں حرکت کر رہا ہے اس لمحہ پر اُس کی رفتار کیا ہے ۔

۱۷ــ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ گولی کی رفتار ایک یکساں افقی رفتار ہے جو آواز کی رفتار کے ن گنے کے مساوی ہے تو ثابت کرو کہ وہ نقطے جن پر گولی کے فائر کرنے کی اور گولی کے نشانے پر لگنے کی آوازیں ایک ساتھ سُنائی دیتی ہیں خروج المرکز ن کے ایک قطع زائد پر واقع ہیں ۔ اُس صورت کا امتحان کرو جس میں ن اکائی کے تقریباً مساوی ہو ۔

۱۸ــ اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائری مدار میں ۲۹،۶ کیلومیٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتی ہے اور نور کی رفتار ..... کیلومیٹر فی ثانیہ ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی حرکت کی وجہ سے سورج کا ظاہری ہٹاؤ کیا ہے ۔

۱۹ــ اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائرہ کو ایک سال میں یکساں طور پر مرتسم کرتی ہے اور سورج اور زمین کے مرکزوں کے درمیان سورج کے ۲۲۰ نصف قطروں کا فاصلہ ہے اور سورج کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا ۱۰۸ گنا ہے تو زمین کے سایہ کے راس کی رفتار معلوم کرو اگر سورج کے نصف قطر کو طول کی اکائی اور ایک سال کو وقت کی اکائی فرض کیا جائے ۔

(۲۶)

دوسرا باب

قوت اور قوانین حرکت

قوانین نیوٹن

۱۷ — ہم قبل ازیں بیان کر چکے ہیں کہ قوانین حرکت وہ مواد ہے جسے تجربی علم الحیل نے نظری علم الحیل کے واسطے مہیا کیا ہے تاکہ اِس سے کام لیا جائے۔ نیوٹن نے اِن قوانین کو جامع شکل میں بیان کیا ہے۔

قانون اول — ہر جسم اپنی حالت سکون میں رہتا ہے یا ایک خطِ مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں تاآنکہ وہ قوت عاملہ سے اپنی حالت بدلنے پر مجبور ہو جائے۔

قانون دوم — معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اُس خط مستقیم کی سمت میں وقوع پذیر ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے۔

قانون سوم — ہر عمل کے جواب میں ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے۔

۱۸ — اِن قوانین میں مختلف نئی اصطلاحیں بیان ہوئی ہیں۔ قوت،

معیار حرکت، عمل، تعامل۔ اور ان قوانین کو پوری طرح سمجھنے کے لیے ان اصطلاحات کی صراحت ہونی چاہیئے۔

قانون اول میں حرکت کا تخیل اور نیز قوت کا تخیل داخل ہیں۔ اول الذکر پر بحث کی جا چکی ہے۔ ثانی الذکر پر بحث کرنی ہے۔

لفظ "قوت" عام طور پر استعمال میں آتا ہے۔ اِس لفظ سے سب سے اول اعصابی قوت کا خیال وابستہ ہے مثلاً ہم کسی پتھر کو راستہ سے ہٹانے میں قوت لگاتے ہیں لیکن علمی طور پر اس لفظ کے وسیع معنے ہیں مثلاً جب دو ریل کے ڈبے ٹکراتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے پر قوت لگاتے ہیں یا ہم کہتے ہیں کہ زمین تمام اجسام پر قوت لگاتی ہے جس کی باعث وہ زمین کی جانب گرتے ہیں اِلّا آنکہ وہ اِس طرح سہارے گئے ہوں کہ اس قوت کی مزاحمت کر سکیں۔

حرکت کا قانون اول فی الواقعی اس امر کی تصریح کرتا ہے کہ قوت سے کیا مراد ہے۔ قوت وہ ہے جو ایک جسم کی حالت سکون کو یا ایک خط مستقیم میں اِس کی یکساں حرکت کی حالت کو بدلتی ہے یا بدلنے کا میلان رکھتی ہے۔

مثلاً ریل کے ایک ڈبے پر غور کرو جو ہموار پٹڑیوں پر ساکن کھڑا ہے۔ (۲۰)
اگر ایک دوسرا ڈبہ آکر اِس سے لگے تو وہ حرکت کرنے لگیگا۔ اس لیے اِس پر قوت لگی ہے۔

لیکن قانون اول سے اِس سے کچھ زیادہ ہی کا اظہار ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک جسم کو قوتوں کے عمل سے آزاد رکھا جائے تو وہ اپنی حالت سکون میں یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں رہے گا۔ اِس لیے کسی جسم کی طبعی حالت یہ ہونی چاہیے کہ وہ ساکن رہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کرے یعنے اِس کی رفتار یکساں ہو۔ صرف قوت کی موجودگی ہی اِس طبعی حالت کو بدل سکتی ہے۔

ریل کے ڈبے کی صورت پر مکرر غور کرو۔ فرض کرو کہ ٹکر سے وہ حرکت میں

آچکا ہے اور دس میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ قانون اول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک اِس پر قوتیں عمل نہیں کرتیں وہ اُسی خط مستقیم میں جس میں وہ حرکت کرنا شروع کیا تھا دس میل فی گھنٹے کی غیر متغیر رفتار سے اپنی حرکت جاری رکھے گا لیکن جب ڈبہ ٹکر سے فی الواقعی حرکت میں آتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ وہ ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت جاری نہیں رکھے گا بلکہ جلد یا بدیر ساکن ہو جائے گا۔ اس لیے قوتیں عمل کرتی چاہئیں۔ اب ہم ان قوتوں کی نوعیت پر غور کریں گے۔

سب سے اول ہمیں ایک قوت پر غور کرنا ہوگا جو ہوا کی مزاحمت کے طور پر مشہور ہے ڈبے کے سامنے کی ہوا اس پر سمت مخالف سے اس طور پر دباؤ ڈالتی ہے کہ اس کی حرکت میں ابطا پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے ہوا ڈبے پر قوت لگاتی ہے عین ایسے ہی جیسے ایک شخص اپنے ہاتھ سے اِس کو سمت مخالف سے دبا کر قوت لگائے۔ صرف یہ قوت ہی ڈبے کو کسی نہ کسی وقت ٹھہرا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ بریک ڈال دیے گئے ہیں اور پہیئے اس قدر مضبوطی سے جکڑے ہوئے ہیں کہ وہ ڈبے کے لحاظ سے ساکن ہیں اور اس لیے وہ پٹڑیوں پر پھسلتے ہیں۔ اِس صورت میں ڈبے پر پٹڑیوں سے ایک بڑی قوت لگے گی اور یہ قوت بھی ڈبے کی حرکت کو روکنے کا میلان رکھے گی۔ اگر بریک نہ بھی ڈالے گئے ہوں اور پہیئے پھرنے میں آزاد ہوں تو بھی پٹڑیوں سے ایک قوت ڈبے پر لگے گی اگرچہ کہ یہ قوت پہلے کی بہ نسبت کمتر ہوگی۔

فرض کرو کہ راستہ سیدھا نہیں ہے بلکہ منحنی ہے۔ ہم تصور کر سکتے ہیں کہ حرکت کچھ وقت تک جاری رہے گی لیکن یہ حرکت اِس منحنی پر ہوگی اور وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہوگی جیسا کہ قانون اول کی بموجب ہوتی اگر قوت کا عمل نہ ہوتا۔ پس قوت لگی ہے، یہ قوت پٹڑیوں کی وہ قوت ہے جو پہیوں کے محیط سے نکلے ہوئے حصوں (کوروں) پر لگتی ہے اور جو ڈبے کو منحنی کے گرد موڑتی ہے۔ اگر یہ حصے نہ ہوتے تو یہ قوت عمل نہ کرتی اور حرکت ایک خط مستقیم میں جاری رہتی یعنے ڈبہ پٹڑیوں پر سے اتر جاتا۔

قانون اول کا مفہوم سمجھانے کے لیے ہم ایک اور مثال لیتے ہیں۔

فرض کرو ایک گولی بندوق سے فائر کی گئی ہے، اب ہم اس کی حرکت پر غور کریں گے۔
یہاں وہ قوتیں جو حرکت پیدا کرتی ہیں بارود کے دباؤ سے مہیا ہوتی ہیں۔
جب گولی بندوق سے نکل جاتی ہے تو یہ قوتیں ان قوتوں کے مقابلے میں
جو گولی پر عمل کرتی ہیں بہت بڑی ہوتی ہیں اس لئے گولی تقریباً ایک خط مستقیم میں (۲۸)
یکساں حرکت کرتی نظر آتی ہے۔ اس حرکت کو بدلنے کا میلان رکھنے والی قوتیں
دو ہیں ایک ہوا کی مزاحمت اور دوسری گولی کا وزن۔ ہوا کی مزاحمت جیسا کہ ہم
دیکھ چکے ہیں گولی کے پہلوؤں اور سروں پر دباؤ ڈالکر حرکت کو روکنے کا میلان
رکھتی ہے اور گولی کا وزن اس کو زمین کی طرف کھینچ کر لانا چاہتا ہے اور اس طرح
ایک خط مستقیم مرتسم کرنے کی بجائے گولی سے ایک ایسا راستہ مرتسم کراتا ہے
جو زمین کی جانب نیچے وار منحنی ہے۔

۱۹ — یہ تخیل کہ کسی جسم کی طبعی حالت ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت ہے
یا سکون ہے (جو یکساں حرکت کی وہ مخصوص صورت ہے جبکہ رفتار صفر ہو)
گیلیلو (۱۵۶۴ء تا ۱۶۴۲ء) سے منسوب کیا جاتا ہے۔ اس قانون کے
انکشاف کا دلچسپ ذکر "Mach's science of Mechanic's" کے باب دوم میں
یا "Cox's Mechanics" کے باب نہم میں ملے گا۔ گیلیلو سے بیشتر ارسطو کی
سند پر بالعموم یہ تسلیم کیا جاتا تھا کہ ہر جسم اک فطری مقام رکھتا ہے اور اس کی
طبعی حالت اس فطری مقام میں سکون کی حالت ہے۔ مثلاً یہ سمجھا جاتا تھا کہ
پتھر پانی میں ڈوبتا ہے اس وجہ سے نہیں کہ قوت جاذبہ اس پر عمل کرتی ہے
اور اس کو نیچے وار حرکت میں لاتی ہے بلکہ اس وجہ سے کہ اس کا فطری مقام
پانی کی تہ ہے۔ اسی طرح یہ سمجھا جاتا تھا کہ کاگ کا فطری مقام سطح آب ہے۔
چنانچہ جیرارڈ ۱۶۳۴ء میں کہتا ہے "لاکھوں[لہ] اجسام ہیں جن میں سے ہر ایک اپنی اپنی
جگہ پر ہے" اور جاذبہ ارض کی یہ تعریف کرتا ہے کہ یہ[لہ] "وہ قوت ہے جو ایک جسم
اپنے مزاحم پر لگاتا ہے تاکہ اپنے مقام پر واپس آجائے۔"

لہ "Millions de matiers, qui sont disposees chacunes en leurs lieux."

لہ 'la force qu'une matiere demonstre a son obstacle, pour retourner en son lieu."

پس گیلیلو سے پیشتر قوت کے اثر کو یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک جسم کو اس کے فطری مقام سے باہر رکھتی ہے۔ گیلیلو نے دیکھا کہ اجسام کے کوئی فطری مقامات نہیں ہیں بلکہ فطری حالتیں ہیں یعنے سکون کی یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی، اور قوت کا اثر کسی جسم کو اپنے فطری مقام سے حرکت دینے کا نہیں ہے بلکہ اس کی فطری حالت میں خلل انداز ہونے کا یعنی اس کی چال کو بدلنے کا۔ گیلیلو کا یہ انکشاف وہی ہے جو نیوٹن کے قانون اول سے ظاہر ہے۔

۲۰ ـــ یہ طے کرنے کے بعد کہ کسی جسم کی فطری حالت سے کیا مراد ہے اور نیز قوت سے کیا مراد ہے یعنے وہ جو فطری حالت کو بدلنے کا میلان رکھتی ہے ہم یہ دریافت کرینگے کہ وہ کونسا قانون ہے جو قوت کے پیدا کردہ اثر پر حکمران ہے۔ اگر ہمیں ایک قوت دی جائے تو یہ قوت ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی فطری حالت کو کس قدر بدلے گی۔ اس کا جواب قانون دوم میں ملے گا۔

قانون دوم۔ معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خطِ مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جسمیں قوت عمل کرتی ہے۔

پس قوت ایک خاص مقدار یعنے جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتی ہے اور یہ قوت اِس معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح کے متناسب ہوتی ہے۔

معیار حرکت سے مراد جسم کی رفتار اور اس کی کمیت کا حاصل ضرب ہے۔ کمیت مادے کی صرف وہ مقدار ہے جس سے جسم ترکیب پایا ہے اور اس لیے کمیت جسم کی حرکت پر منحصر نہیں ہوتی۔ پس

معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح = کمیت × رفتار کی تبدیلی کی شرح

= کمیت × اسراع،

حسب تعریف اسراع۔ اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ قوت دو مقداروں کے حاصل ضرب کے

متناسب ہوتی ہے، ایک جسم کی کمیت اور دوسری اس کا اسرا[ع] ۔

۲۱ — کمیت کی پیمائش ۔ اگر ہم کسی جسم کو اپنے ہاتھ [سے]
چھوڑ دیں تو اس جسم پر بالعموم دو قوتیں عمل کریں گی ۔ ایک
مزاحمت اور دوسری جسم کا وزن ۔ اگر ہم جسم کو خلا میں لٹکا[ئیں]
اور یہ انتظام رکھیں کہ جسم کو جس لمحے پر ہم چاہیں چھوڑ [دیں]
تو ہوا کی مزاحمت سے نجات ملے گی اور جسم پر عمل کر[نے والی]
قوت صرف اس کا وزن ہوگا ۔ اب اگر ہم کسی دو اجسام کو خلا می[ں ایک]
دوسرے کے برابر لٹکائیں اور ٹھیک ایک ہی لمحے پر انھیں چھوڑ د[یں تو]
معلوم ہوگا کہ وہ زمین کی جانب گرتے ہوئے پورے وقفے میں [ایک]
دوسرے کے برابر رہتے ہیں ۔ اس لیے کسی لمحہ پر ان کے اسرا[ع برابر]
ہوتے ہیں ۔

حرکت کے قانون دوم سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان اجسام پر عمل ک[رنے والی]
قوتیں ان کی کمیتوں کے متناسب ہیں ۔ یہ قوتیں جیسا کہ ہم دیکھ چ[کے ہیں]
اجسام کے صرف اوزان ہیں اور چونکہ یہ تجربی نتیجہ درست رہتا ہے
اجسام کوئی ہوں اس لیے حسب ذیل عام قانون حاصل ہوتا ہے:

اجسام کی کمیتیں ان کے اوزان کے متناسب ہوتی ہیں ۔

اس قانون سے ہم کسی دو جسموں کی کمیتوں کا مقابلہ کر سک[تے ہیں] (۴۰)
ہر ملک میں ایک خاص کمیت کو معیار کے طور پر منتخب کیا جاتا ہ[ے]
کسی دوسرے جسم کی کمیت کا اس معیار سے یا اس کی نقل سے
کیا جاتا ہے ۔ اور اس طریقہ سے ہم کسی جسم کی حقیقی کمیت کا علم
کرتے ہیں ۔ مثالاً جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک جسم کی کمیت ن
ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس کی کمیت (یا و[زن])
لندن میں رکھے ہوئے ایک خاص معیاری جسم کی کمیت (یا و[زن])

ن گنا ہے۔

۲۲۔ قوت کی پیمائش ۔ایک اکائی کمیت کا وزن وہ قوت ہے جسے ایک اکائی قوت کو تعبیر کرنے کے لیے اختیار کیا جا سکتا ہے اور ایسا کیا جائے تو تمام دیگر قوتوں کا مقابلہ اس قوت سے ہو سکتا ہے۔ شلاً م پونڈ وزن کی قوت سے ایسی قوت مراد ہو گی جو معیاری پونڈ کے وزن سے م گنی بڑی ہے۔

قوت کی یہ اکائی علمی نہیں ہے بلکہ سہولت بخش ہے، علمی اس وجہ سے نہیں کہ وہ بدلتی ہے جبکہ کمیت کو زمین کی سطح پر مقام بمقام لے جایا جاتا ہے چنانچہ ایک پونڈ کی کمیت کا وزن لندن میں واشنگٹن کی بہ نسبت زیادہ ہوگا، اس لیے اگر ایک پونڈ کے وزن کو قوت کی اکائی متصور کیا جائے تو ہمیں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ قوت کی یہ اکائی زمین کی سطح کے مختلف مقامات پر مختلف ہو گی اور لندن میں م پونڈ وزن کی قوت واشنگٹن میں م پونڈ وزن کی قوت سے مختلف ہو گی۔

یہی وجہ ہے کہ علمی مقاصد کے لیے قوت کی ایک دوسری اکائی بالعموم استعمال کی جاتی ہے۔ اس کو قوت کی مطلق اکائی کہتے ہیں اور وہ ایسی منتخب کی جاتی ہے کہ اس کا انحصار زمین کی سطح کے کسی مقام پر نہیں ہوتا۔ قوت کی اس دوسری اکائی کی تعریف یہ ہے کہ وہ اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے، برخلاف اس کے قوت کی قبل الذکر اکائی ایسا اسراع پیدا کرتی ہے جو اس نقطہ پر جاذبۂ ارض کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے۔ پس اگر جاذبہ ارض کی قیمت یعنے کسی جسم کا اسراع جبکہ جسم خلا میں آزادانہ گر رہا ہو ج ہو تو علمی اکائی مطلق اکائی کا ج گنا ہے۔

اگر اکائی قوت، اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرے تو قوت ق، کمیت ک میں اسراع $\frac{ق}{ک}$ پیدا کرے گی۔ اس لیے اسراع کو

ع سے تعبیر کیا جائے تو حسب ذیل بنیادی مساوات حاصل ہوگی :

ق = ک ع . . . . (۱۰)

(۳۱) یہ مساوات نیوٹن کے قانون دوم کو ریاضی کی زبان میں ادا کرتی ہے یہاں قوت ق کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کرنا چاہیئے ۔

۲۳ ـ قانون سوم ـ ہر عمل کے جواب میں ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے ۔

یہ عام مشاہدہ کی بات ہے کہ کوئی جسم ا کسی دوسرے جسم ب پر قوت نہیں لگا سکتا تا آنکہ ب بھی اسی وقت ا پر قوت نہ لگائے۔ مثلاً جب کوئی پہلوان لوہے کے ایک بڑے گولے کو پھینکتا ہے تو اُسے ہوشیار رہنا چاہیئے کہ کہیں گولہ اُسے نہ گرادے، جب وہ گولے پر قوت لگاتا ہے تو اس کے ساتھ ہی گولہ اُس پر قوت ڈالتا ہے اور اس لیے اُسے چاہیئے کہ اس قوت کے اثرات کا مقابلہ کرنے کے لیے تیار رہے۔ اسی طرح جب بندوق گولی پر قوت ڈال کر اسے فائر کرتی ہے تو گولی بھی بندوق پر قوت لگاتی ہے جس کا اظہار بندوق کے پیچھے ہٹنے سے یا دھکہ دینے سے ہوتا ہے ۔ پس تمام قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور انہیں بہ سہولت تمام عمل اور تعامل کہا جاسکتا ہے۔ حرکت کا قانون سوم یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایسی کوئی دو قوتیں مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہوتی ہیں ۔

قانون سوم کا مفہوم اُس تعامل کا امتحان کرنے پر معلوم ہوگا جو اُن قوتوں کے جواب میں ہیں جن کو ہم قبل ازیں تمثیلاً استعمال کرچکے ہیں پہلی مثال دو ریلوے ڈبوں کے درمیان ٹکر کی ہے۔ ڈبہ ا، ڈبہ ب سے ٹکراتا ہے جس کی وجہ سے ڈبہ ب پر قوت لگتی ہے اور وہ حرکت میں آتا ہے ۔ قانون سوم سے معلوم ہوتا ہے کہ ٹکر کے لمحہ پر ب کو ا پر قوت لگانی چاہیئے، یہ قوت مقدار میں اُس قوت کے مساوی ہوگی جو ا، ب پر لگاتا ہے

لیکن وہ سمت میں مخالف ہوگی۔ تعامل کی یہ قوت صرف ٹکر کے لمحہ میں عمل کریگی اور اس قوت کا نتیجہ ا کی رفتار کی تبدیلی کی صورت میں ظاہر ہوگا چنانچہ یہ قوت یا تو ا کی حرکت کو صرف روک دے گی اور اس لیے ا ٹکر کے بعد تخفیف شدہ رفتار سے آگے بڑھے گا یا وہ ا کی حرکت کو الٹا دے گی اور اس لیے ا،ب سے ٹکرانے کے بعد جس سمت سے آیا تھا اسی سمت میں واپس جائے گا۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب ب حرکت میں آچکتا ہے تو اس پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں :۔

(ا) ہوا کی مزاحمت،

(ب) پٹڑیوں کی رگڑ،

(ج) پہیئے کے کوروں پر پٹڑیوں کا دباؤ، جو ڈبہ کو منحنی کے گرد موڑتا ہے۔

وہ تعامل جو پہلی قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ اپنے سامنے اور قریب کی ہوا پر لگاتا ہے جس کی وجہ سے یہ ہوا اس سمت میں حرکت کرتی ہے جس میں ڈبہ متحرک ہے۔ فی الحقیقت یہی وہ قوت ہے جو اس فضا سے ہوا کو خارج کرتی ہے جو کسی لمحہ پر ڈبہ اختیار کرتا ہے۔

(۳۲) وہ تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے ساتھ پٹڑیوں کو بھی کھینچ کرلیجانے کا میلان رکھتی ہے۔ لیکن پٹڑیاں چونکہ استوار طور پر نیچے جکڑی ہوئی ہوتی ہیں اس لیے یہ قوت عملاً کوئی حرکت پیدا نہیں کرسکتی۔

وہ تعامل جو تیسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے پہیئوں کی کوریں منحنی کی بیرونی پٹڑی پر لگاتی ہیں۔ پٹڑیاں ان کوروں کو اس سمت میں دباتی ہیں جو منحنی کے مرکز کی جانب ہے اور اس لیے یہ کوریں پٹڑیوں کو اس منحنی کے مرکز سے پرے اور بیرونی جانب دباتی ہیں۔ اگر پٹڑیاں اچھی طرح ثابت نہ کی گئی ہوں تو یہ دباؤ انھیں متذکرۂ بالا سمت میں متحرک کرے گا، پٹڑیاں "پھیل" جائیں گی اور ڈبہ

پتھریوں سے اتر جائے گا۔

گولی کی مثال میں بھی گولی پر عمل کرنے والی تین قوتیں ہیں:

(ا) باروت کا دباؤ، گولی نالی سے نکلنے کے پیشتر،

(ب) ہوا کی مزاحمت، گولی کی پرواز کی اثناء میں،

(ج) گولی کا وزن جو اُسے نیچے وار زمین کی طرف کھینچتا ہے۔

وہ تعامل جو پہلی قوت سے کے متناظر ہے گولی کا وہ دباؤ ہے جو باروت کو پیچھے ڈھکیلتا ہے۔ یہ دباؤ اپنی باری پر بندوق پر منتقل ہوتا ہے جس سے بندوق کا دھکہ پیدا ہوتا ہے۔

وہ تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے ہوا کو حرکت میں لاتا ہے (جیسا کہ ہم ڈبہ کی صورت میں دیکھ چکے ہیں) اور گولی کے لیے راستہ بناتا ہے اور اس ہوا میں حرکت پیدا کرتا ہے جو گولی کی پرواز کا ساتھ دیتی ہے۔

وہ تعامل جو تیسری قوت یعنے گولی کے وزن کے متناظر ہے زیادہ دلچسپ ہے کیونکہ اس کے وجود کے متعلق کوئی راست شہادت حاصل نہیں ہو سکتی۔ ہم فطرت کی یکسانیت کے اصول سے ہی یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ چونکہ ہر اُس صورت میں جو کبھی آزمائی جا چکی ہے عمل کے ساتھ ہمیشہ ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے اس لیے اس صورت میں بھی جو مشابہ ہے لیکن اسے آزمایا نہیں جا سکتا ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عمل کے ساتھ مساوی اور مخالف تعامل ہے۔

وہ قوت جس کا ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں گولی کا وزن ہے جو اُسے زمین کی جانب کھینچتا ہے۔ یہ قوت یقیناً اُس قوت کو تعبیر کرتی ہے جو زمین خود گولی پر لگاتی ہے یعنی قوت جاذبہ، اس قوت کے ساتھ اس کا تعامل ہونا چاہئے۔ اس لیے گولی زمین پر ایک ایسی قوت سے عمل کرنی چاہیئے جو گولی کے وزن کے مساوی ہو، یہ قوت زمین کو اوپر وار گولی کی جانب کھینچے گی۔ گولی زمین پر جو قوت لگاتی ہے وہ قانون سوم کی رو سے عین اتنی ہی بڑی ہے جتنی زمین گولی پر لگاتی ہے۔ لیکن گولی کی وجہ سے زمین میں جو اوپر وار اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اُس نیچے وار اسراع سے بہت ہی کم ہے جو زمین گولی میں

پیدا کرتی ہے، کیونکہ قوت جس جسم پر عمل کرتی ہے اُس کی کمیت اور اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے اور چونکہ گولی کی کمیت کے مقابلہ میں زمین کی کمیت بہت بڑی ہے اس لیے زمین کا اسراع گولی کے اسراع کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہوگا۔

اگرچہ ان وجوہ کی بناء پر اُس اسراع کا راست مشاہدہ نہیں کیا جا سکتا جو زمین میں اِس کے اوپر متحرک گولی کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے تاہم بالکل اِس کے مشابہ ایک صورت ہے جس میں اس کا راست مشاہدہ ہو سکتا ہے۔

(۴۳) چاند پر جو زمین کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جاذبہ ارض بالکل اُسی طریقہ سے عمل کرتا ہے جس طریقہ سے وہ گولی پر کرتا ہے۔ اگر چاند پر کوئی قوت عمل نہ کرتی تو وہ ایک خط مستقیم مرتسم کرتا، لیکن واقعہ یہ ہے کہ وہ مسلسل زمین کی جانب جاذبہ کی اُسی قوت سے کھنچتا ہے جو گولی کو کھینچتی ہے۔ پس بالکل اُسی طرح زمین میں بھی چاند کی جانب اسراع پیدا ہونا چاہئیے۔ یہ اسراع ایسا ہے کہ اس کا مشاہدہ علم ہیئت کے ذریعہ کیا جا سکتا ہے۔

۲۴ — اُن خیالات کا لحاظ کرتے جن کی تفہیم اوپر کی جا چکی ہے حرکت کے متذکرہ تین قوانین کو مکرر شکل ذیل میں بیان کیا جا سکتا ہے:

۱ — کسی جسم کی طبعی حالت عدم اسراع کی ہوتی ہے۔ اِس طبعی حالت سے گریز قوت کے عمل سے پیدا ہوتا ہے۔

۲ — جب کوئی قوت عمل کر کے ایک جسم کی طبعی حالت میں خلل ڈالتی ہے تو یہ قوت جسم کی کمیت اور پیدا شدہ اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

۳ — قوتیں جوڑوں میں واقع ہوتی ہیں، ہر عمل کے ساتھ ایک تعامل ہوتا ہے اور قوتوں کا ہر زوج مساوی اور مخالف ہوتا ہے

حوالے کا قیم

۲۵ — قوانین حرکت کے بیان کرنے میں ہم نے جسم کی حرکت کا ذکر حوالے کے اُس فریم کی تخصیص کئے بغیر کیا ہے جس کے لحاظ سے اِس حرکت کی پیمائش ہونی چاہئے۔ بالعموم حرکت کی پیمائش عمل میں زمین کی سطح کے لحاظ سے کی جاتی ہے۔ نیوٹن کو یقین تھا کہ ایک ایسے حوالے کے فریم کا تصور کرنا جو فضاء میں فی الواقعی ثابت ہو ممکن ہے، وہ تمام حرکت کو اِس فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنے کا مشورہ دیتا ہے۔ چنانچہ نیوٹن کے قوانین حرکت کا اطلاق اُس حرکت پر ہوتا ہے جو فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو حالانکہ تمام مسئلوں میں الّا اُن مسئلوں کے جو علم ہیئت سے متعلق ہیں ہمیں اُن قوانین حرکت کے جاننے کی ضرورت ہے جو زمین کے ساتھ حرکت کرنے والے محوروں کے حوالے سے بیان کئے گئے ہوں۔

اول ہم یہ معلوم کریں گے کہ حرکت کو اُن محوروں کے ایک جٹ کے حوالہ سے بیان کرنے کا کیا اثر ہوگا جو فضاء میں یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک جسم جو کسی قوتوں کے زیر عمل نہ ہو فضاء میں کوئی اسراع نہیں رکھیگا اور اس لیے وہ متحرک محوروں کے لحاظ سے کوئی اسراع نہیں رکھیگا کیونکہ خود محاور فضاء میں اسراع نہیں رکھتے۔ نیز کسی اسراع کی وہی قیمت ہوگی خواہ اُس کا
حوالہ فضاء کے ثابت محوروں سے دیا جائے یا متحرک محوروں سے، (۳۴)
کیونکہ وہ اسراع جو متحرک محوروں کے حوالے سے پیمائش کیا گیا ہو حاصل ہوگا اگر ہم فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کو فضاء کے متحرک محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کے ساتھ مرکب کریں لیکن یہ آخری اسراع صفر ہے

پس یہ معلوم ہوا کہ قوانین حرکت ٹھیک وہی شکل رکھتے ہیں جبکہ حرکت اُن محوروں کے حوالے سے بیان کی گئی ہو جو فضاء میں

حرکت کرتے ہیں بشرطیکہ یہ محور عدم اسراع کے ساتھ حرکت کریں۔

عدم اسراع کی یہ شرط اُن محوروں کے جٹ سے پوری نہیں ہوتی جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں۔ زمین کی سطح کا کوئی نقطہ زمین کی گردش کی وجہ سے اس کے محور کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اگر اس دائرہ کا نصف قطر ا ہو اور و وہ رفتار ہو جس سے یہ دائرہ مرتسم ہوا ہے تو نقطہ کا اسراع زمین کے محور کی جانب حسب دفعہ ۱۱، و²/ا ہوگا۔

اس لیے محوروں کے کسی جٹ کا اسراع جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں و²/ا ہوگا اور قوانین حرکت کے اطلاق میں اس کا خیال رکھنا ہوگا۔ خط استواء کے کسی نقطہ پر و = ۴۶۵۱۰ سینٹی میتر فی ثانیہ اور ا = ۶٫۳۷ × ۱۰^۶ سینٹی میتر، اس لیے اسراع = و²/ا = ۳٫۴ سینٹی میتر فی ثانیہ فی ثانیہ۔ اگر کسی جسم کو خط استواء پر گرایا جائے تو اس کا اسراع ۹۷۸٫۱ سینٹی میتر فی ثانیہ فی ثانیہ معلوم ہوگا جبکہ حرکت کا حوالہ زمین کے ثابت محوروں سے دیا جائے، لیکن اس کے اصلی اسراع کی مقدار

۹۷۸٫۱ + ۳٫۴ = ۹۸۱٫۵

ہوگی جبکہ حرکت کا حوالہ فضاء کے ثابت محوروں سے دیا جائے۔

اس سے اُس علت کے ایک جزو کی صراحت ہوتی ہے کہ کیوں جاذبہ ارض زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ متغیر نظر آتا ہے۔ ایک کیلوگرام کی کمیت کا وزن قطب شمالی پر پیچ دار ترازو کے پیچ کو ایک خاص طول تک کھینچیگا۔ اگر اس ترازو کو خط استواء پر منتقل کیا جائے تو وزن کا ایک حصہ، زمین کے مرکز کی جانب کمیت کا جو اسراع ہے اس کے پیدا کرنے میں صرف ہوگا اور صرف بقیہ حصہ ہی پیچ کو کھینچنے میں کام آئے گا۔ پہلا حصہ تقریبًا ۳ ½ گرام کا وزن ہے

اور دوسرا تقریباً ۹۹۶ ۱/۲ گرام کا وزن۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ زمین کے مرکز کی جانب زمین کی سطح کا جو اسراع ہے اُس کی وجہ سے خط استوا پر ایک کیلوگرام کی کمیت پیچ دار ترازو پر ایک ایسی قوت سے عمل کرتی معلوم ہو گی جو صرف ۹۹۶ ۱/۲ گرام پر زمین کی کشش کے مساوی ہو گی۔ (۳۵)

حرکت کا حوالہ زمین کی سطح پر کے محوروں کے ذریعہ دینے میں خطاؤں کا ایک اور حیثٔ داخل ہو گا، یہ خطائیں محوروں کی سمتوں میں تبدیلی ہونے سے پیدا ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر ہم قوانین حرکت کو استعمال کریں یہ فرض کر کے کہ وہ زمین کی سطح کے ثابت محوروں کے حوالہ سے درست ہیں اور ان کا اطلاق ایک پتھر کے گرنے پر کریں تو ہم دیکھیں گے کہ پتھر زمین کی سطح کے ایک ایسے نقطہ پر لگنا چاہئے جو انتصاباً اُس نقطے کے نیچے ہے جس سے وہ گرایا گیا ہے۔ اگر ہم زمین کی گردش کی رعایت رکھیں تو معلوم ہو گا کہ وہ نقطہ جس پر پتھر فی الواقعی ضرب لگاتا ہے اُس نقطہ کے کچھ مشرق میں ہونا چاہیئے جو انتصاباً اُس نقطے کے نیچے ہے جہاں سے وہ چلا تھا۔

اگر زمین پر کی حرکت کو وہ حرکت سمجھ کر استعمال کیا جائے جو فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو تو اس کی وجہ سے جو خطائیں داخل ہوں گی وہ بالعموم یا تو بہت ہی چھوٹی ہوتی ہیں یا بہت آسانی سے درست کی جا سکتی ہیں۔ اس لیے ہم ایسی خطاؤں کو فی الحال بالکل نظر انداز کر کے آگے بڑھیں گے اور حرکت پر قوانین حرکت کا اطلاق زمین کی سطح کے حوالے سے کرینگے۔

قوانین حرکت صرف ایک ذرہ کی حرکت پر اطلاق پذیر ہیں

۲۶ ــ قوانین نیوٹن کی تکمیل میں ایک اور قید ہے جسے یہاں سمجھ لینا

چاہئے ۔ قانون دوم سے شاید ہم یہ فرض کریں کہ کسی جسم پر عمل کرنے والی قوت اور جسم کی کمیت کا علم ہو جانے سے ہم جسم کا ایک معین اسراع اخذ کر سکتے ہیں۔ اگر جسم محدود جثے کا ہے تو اس کے مختلف نقطوں پر اسراع مختلف ہوگا، مثلاً ہم دیکھ چکے ہیں کہ زمین کی گردش کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ خط استوا پر کے ایک نقطہ کا اسراع قطب شمالی پر کے ایک نقطہ کے اسراع سے مختلف ہوتا ہے۔ پھر وہ کونسا اسراع ہے جو قانون دوم سے متعین ہوتا ہے؟

اس مشکل کا جواب یہ ہے کہ قانون دوم کو صرف ذرات پر یعنے مادے کے اس قدر چھوٹے ٹکڑوں پر اطلاق پذیر سمجھنا چاہئے جنہیں نقطے سمجھا جا سکتا ہے۔ ایک متحرک ذرہ کا ایک واحد معین اسراع ہوگا عین ایسے ہی جیسے ایک متحرک نقطہ کا ہوتا ہے۔ اس قانون کو (۳۶) ذروں پر استعمال کر کے ہم وہ قوانین اخذ کر سکیں گے جو محدود جثے کے اجسام پر اطلاق پذیر ہیں ۔ اس مسئلہ پر کسی آئندہ باب میں بحث کی جائے گی۔ لیکن جہاں یہ ظاہر ہے کہ اس قانون کو سختی کے ساتھ ذروں پر استعمال کرنا چاہئے وہاں یہ بھی ظاہر ہے کہ بہت سے ایسے مسئلے ہو سکتے ہیں جن میں ہم محدود جثوں کے اجسام کو ذروں کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں اور اس سے کوئی قابل قدر خطا پیدا نہیں ہوگی۔ ایسی صورت پیدا ہوئی تھی جب ہم نے دفعہ ۱۸ میں بندوق کی گولی پر بحث کی تھی، گولی کے جثے کی بحث اثنائے سوال میں پیدا ہی نہیں ہوئی کیونکہ ہم گولی کے تمام نقطوں کا ایک ہی اسراع تصور کر سکتے ہیں۔ اسی طرح بہت سی صورتیں وقوع پذیر ہونگی جن میں ہم محدود جثے کے جسم کو اس طرح استعمال کریں گے گویا کہ وہ ایک ذرہ ہے۔ آئندہ باب میں ذروں پر اور ان اجسام پر قوتوں کے عمل سے بحث کی جائے گی جن کو ہم ذروں کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

(۲۷)

تیسرا باب

واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں

قوتوں کی ترکیب اور تحلیل

۲۷ — حرکت کے قانون دوم سے ہم وہ اسراع معلوم کرسکتے ہیں جو پیدا ہوتا ہے جبکہ معلومہ کمیت کے ایک ذرہ پر ایک معلومہ قوت عمل کرتی ہے۔

مثلاً بندوق کی گولی کی پرواز پر غور کرو جو دفعہ ۱۸ میں زیر بحث آچکی ہے۔ جب تک گولی ہوا میں رہتی ہے اس پر دو قوتیں ایک ساتھ عمل کرتی ہیں، ایک گولی کا وزن اور دوسری ہوا کی مزاحمت۔ ان کے علاوہ باد مخالف چل سکتی ہے جو گولی پر ایک افقی دباؤ اس کی حرکت کی عمود وار سمت میں ڈالے گی۔ ہوا کی مزاحمت گولی کی حرکت میں ابطا پیدا کرتی ہے یعنی اس سمت کے خلاف اسراع پیدا کرتی ہے جس میں گولی حرکت کررہی ہے۔ گولی کا وزن اسے نیچے کھینچتا ہے یعنی زمین کی جانب اسراع پیدا کرتا ہے۔ باد مخالف گولی کو اس کے راستہ سے ہٹا دے گی یعنی اس سمت میں اسراع پیدا کرے گی جس میں وہ چل رہی ہے۔ پس ہم ان تین قوتوں کے متعلق یہ سمجھ سکتے ہیں کہ ہر ایک اپنا اپنا اسراع پیدا کررہی ہے۔ یہ تین اسراع حرکت کے قانون دوم سے جدا جدا محسوب ہو سکتے ہیں اور پھر ان تین

اسراعوں کو مرکب کر کے ہم گولی کا حاصل اسراع معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ حاصل اسراع ایک خاص واحد قوت سے پیدا کیا جا سکتا تھا اور اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ واحد قوت، اسراع پیدا شدہ کا لحاظ کرتے متذکرہ بالا تین مختلف قوتوں کے اجتماع کے معادل ہے یعنے یہ واحد قوت ان تین مختلف قوتوں کا حاصل ہے۔ اب ہم ان خیالات کو ریاضی کی ٹھیک شکل میں بیان کریں گے۔ اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ قوت، مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہے اور اس لیے اس کو ایک خط مستقیم سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ ہم ثابت کریں گے کہ قوتوں کو متوازی الاضلاع کے قانون کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔ (۳۸)
اس کو ثابت کر دینے کے بعد یہ نتیجہ نکلیگا کہ قوتیں سمتیاں ہیں اور انہیں ان عام قاعدوں کی بموجب تحلیل اور مرکب کیا جا سکتا ہے جو بیان کئے جا چکے ہیں۔

۲۸ ۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع ۔ مسئلہ ۔ اگر دو قوتیں مقدار اور سمت میں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر ہوں تو انکا حاصل اس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہو گا۔

فرض کرو کہ یہ دو قوتیں، اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ اب، اج سے وہ اسراع تعبیر ہوتے ہیں جو پیدا ہوتے اگر وہ کسی ذرہ پر جداگانہ عمل کرتیں۔ چونکہ حرکت کے قانون دوم کی رو سے اسراع قوت کے متناسب ہوتا ہے اس لیے

اب : اج = اب : اج

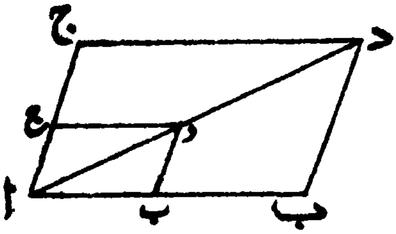
متوازی الاضلاع اب ج د اور اب ج د بناؤ۔

اُس تناسب کی وجہ سے جو اوپر ابھی حاصل ہو چکا ہے یہ دو متوازی الاضلاع متشابہ ہوں گے اور اس لیے اد ایک خط مستقیم

ہوگا اور حاصل ہوگا

اد : اد = اب : اب

لیکن اد جو کناروں اب، اج کے متوازی الاضلاع کا وتر ہے حاصل اسراع کو تعبیر کرتا ہے۔ اب چونکہ اب اُس قوت کو تعبیر



شکل (۱۵)

کرتا ہے جو اسراع اب پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے اس لیے محصلہ بالا تناسب سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اد، اُس قوت کو تعبیر کرے گا جو اسراع اد پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے۔ بہ الفاظ دیگر ذرہ کا اسراع وہی ہے جو ہوتا اگر اس پر ایک واحد قوت جو اد سے تعبیر ہوتی ہے عمل کرتی۔ اس لیے قوتوں اب، اج کے حاصل کو اد تعبیر کرتا ہے۔

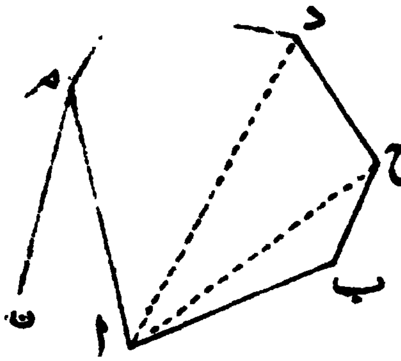
اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوت ایک سمتی ہے اور اس لیے قوتیں اُن قوانین کی بموجب جو دفعات ۱۴ تا ۱۶ میں بیان کئے جا چکے ہیں مرکب کیجا سکتی ہیں۔

ذرہ توازن میں

۲۹ ۔ سکونیات میں ہمیں صرف ساکن ذرات یا ساکن ذرات کے نظامات سے بحث کرنی ہوتی ہے۔ اس لیے ہر ذرہ پر حاصل قوت صفر ہونی چاہیئے۔ اس لیے اُن صورتوں پر غور کرنا اہم ہے جن میں قوتوں کے کسی نظام کا حاصل صفر ہوا کرتا ہے۔

۳۰ ۔ قوتوں کا کثیر الاضلاع مسئلہ۔ اگر ایک ذرہ پر عمل کرنیوالی قوتیں (۳۹)
خطوط مستقیم سے تعبیر کیگئی ہوں تو یہ قوتیں توازن میں ہونگی اگر وہ کثیر الاضلاع جو ان تمام

قیم کو کناروں کے طور پر لینے سے بنے ایک بند کثیر الاضلاع ہو یعنی اگر ان تمام ستقیم کو سرا بہ سرا رکھنے کے بعد ہم ابتدائی نقطہ پر واپس لوٹ آئیں۔



شکل (۱۶)

فرض کرو کہ قوتوں کی کوئی تعداد جو ایک ساتھ ذرہ پر عمل کرتی ہیں خطوط مستقیم اب، ج، ج د، ... م ن سے تعبیر کی گئی ہیں۔ قوت ایک سمتی ہے اسلیے وہ قوتیں جو ب اور ب ج سے تعبیر ہوتی ہیں ایک وت کے مماثل ہیں جو اج سے تعبیر ہوتی ہے لئے ان دو قوتوں کی بجائے یہ قوت رکھی جا سکتی ہے۔

اس لیے قوتوں کا دیا ہوا نظام اب اُن قوتوں کا نظام سمجھا جا سکتا ، جو خطوط مستقیم اج، ج د، ..... م ن سے تعبیر ہوتی ہیں۔ ان میں سے پہلی دو قوتوں کی بجائے ایک واحد قوت جو اد سے یر ہوتی ہے رکھی جا سکتی ہے اور قوتوں کا دیا ہوا نظام اُن قوتوں ں تحویل ہوتا ہے جو اد، د ع، ... م ن سے تعبیر ہوتی ہیں ی طرح ہم اس عمل کو جاری رکھ سکتے ہیں تاآنکہ ہم اُس واحد قوت پر ج جائیں جو ان سے تعبیر ہوتی ہے۔ اس لیے یہ قوت تمام قوتوں حاصل کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر کثیر الاضلاع ایک بند کثیر الاضلاع ہے تو نقطے ا اور ن بق ہوں گے اور اس لیے حاصل قوت جو ان سے تعبیر ہوتی ، معدوم ہو گی اور ذرہ توازن میں ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ذرہ زن میں ہو تو ان معدوم ہو گا اور اس لیے کثیر الاضلاع ایک د کثیر الاضلاع ہو گا۔

پس توازن کی وہ شرط جو ثابت شدہ مسئلہ میں مندرج ہے روری اور کافی ہے۔ ضروری اس وجہ سے کہ یہ شرط پوری

ہونی چاہیے اگر ذرہ کو توازن میں ہونا ہے اور کافی اس وجہ سے کہ توازن کا یقین ہو جاتا ہے جوں ہی یہ شرط پوری ہو جاتی ہے۔

۳۱ — قوتوں کا مثلث — اگر صرف تین قوتیں ہوں تو مسئلہ بالا ایک سادہ تر مسئلہ میں تحویل ہوتا ہے، یہ مسئلہ قوتوں کے مثلث کے طور پر مشہور ہے اور حسب ذیل ہے:

مسئلہ — اگر ایک ذرہ پر تین قوتیں جو خطوط مستقیم سے تعبیر کیگئی ہوں عمل کریں تو ذرہ توازن میں ہوگا اگر یہ تین خطوط مستقیم ایک مثلث کے اضلاع بنیں جبکہ انہیں سرا بہ سرا رکھا جائے۔

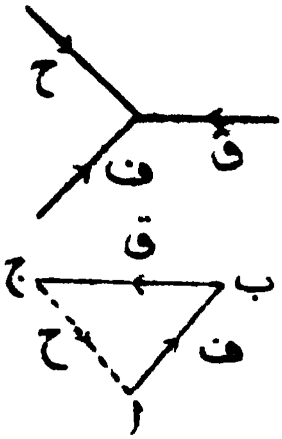
(۴۰) یہ مسئلہ چونکہ قوتوں کے کثیر الاضلاع کی ایک مخصوص صورت ہے اس لیے کسی جداگانہ ثبوت کی ضرورت نہیں ہے۔ حسب سابق اس کا عکس بھی درست ہے، اس لیے مسئلہ میں بیان کی ہوئی شرط توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے۔

جب صرف تین قوتیں عمل کر رہی ہوں تو توازن کی شرط کو اس سے بھی زیادہ سادہ شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۳۲ — لامی کا مسئلہ — جب ایک ذرہ تین قوتوں کے زیر عمل ہو تو توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ یہ تین قوتیں ایک مستوی میں ہوں اور ہر ایک قوت اس زاویہ کی جیب کے متناسب ہو جو دوسری دو قوتوں کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ تین قوتوں ف، ق، ح کے زیر عمل ہے۔

ن کے لیے ضروری اور
رط یہ ہے کہ ہم تین خطوں
باادسمت میں قوتوں
ق، ح کو تعبیر کریں
ر ملکر ایک مثلث بنا سکیں۔
رض کرو کہ اب، قوت
و تعبیر کرتا ہے۔ اس کے
ب پر ایک خط ب ج
ق کو تعبیر کرے لگاؤ۔
ے ج ا سے قوت ح



شکل (۱۴)

نی چاہئے اگر توازن کی شرطوں کو پورا ہونا ہے۔ اِس لیے یہ تین ایک مستوی میں ہونی چاہئیں یعنے اُس مستوی میں جو قوتوں ہ عمل میں سے گذرے اور ا ب ج کے متوازی ہو۔

مان لو کہ توازن ہے تو تین قوتیں مثلث ا ب ج کے اضلاع یر ہوں گی۔ فرض کرو کہ اِس مثلث کے اضلاع حسب معمول ، ج سے اور زاوئے ا، ب، ج سے تعبیر کئے گئے ہیں۔ تب کی ایک معلومہ خاصیت کی رو سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب ج}}$$

لیکن ہمارے عمل کی بموجب ا، ب، ج، قوتوں کی مقداروں اسب ہیں، اس لیے

$$\frac{\text{ج}}{\text{ف}} = \frac{\text{ب}}{\text{ح}} = \frac{\text{ا}}{\text{ق}}$$

لیے

$$\frac{\text{ف}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{ق}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ح}}{\text{جب ب}}$$

اگر (ف ق) سے وہ زاویہ تعبیر کیا جائے جو قوتوں ف اور ق (۲۱)
کے خطوط عمل کے درمیان ہے تو (ف ق) = π - ب ' اس لیے
جب ب = جب (ف ق) اور اس لیے

$$\frac{\text{ف}}{\text{جب (ق ح)}} = \frac{\text{ق}}{\text{جب (ح ف)}} = \frac{\text{ح}}{\text{جب (ف ق)}} \quad \dots\dots (۱۱)$$

اِس مسئلہ کا عکس درست ہے کیونکہ اگر ربط (۱۱) پورا ہو اور اگر قوتوں کے خطوط عمل ایک مستوی میں ہوں تو ہم ایک مثلث بنا سکتے ہیں جس کے اضلاع قوتوں ف ' ق ' ح کو تعبیر کرینگے اور اس لیے توازن ہوگا۔

۳۳ — توازن کے لیے تحلیلی شرطیں

۔اگر توازن کی شرطوں کو تحلیلی شکل میں بیان کیا جائے تو توازن کی شرط یہ ہے کہ تمام عاملہ قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہئیے۔ اگر قوتیں انفرادی طور پر معلوم ہوں تو حاصل قوت سمیتوں کو مرکب کرنے کے قاعدوں سے جو دفعات ۱۴ تا ۱۶ میں بیان ہو چکے ہیں فوراً معلوم کی جا سکتی ہے۔

اگر قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں عمل کرتی ہیں تو فرض کرو کہ اِن کی مقداریں $ح_۱$ ' $ح_۲$ ' ..... ' $ح_ن$ ہیں اور فرض کرو کہ اِن کے خطوط عمل محور لا کے ساتھ زاویے $صہ_۱$ ' $صہ_۲$ ' .... ' $صہ_ن$ بناتے ہیں۔ تب حاصل کے اجزائے ترکیبی لا ' ما ہوں گے جہاں (دیکھو دفعہ ۱۴)

$$\text{لا} = ح_۱ \text{ جم } صہ_۱ + ح_۲ \text{ جم } صہ_۲ + \dots\dots$$

$$\text{ما} = ح_۱ \text{ جب } صہ_۱ + ح_۲ \text{ جب } صہ_۲ + \dots\dots$$

حاصل کی مقدار $\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲}$ ہے اور وہ معدوم ہوگا صرف اگر لا اور ما جداگانہ معدوم ہوں۔ اس لیے توازن کے لیے شرط یہ ہے کہ

محوروں کے متوازی یہ اجزائے ترکیبی جداگانہ معدوم ہوں یعنی عمل کرنیوالی مختلف قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو جبکہ انہیں ہر ایک محور کے متوازی تحلیل کیا گیا ہو۔

اسی طرح جب قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں عمل نہیں کرتیں تو توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ تفصیل کے تین محوروں کی سمتوں میں ان قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعے جدا جدا معدوم ہوں۔

مثالیں

(۴۲) ۱۔ ۲ اور ۶ پونڈ وزن کی دو قوتیں دو سمتوں میں جو علی القوائم ہیں عمل کرتی ہیں، ان کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔

۲۔ تین قوتیں ہر ایک ف کے مساوی تین قائم محوروں پر عمل کرتی ہیں ان کا حاصل معلوم کرو۔

۳۔ دو قوتوں ف۱ اور ف۲ کا حاصل جہاں قوتیں علی القوائم عمل کررہی ہیں ح ہے۔ اگر ف۱ اور ف۲ میں سے ہر ایک میں ۳ پونڈ کا اضافہ کیا جائے تو ح میں ۴ پونڈ کا اضافہ ہوتا ہے اور اب وہ ف۱ اور ف۲ کی ابتدائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ ف۱ اور ف۲ کو معلوم کرو۔

۴۔ ایک نقطہ و پر عمل کرنے والی قوتیں و ا، و ب، و ج .... و ن سے تعبیر کی گئی ہیں۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطوں ا، ب، ج، ....، ن کا مرکز ہندسی و ہے۔

۵۔ ا ب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے۔ اُن قوتوں کا حاصل معلوم کرو جو اب، اج، اد، اع، اف سے تعبیر ہوتی ہیں۔

۶۔ ا ب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے۔ ثابت کرو کہ ان قوتوں کا حاصل جو اب، ۲ اج، ۳ اد، ۴ اع، ۵ اف سے تعبیر ہوتی ہیں $\sqrt{351} \times$ اب سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس حاصل کی سمت معلوم کرو۔

۷۔ اب ج ایک مثلث ہے اور ب ج میں کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر ن ق، اُن قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرے جو ان، ن ب، ب ج سے تعبیر ہوتی ہیں تو ثابت کرو کہ ق کا طریق، ب ج کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔

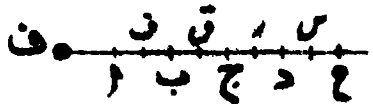
قوتوں کے نمونے

ذرہ کا وزن

۳۴ — کسی ذرہ کا وزن ہمیشہ انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے، کیونکہ زمین کی سطح پر کے کسی دئیے ہوئے مقام پر یہ معلوم ہوا ہے کہ تمام ذروں کے وزن متوازی سمتوں میں عمل کرتے ہیں اور یہ سمت زیر بحث مقام پر انتصابی کہلاتی ہے۔ وزن وہ تجاذبی قوت ہے جس سے زمین ذرہ کو کھینچتی ہے بجز ایک چھوٹی تصحیح کے جو اس واقعہ کی وجہ سے عائد کرنی ہوگی کہ وہ محور جو زمین میں ثابت ہیں بغیر اسراع کے حرکت نہیں کرتے۔ اس تصحیح پر ہم یہاں بحث نہیں کریں گے۔ جب کسی جسم کے وزن کو و کہا جاتا ہے تو اس کا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس جسم کو زمین کی سطح کے لحاظ سے ساکن رکھنے کے لیے ایک قوت ق کی ضرورت ہے جو انتصاباً اوپر وار عمل کرے۔

ڈوری کا تناؤ

۳۵ — کسی جسم پر قوت لگانے کا ایک آسان ذریعہ ڈوری یا رسی ہے اور اس قوت کو ڈوری کا تناؤ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ اب ج د...، ڈوری ہے اور فرض کرو کہ اس کے سرے پر ایک ذرہ ف بندھا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے حصے اب، ب ج، ... اس قدر چھوٹے ہیں کہ ہر ایک کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔



شکل (۱۸)

ڈوری کے کسی ذرہ مثلاً ب ج پر تین قوتیں عمل کریں گی،

(۱) اس کا وزن (۲) وہ قوت جو ڈوری کا ذرہ ج د، ذرہ ب ج پر لگاتا ہے اور (۳) وہ قوت جو ذرہ ا ب، ب ج پر لگاتا ہے۔

بالعموم کسی ڈوری کا وزن بمقابلہ دوسرے اوزان کے جو مسئلہ (۴۳)
میں شامل ہوتے ہیں بہت خفیف ہوتا ہے۔ اس لیے سہولت اس میں ہے کہ ڈوری کو ایسی سمجھیں کہ وہ وزن رکھتی ہی نہیں۔ اس صورت میں ذرہ ا ب پر صرف دو قوتیں عمل کرتی ہیں اور اس لیے توازن کے لیے یہ قوتیں مساوی اور مخالف ہونی چاہئیں۔

۳۶ — ملائمت۔ ڈوری کو ہم کامل طور پر ملائم اس وقت کہینگے جبکہ وہ قوت جو ایک ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر لگاتا ہے ان دو ذروں کو ملانے والی سمت میں ہو۔ مثلاً اگر زیر بحث ذرہ کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ہو تو ذرہ ب ج پر عمل کرنے والی قوتیں سمتوں ف ق، ق ر میں ہونگی۔ ب ج کو توازن میں رکھنے کے لیے یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہونی چاہئیں۔ فرض کرو کہ ہر ایک کی مقدار ت ہے۔ نیز یہ دو قوتیں مخالف سمتوں میں ہونی چاہئیں، اس لیے ف ق ر کو ایک خط مستقیم ہونا چاہئے۔

چونکہ تیسرے قانون کی رُو سے عمل اور تعامل مساوی اور مخالف ہوتے ہیں، اس لیے وہ قوت بھی جو ب ج، ج د پر لگاتا ہے سمت ق ر میں ت ہونی چاہئے۔ یہ پھر توازن کے لیے اُس قوت کے مساوی ہونی چاہئے جو د ع، ج د پر لگاتا ہے۔ اس لیے یہ قوت مقدار ت کی ہونی چاہئے اور ق ر س ایک خط مستقیم ہونا چاہئے۔

ہم اس استدلال کو جاری رکھ کر یہ معلوم کرتے ہیں کہ تمام ذرے ایک خط مستقیم ف ق ر س .... میں واقع ہونے چاہئیں اور یہ کہ ہر ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر ایک ہی قوت ت کے ساتھ ڈوری کی سمت میں عمل کرتا ہے۔ قوت ت کو تناؤ کہتے ہیں۔ پس

ڈوری کے کسی نقطہ ف پر تناؤ وہ قوت ہے جس سے ڈوری کا وہ ذرہ جو ف کی ایک جانب ہے اس ذرہ پر جو ف کی دوسری جانب ہے عمل کرتا ہے۔

کسی کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری کے ہر نقطہ پر تناؤ مقدار اور سمت میں وہی ہوتا ہے جبکہ ڈوری بیرونی قوتوں کے زیر عمل نہ ہو۔

اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

ایک کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری جبکہ اس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں ایک خط مستقیم میں ہونی چاہیئے جبکہ وہ توازن میں ہو۔

اگر تناؤ معدوم ہو تو خواہ طول ف ق، ق ر، .... کے عناصر کی سمتیں کچھ ہی ہوں توازن ہوگا۔ جب تناؤ معدوم ہوتا ہے تو ڈوری کو غیر تنی ہوئی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ غیر تنی ہوئی ڈوری کسی شکل میں بہ حالت توازن ساکن رہ سکتی ہے۔

(۴۴) آئندہ ثابت کیا جائیگا کہ جب ایک کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری ایک چکنی کھونٹی یا چرخی پر سے گذرتی ہے تو تناؤ کی مقدار ڈوری کے تمام نقطوں پر ایک ہی ہوتی ہے اور کھونٹی یا چرخی کے نقاط تماس پر اس کی سمت کھونٹی یا چرخی کے مماس کی سمت ہوتی ہے

۳۷ — اگر ڈوری مطلقاً غیر وزنی نہ ہو بلکہ بہت ہلکی ہو تو اس کے کسی ذرہ پر مثلاً ق پر تین قوتیں عمل کریں گی — اس کا وزن انتصاباً نیچے اور وہ دو قوتیں جن سے متصلہ ذرے سمتوں ف ق، ر ق میں عمل کرتے ہیں۔ لامی کے

مسئلہ سے ہر قوت اُس زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہیئے جو باقی دو قوتوں کے درمیان ہے۔ چونکہ وزن چھوٹا ہے اس لیے جب ف ق ر کو چھوٹا ہونا چاہیئے یعنے ف ق ر کو قریب قریب ایک خط مستقیم ہونا چاہیئے۔ تاہم یہ



شکل (۱۹)

خط کا ملا سیدھا نہیں ہو سکتا الا آنکہ ڈوری مطلقاً بے وزن ہو۔ اس لیے کسی حقیقی ڈوری میں اِس کے وزن کی وجہ سے کچھ نہ کچھ "جھوک" ہوگا، اگرچہ یہ جھوک اس قدر خفیف ہو سکتا ہے کہ اِس کی شناخت نہ ہو سکے۔

۳۸ — استداد پذیر اور نا استداد پذیر ڈوریاں — تناؤ جیسا کہ معلوم

ہو چکا ہوگا ایک قوت ہے جو ڈوری کے ہر نقطہ پر عمل کرتی ہے اور ڈوری کو اِس کے طول کی سمت میں وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے۔ ہو سکتا ہے کہ ڈوری وسیع کرنے کے اِس میلان کو قبول کرے یا نہ کرے۔ وہ ڈوری جو تناؤ کے تحت وسیع ہوتی ہے استداد پذیر کہلاتی ہے اور وہ ڈوری جو بالکل وسیع نہیں ہوتی یا ہوتی بھی ہے تو اِس قدر کم کہ توسیع کی مقدار ناقابل قدر ہے نا استداد پذیر کہلاتی ہے۔

اِس لئے کوئی نا استداد ڈوری ایک ہی طول کی رہتی ہے خواہ کچھ ہی تناؤ اُس پر عمل کرے، برخلاف اس کے کسی استداد پذیر ڈوری کا طول اِسکے تناؤ پر منحصر ہوتا ہے۔

سنہ ۱۶۶۰ء میں ہُک نے ایک قانون دریافت کیا تھا جس سے وہ ربط معلوم ہوتا ہے جو ایک ڈوری کے تناؤ اور اِس کی توسیع کی مقدار کے درمیان پایا جاتا ہے، تناؤ توسیع کی مقدار کے متناسب ہوتا ہے۔

تعریف — کسی ڈوری کا وہ طول جبکہ تناؤ صفر ہو ڈوری کا

فطری طول" کہلاتا ہے۔

تعریف۔ ایک وسیع شدہ ڈوری کا طول جسقدر اِس کے فطری طول سے تجاوز کرتا ہے اِس کو ڈوری کی "توسیع" کہتے ہیں۔

ہُک کا قانون۔ ڈوری کا تناؤ توسیع کے متناسب ہوتا ہے۔

(۴۵) اگرچہ ہُک نے اِس قانون کو سنہ ۱۶۶۰ء میں دریافت کر لیا تھا لیکن اُس نے اِس کی اشاعت سنہ ۱۶۷۶ء تک نہیں کی اور اُس وقت بھی اِس کو ایک حرفی معمہ (ceiinosssttuv) کی شکل میں پیش کیا۔

سنہ ۱۶۷۸ء میں اُس نے سمجھایا کہ اِس حرفی معمہ کے حروف لاطینی الفاظ "ut tenso sic vis" کے حروف ہیں ــــ "کسی پیچ کی طاقت اور اِس کے تناؤ میں ایک ہی تناسب رہتا ہے"۔ تناؤ (tenso) سے ہُک کا مطلب وہ مقدار ہے جسے ہم نے "توسیع" کہا ہے اور طاقت (vis) سے وہ قوت مراد ہے جو پیچ کو وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے یعنی تناؤ۔

۳۹ ــ ہُک کے قانون سے ہم صرف اُن توسیعات کا مقابلہ کر سکتے ہیں جو مختلف تناؤں سے پیدا ہوتی ہیں۔ کسی دئیے ہوئے تناؤ سے پیدا شدہ حقیقی توسیع معلوم کرنے کے لیے ہمیں کسی دوسرے تناؤ سے پیدا شدہ توسیع معلوم کرنی چاہیے تاکہ مقابلہ ہو سکے۔

تعریف۔ وہ قوت جو ایک ڈوری کو اِس کے فطری طول کا دوچند کرنے میں مطلوب ہوتی ہے ڈوری کی لچک کا مقیاس کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر ایک ڈوری کا طول ا ہو اور لچک کا مقیاس لہ تو ہم جانتے ہیں کہ تناؤ لہ، توسیع ا پیدا کرتا ہے اور اس لیے تناؤ ت، توسیع $\frac{ت \cdot ا}{لہ}$ پیدا کرے گا۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ڈوری نا امتداد پذیر ہے تو اِس سے یہ مطلب ہوتا ہے کہ لہ اِس قدر بڑا ہے کہ توسیع $\frac{ت ا}{لہ}$ نظر انداز کی جا سکتی ہے۔

ہُک کا قانون صرف خاص حدود کے اندر درست رہتا ہے۔ اگر ہم کسی ڈوری کے تناؤ کو غیر معین طور پر بڑھاتے جائیں تو ہم دیکھیں گے کہ ایک خاص حد گذر جانے کے بعد ہُک کا قانون درست نہیں رہتا اور اِس سے بھی زیادہ ایک خاص تناؤ پر پہنچتے ہی ڈوری دو ٹکڑوں میں ٹوٹ جاتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک وزن و، ایک ڈوری سے لٹک رہا ہے، اسے ایک جانب ایک افقی قوت سے کھینچا گیا ہے تا آنکہ ڈوری انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔ افقی قوت اور ڈوری کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک وزن کو جو ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہے ایک افقی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے جیسے اُسے سکون کے محل سے (جس میں ڈوری انتصابی ہوتی ہے) بعید تر کھینچا جاتا ہے ڈوری کا تناؤ مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔

۳۔ ۱۰۰ پونڈ کا ایک وزن دو ڈوریوں سے جو انتصابی کے ساتھ ۳۰° کے زاوئے بناتی ہیں لٹکایا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۴۔ ۳۰ پونڈ کا ایک وزن دو امتداد پذیر ڈوریوں سے بندھا ہے، ڈوریوں کا فطری طول ۲ فٹ ہے، لچک کا مقیاس ۱۰۰ پونڈ ہے اور ڈوریوں کے دوسرے سرے دو نقطوں سے بندھے ہیں جو ایک دوسرے سے ۴ فٹ کے افقی فاصلے پر ہیں۔ وہ محل معلوم کرو جس میں وزن توازن میں ساکن رہ سکتا ہے۔

۵۔ ایک وزن و، طول ل کے تین مساوی ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے، ڈوریوں کے دوسرے سرے تین نقطوں سے بندھے ہیں جو ضلع ا کے ایک

انکی متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔ (۴۶

دو اجسام کے درمیان تعامل

۴۰۔ ایک اور طریقہ جس سے قوت ایک ذرہ پر لگائی جا سکتی ہے، اس دباؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے جو ذرہ اور ایک ٹھوس جسم کے درمیان ہوتا ہے۔ ایسی قوت کو بالعموم تعامل کہتے ہیں۔

مثلاً وہ جسم جو ایک کمرہ کے فرش پر ایستادہ ہے اپنے وزن کے زیر عمل ہے جو نیچے وار عمل کرتا ہے لیکن وہ ایک دوسری قوت کے عمل کی وجہ سے جو فرش سے اوپر وار عمل کرتی ہے ساکن رہتا ہے، یہ قوت جسم اور فرش کے درمیان تعامل ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ جسم کو سکون کی حالت میں متوازن رکھنے کے لئے تعامل کو جسم کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے اور اسے انتصاباً عمل کرنا چاہئے۔

رگڑ

۴۱۔ فرض کرو کہ ایک چھوٹا جسم ایک ایسے مستوی پر پڑا ہے جس کا ڈھال تغیر پذیر ہو سکتا ہے مثلاً ڈیسک کے ڈھکن کی سطح مستوی۔ اگر اس مستوی کو افقاً پکڑا جائے تو جسم ساکن رہ سکتا ہے جیسا کہ قبل ازیں مذکور ہوا۔ اب مستوی کو بتدریج جھکاتے جاؤ تو معلوم ہوگا کہ جوں ہی جھکاؤ ایک خاص زاویہ پر پہنچتا ہے تو جسم مستوی پر نیچے وار پھسلنے لگتا ہے۔ وہ زاویہ جس پر جسم کے پھسلنے کی ابتدا ہوتی ہے اشیاء کے مختلف جوڑوں کے لیے مختلف معلوم ہوا ہے، مثلاً لکڑی لکڑی پر پھسلنے کے لیے یہ زاویہ ۱۰° سے ۲۵° تک متغیر ہو سکتا ہے، لوہا لکڑی پر پھسلنے کے لیے یہ زاویہ ۹° سے ۴۰° تک متغیر ہوتا ہے اور لوہا لوہے پر پھسلنے کے لیے وہ صرف ۱۰° یا ۱۵° ہے۔

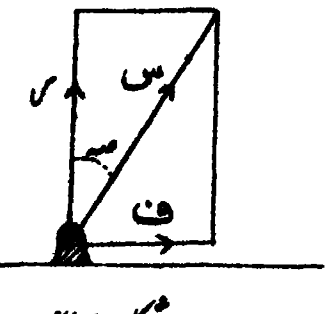
جب دو اشیا ایسی ہوں کہ یہ زاویہ صفر ہو۔ یعنی ایسی کہ ایک

دوسری پر صرف اُسوقت ہی ساکن رہ سکتی ہے جبکہ تماس کی سطح کاملاً افقی ہو تو ان کے درمیانی تماس کو **کامل طور پر چکنا** کہتے ہیں۔ کامل طور پر چکنے تماس کا قریب ترین تقریب جس کا تجربہ روزمرہ زندگی میں ہوتا ہے غالباً برف پر فولاد کا ہے مثلاً اسکیٹنگ میں۔

یہ معلوم ہوا ہے کہ وہ زاویہ جس تک ایک شئے سے بنی ہوئی مستوی سطح کو جھکانا پڑتا ہے تا آنکہ ایک دوسری شئے اس پر پھسلنے لگے دوسری شئے کی مقدار اور رقبہ تماس دونوں کے غیر تابع ہوتا ہے۔ یہ زاویہ زیر تماس دو اشیاء کی صرف نوعیت پر منحصر ہوتا ہے۔

نیز جب دو جسم کسی طریقہ پر باہم دبائے جاتے ہیں تو یہ معلوم ہوا ہے کہ تعامل کی سمت سطح فاصل کے عماد کے ساتھ کوئی زاویہ (ایک خاص انتہائی زاویہ کی حد تک) پھسلن کے وقوع کے بغیر بنا سکتی ہے لیکن جوں ہی یہ خاص زاویہ پہنچ جاتا ہے تو پھسلن واقع ہوتی ہے۔ اس زاویہ کو رگڑ کا زاویہ کہتے ہیں۔ صریحاً یہ وہی زاویہ ہے جس میں سے اُس مستوی کو جس کا ذکر اوپر آچکا ہے جھکایا جا سکتا ہے قبل اسکے کہ پھسلن واقع ہو کیونکہ مستوی کے عماد اور تعامل کی سمت کے درمیان جو زاویہ ہوتا ہے وہ صرف مستوی کا ڈھال ہے۔

۴۴ — کسی صورت میں جس میں کہ رگڑ کی قوتیں عمل کریں فرض کرو کہ تعامل کا عمادی جزو ترکیبی ر ہے اور فرض کرو کہ تماس کے مستوی میں وہ جزو ترکیبی ف ہے جو رگڑ سے پیدا ہوتا ہے۔ جب پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو تو حاصل کو عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہیے جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔



شکل (۲۰)

پس اگر پورا تعامل س سے تعبیر ہو تو

ر = س جم صہ ، ف = س جب صہ

اور اس لیے ف = ر مس صہ

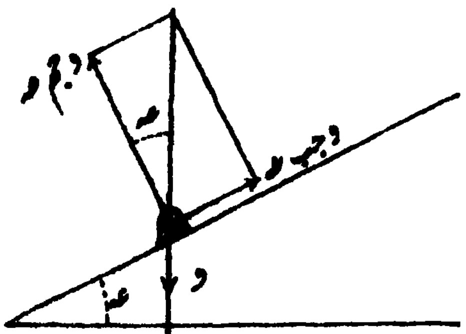
مقدار مس صہ کو رگڑ کی قدر کہتے ہیں اور اسے ایک واحد علامت مہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس لیے جب

پھسلن میں واقع ہونے کو ہو تو

$$ف = مہ ر$$

یہ صاف طور پر ذہن نشین ہونا چاہیے کہ اس مساوات سے رگڑ کی قوت کی ٹھیک قیمت حاصل ہوتی ہے **صرف اس وقت جبکہ پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو**۔ اس سے رگڑ کی قوت کی قیمت کی اوپر کی حد متعین ہوتی ہے۔ لیکن اس قوت کی حقیقی قیمت معلوم نہیں ہوتی جب تک کہ ہمیں یہ معلوم ہو کہ نظام پھسلنے کے عین موقع پر ہے۔

۴۳ — مثلاً اس تجربہ پر غور کرو جس کا ذکر اوپر کیا جا چکا ہے، اس میں ایک ذرہ ایک افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور مستوی کو بتدریج جھکایا جاتا ہے۔ جب مستوی افقی ہوتا ہے تو ذرہ ساکن رہتا ہے، اس پر صرف جاذبہ ارض اور مستوی کا تعامل عمل کرتے ہیں۔ اس لیے تعامل افقی ہے لہٰذا اس لیے ف = ۰۔ پھر اس نظام پر غور کرو جبکہ مستوی افق کے ساتھ زاویہ عہ بنائے۔ اگر پھسلن واقع نہیں ہوتی تو ذرہ، اپنے وزن و اور اس تعامل کے زیر عمل توازن میں رہے۔ جو ذرہ اور مستوی کے درمیان ہے۔ اس لیے تعامل میں ایک انتصابی قوت و شامل ہونی چاہیے۔ ہم اس تعامل کو دو اجزائے ترکیبی و جم عہ اور و جب عہ میں جو مستوی پر عمود اور اس کے متوازی ہیں تحلیل کر سکتے ہیں۔ قبل الذکر تعامل کا عمادی جزو ترکیبی ہے۔ اور موخر الذکر رگڑ کا جزو ترکیبی۔ اس لیے مستعملہ ترقیم میں



شکل (۲۱)

ر = و جم عہ

ف = و جب عہ

اس لیے اس صورت میں

ف = ر مس عہ

جیسے عہ بڑھتا ہے ف اور $\frac{ف}{ر}$ دونوں بڑھتے ہیں یہاں تک جب عہ،

قیمت مہ پر پہنچتا ہے تو $\frac{ف}{ر}$ اپنی انتہائی قیمت مہ پر پہنچتا ہے اور اسکے بعد پھسلن واقع ہوتی ہے ۔

مثالیں

۱ ـ ۱۰۰ پونڈ کی ایک کمیت ایک کھردرے مستوی پر رکھی ہوئی ہے، یہ کمیت عین حرکت کرنے کو ہوتی ہے جبکہ اس پر ایک قوت ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی افقی طور پر عمل کرتی ہے ۔ رگڑ کا زاویہ معلوم کرو ۔

۲ ـ ایک جسم ایک مائل سطح مستوی پر جو افق کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے رکھا ہوا ہے ۔ یہ جسم سطح کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہوتا ہے جبکہ اس پر ایک افقی قوت اس کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہے ۔ رگڑ کی قدر معلوم کرو ۔

۳ ـ ایک شخص جو ۲۰۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچنے کی قابلیت رکھتا ہے ایک افقی سڑک پر (رگڑ کی قدر $\frac{1}{3}$) ۸۰۰ پونڈ کی ایک کمیت گھسیٹنے کی کوشش کرتا ہے ۔ اس کی مدد کے لیے حمالہ کی زنجیر کمیت کے ساتھ باندھ دی گئی ہے، زنجیر انتصابا لٹک رہی ہے ۔ زنجیر میں کتنا تناؤ ہونا چاہیے کہ شخص کمیت کو عین حرکت دے سکے ۔

۴ ـ ایک کیڑا، نصف قطر ا کے ایک نیم کروی پیالے کی اندرونی سطح پر اوپر وار رینگنے کی کوشش کرتا ہے ۔ وہ کتنا اونچا چڑھ سکتا ہے اگر اس کے پاؤں اور پیالے کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ ہو ۔

۵ ـ ایک شخص برف پر پتھر کے ایک گنڈ کو دھکیلنے کی کوشش میں افقی طور پر قوت لگاتا ہے لیکن اُسے معلوم ہوتا ہے کہ جوں ہی پتھر حرکت کرنے لگتا ہے اس کے پاؤں پھسلنے لگتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر وہ اوپر وار پتھر کو دھکیلے تو وہ بغیر کسی مشکل کے پتھر کو متحرک کر سکتا ہے لیکن اگر وہ نیچے وار زور لگائے تو وہ اس کو شاید ہی ہلا سکے ۔

۶ ـ ایک چکنی چرخی ایک افقی مستوی کے کنارے رکھی ہوئی ہے ۔ اس پر سے

ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے ایک سرے پر وزن و آزادانہ لٹک رہا ہے اور
دوسرے سرے پر وزن و بندھا ہے جو مستوی پر ساکن ہے۔ اگر رگڑ کی قدر مہ (۲۹)
اس قدر بڑی ہو کہ حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی تو معلوم کرو کہ کس زاویہ میں سے مستوی کا
کو جھکانا چاہیے کہ حرکت عین واقع ہونے کو ہو۔

۷۔ کمیت ک کا ایک سیاح کمیت ک کے ایک رہنما سے رسی کے ذریعہ
بندھا ہوا ہے اور یہ دونوں ایک پہاڑ کے رُخ پر ہیں جسے ایک مقلوب نیم کرہ سمجھا
جا سکتا ہے۔ رسی کا طول پہاڑ کے مرکز پر زاویہ عہ بناتا ہے اور رسی پہاڑ کے
کسی نقطہ کو مس نہیں کرتی۔ اگر ان میں سے کسی شخص اور پہاڑ کے درمیان رگڑ کی
قدر مہ ہو تو معلوم کرو کہ پہاڑ کے رُخ پر نیچے کی جانب سیاح کتنی دور تک جانے کی
جرات کر سکتا ہے قبل اس کے کہ وہ اور رہنما دونوں پہاڑ کے دامن میں گر جائیں۔

توضیحی امثلہ

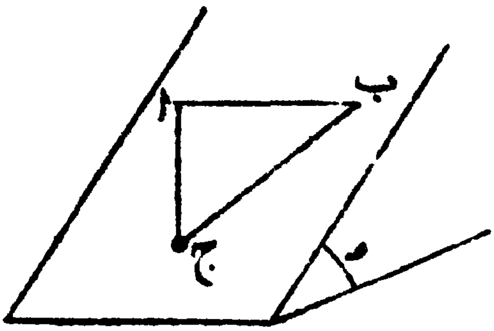
۱۔ ایک وزنی ذرہ ج ایک چکنے مائل مستوی پر دو ڈوریوں کے ذریعہ جنکے
طول ل۱، ل۲ ہیں اور جو مستوی کے نقطوں ا، ب کے ساتھ بندھی ہوئی ہیں ساکن
ہے، یہ نقطے ا، ب ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ
ف ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ اور وہ تعامل معلوم کرو جو مستوی اور ذرہ کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ذرہ کا وزن و ہے اور مستوی کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔
ذرہ حسب ذیل قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے:

(ا) اس کا وزن و جو انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے،

(ب) ذرہ اور مستوی کے درمیان تعامل۔ چونکہ مستوی چکنا ہے، یہ تعامل
مستوی کے عمود وار عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اس تعامل کی مقدار ر ہے۔

(ج) وہ دو تناؤ جن کی مقداریں مطلوب ہیں۔ فرض کرو کہ ان کی مقداریں
ت۱، ت۲ سے تعبیر ہوتی ہیں۔



شکل (۲۲)

چونکہ یہ چار قوتیں توازن پیدا کرتی ہیں اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے ڈوریوں کے تناؤ مستوی کے عمود وار کوئی اجزائے تحلیلی نہیں رکھتے، اس لیے قوتوں کو مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے ہمیں ایک ایسی مساوات ملے گی جس میں صرف دو قوتیں شامل ہونگی۔

وزن کا جزو تحلیلی مستوی کے عمود وار و جم عہ ہے۔ تعامل پورے کا پورا مستوی کے عمود وار ہے۔ اس لیے وہ مساوات جس کی ہمیں تلاش ہے

کا − و جم عہ = ۰

ہے۔ اس سے فوراً تعامل کی مقدار معلوم ہوتی ہے۔

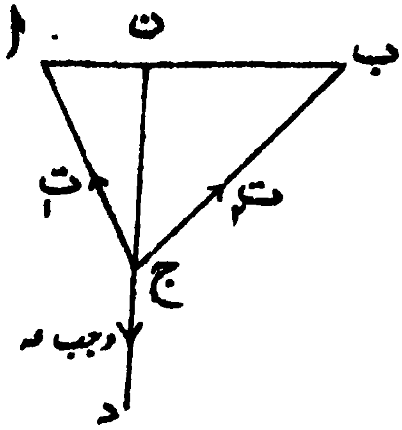
اب ہم مائل مستوی میں قوتوں کے اجزائے تحلیلی پر غور کریں گے۔ وہ قوتیں جن کے اجزائے ترکیبی اس مستوی میں ہیں صرف حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن جس کا جزو ترکیبی و جب عہ ہے اور خط میلان اعظم میں نیچے کی جانب عمل کرتا ہے۔

(ب) ڈوریوں کے تناؤ جو کاملاً مستوی میں ہیں اور جو ڈوریوں ج ا، ج ب کی سمت میں عمل کرتے ہیں۔

یہ تین قوتیں و جب عہ، ت۱ اور ت۲ توازن میں ہونی چاہئیں، (۵۰)
اس لیئے لامی کے مسئلہ کی رو سے ہر ایک، دوسری دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے۔

شکل (۲۳) میں ان تین قوتوں کے خطوط عمل ج د، ج ا، ج ب ہیں۔ خط ج د، ج میں سے گذرنے والا خط میلان اعظم ہونے کی وجہ سے خط ا ب کے علی القوائم ہے جو افقی ہے۔ پس اگر د ج کو بڑھایا جائے اور وہ ا ب سے ن پر ملے تو زاویہ ا ن ج قائمہ ہے۔ اس لیے



شکل (۲۴)

جب ا ج د = جب ا ج ن = جم ج ا ن

اور اسی طرح

جب ب ا ج د = جب ب ج ن = جم ج ب ا ن

شلامی کے مسئلہ سے

$$\frac{\text{و جب عہ}}{\text{جب ا ج ب}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{جب ب ج د}}$$

$$= \frac{\text{ت}_2}{\text{جب ا ج د}}$$

اُن رشتوں سے جو اوپر حاصل ہوئے ہیں اِن نسبتوں کو مثلث ا ب ج کے زاویوں کی رقوم میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{و جب عہ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{جم ب}} = \frac{\text{ت}_2}{\text{جم ا}}$$

اب اگر ہم ضرورت سمجھیں تو جم ا، جم ب اور جب ج کو مثلث کے ضلعوں ل۱، ل۲ اور ف کی رقوم میں علم مثلث کے معمولی ضابطوں کی مدد سے بیان کر سکتے ہیں۔

طالب علم بطور خود اُس شکل کا امتحان کرے جو نتیجۂ بالا حسب ذیل دو خاص صورتوں میں اختیار کرتا ہے:

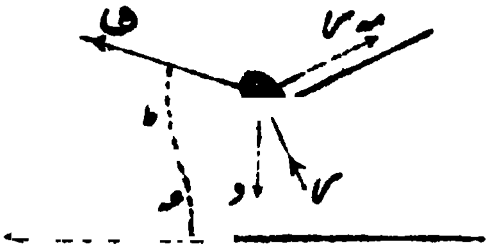
(ا) ا = ب = ۰، جس میں ا ج ب ایک خط مستقیم میں ہیں۔

(ب) ج = ۰، ا = ب = $\frac{\pi}{2}$، جس میں ڈوریاں متوازی ہیں۔

۲۔ اُس چھوٹی سے چھوٹی قوت کی مقدار اور سمت معلوم کرو جو ایک جسم کو جو ایک مائل مستوی پر ساکن ہے مستوی کے نیچے حرکت میں لائے۔

فرض کرو کہ مستوی کا زاویہ عہ ہے اور مستوی اور اُس جسم کے درمیان جسے متحرک کرنا ہے رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ جسم کا وزن و ہے اور فرض کرو کہ

ایک قوت ق مستوی کے نیچے ایک ایسی سمت میں اس پر لگائی گئی ہے جو خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے، اس قوت کے متعلق فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ جسم کو متحرک کرنے کے لیے عین کافی ہے۔



شکل (۲۴)

جسم پر عمل کرنیوالی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اس کا وزن و،

(ب) قوت عاملہ ق،

(ج) مستوی کے ساتھ تعامل۔

فرض کرو کہ اس آخری قوت کو مستوی اور اس کے عمود وار دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا گیا ہے۔ اگر بعد الذکر کو ر فرض کریں تو قبل الذکر جزو ترکیبی مہ ر ہوگا جو مستوی کی اوپر کی جانب عمل کرے گا کیونکہ بموجب فرض جسم مستوی کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہے۔

(۵۱) ان تمام قوتوں کا حاصل معدوم ہوتا ہے، اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ قوتوں کو مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے

ر + ق جب طہ − و جم عہ = ۰

اور مستوی میں تحلیل کرنے سے

ق جم طہ + و جب عہ − مہ ر = ۰

نامعلوم تعامل ر کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ق (مہ جب طہ + جم طہ) − و (مہ جم عہ − جب عہ) = ۰

اس لیے ق = و (مہ جم عہ − جب عہ) / (مہ جب طہ + جم طہ)

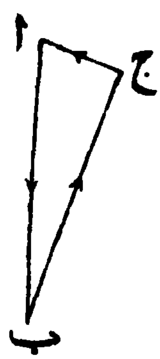
اس لیے مہ کی بجائے مس صہ رکھنے سے

ق = و (جم عہ مس صہ − جب عہ) / (جم طہ + مس صہ جب طہ) = و جب (صہ − عہ) / جم (طہ − صہ)

ق کی قیمت اقل ہوگی جبکہ جم (طہ - صہ) اعظم ہو اور یہ اُس وقت ہوگا جبکہ جم (طہ - صہ) = ا یعنی جبکہ طہ = صہ ۔ اِس صورت میں ق کی قیمت ہے

ق = و جب (صہ - عہ)

پس یہ وہ چھوٹی سے چھوٹی قوت ہے جس سے حرکت پیدا کیجا سکتی ہے اور اسے عمل کرنا چاہیئے اِس طور پر کہ وہ سُتوی کے ساتھ ایک ایسا زاویہ طہ بنائے جو زاویہ رگڑ صہ کے مساوی ہو ۔ چونکہ بموجب فرض وزن بغیر پھسلے ساکن رہتا ہے جبکہ کوئی قوت لگائی نہیں جاتی اِس لیے زاویہ صہ کو عہ سے بڑا ہونا چاہیئے ۔ اِس لیے قوت ق کی سمت ہمیشہ اوپر وار سمت میں مائل ہونی چاہیئے ۔ قوت ق کا عمل دوگونہ ہے، وہ جسم کے وزن کا کچھ حصہ سہارتی ہے (اپنے اُس جزو ترکیبی کے ذریعہ جو سُتوی پر عمود ہے) اور اِس لیے رگڑ کی مقدار کو گھٹاتی ہے، نیز وہ رگڑ کی مزاحمت پر غالب آنے کے لیے محرک طاقت (اپنے اُس جزو ترکیبی کے ذریعہ جو سُتوی میں ہے) بھی مہیا کرتی ہے ۔ جب اِس قوت کے یہ دو حصے مفید ترین طریقہ پر لگے ہوئے ہوں تو ق کی قیمت اقل ہوتی ہے اور یہ جیسا کہ ہم ثابت کر چکے ہیں اُس وقت ہوتا ہے جبکہ طہ = صہ



شکل (۲۵)

اِس مسئلہ کا ایک دلچسپ اور سبق آموز حل ہندسی طور پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے ۔ توازن کے لیے متذکرہ بالا تین قوتوں کو قوتوں کا ایک مثلث بنانے کی شرط کو پورا کرنا چاہیئے ۔

فرض کرو کہ ا ب 'وزن کو تعبیر کرتا ہے اور ب ج 'کمیت اور سُتوی کے درمیان تعامل کو ۔ اس لیے ج ا 'قوت عاملہ ق کو تعبیر کرنا چاہیئے ۔ اگر جسم حرکت کے نقطہ پر ہے تو تعامل کو سُتوی کے عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہیئے، اِس لیے زاویہ ا ب ج ' صہ - عہ ہونا چاہیئے ۔ اس لیے خط ب ج سمت میں ثابت ہے

اور مسئلہ یہ ہے کہ ا ج کی مقدار اور سمت معلوم کی جائے جبکہ طول ا ج اقل ہو۔ صریحاً اس کی اقل قیمت واقع ہوتی ہے جبکہ ا ج، ب ج پر عمود ہوتا ہے، اس لئے ا ج ایسی سمت میں ہونا چاہئے جو افق کے ساتھ زاویہ صہ ۔ عہ بنائے جیسا قبل ازیں معلوم کیا جا چکا ہے، نیز چونکہ ا ج = ا ب جب ا ب ج = ا ب جب (صہ ۔ عہ) اس لیے مطلوبہ قوت کی مقدار و جب (صہ ۔ عہ) ہوگی۔

(۵۴) ۳۔ ایک ذرہ ایک لچکدار ڈوری سے بندھا ہے اور ڈوری کا دوسرا سرا ایک کھردرے مائل مستوی میں ایک نقطے پر ثابت ہے۔ مستوی کا وہ حصہ معلوم کرو جس کے اندر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔

ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

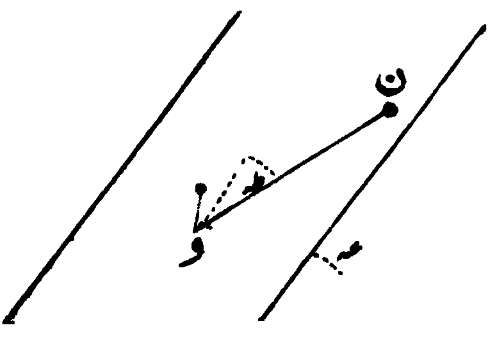
(ا) اس کا وزن و انتصاباً نیچے،

(ب) ڈوری کا تناؤ،

(ج) کھردرے مستوی کے ساتھ تعامل۔

فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل ہے اور لچک کا مقیاس لہ تو جب ڈوری کا واقعی طول ر ہوتا ہے جہاں ر > ل تو تناؤ $\frac{(ر - ل) لہ}{ل}$ ہے۔

فرض کرو کہ مستوی کا میلان عہ ہے اور مستوی اور ذرہ کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ مستوی کے تعامل کو عمادی جزوی ترکیبی ک اور مستوی میں کے جزو ترکیبی ف میں تحلیل کیا گیا ہے۔ وہ شرط کہ ذرہ ساکن رہے یہ ہے کہ ف < مہ ک ہے۔ تو توں کو مستوی کے علی القوائم تحلیل کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اس سمت میں



شکل (۲۶)

عمل کرنے والی قوتیں صرف ذرہ کا وزن اور مستوی کے ساتھ اس کا تعامل ہیں۔ اس لیے

$$\text{ں} = \text{و جم عہ}$$

اب ذرہ کے توازن پر غور کرو جبکہ وہ کسی نقطہ ن پر ہو جس کا فاصلہ و سے ر (> ل) ہے۔ اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی مائل مستوی میں حسب ذیل ہیں :

(ا) و جب عہ، ن میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم کی سمت میں نیچے کی جانب،

$$(\text{ب})\ \text{تناؤ}\ \frac{(\text{ر}-\text{ل})\,\text{لہ}}{\text{ل}}\text{، سمت ن و میں،}$$

(ج) تعامل کا جزو ترکیبی جس کو ہم نے ف سے تعبیر کیا ہے۔

فرض کرو کہ و ن، مستوی کے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ چونکہ پہلی دو قوتوں کا حاصل مقدار ف کا ہونا چاہیئے اسلیے

$$\text{ف}^2 = \text{و}^2\,\text{جب}^2\text{عہ} + \frac{(\text{ر}-\text{ل})^2\,\text{لہ}^4}{\text{ل}^2} + \frac{2(\text{ر}-\text{ل})\,\text{لہ}^2}{\text{ل}}\ \text{و جب عہ جم طہ}$$

جس سے فرکی قوت کی وہ مقدار معلوم ہو گی جو توازن قائم رکھنے کے لیے ضروری ہے۔ اگر ذرہ حرکت کرنے کو ہو تو ف = مہ ں = مہ و جم عہ اور اس لیے

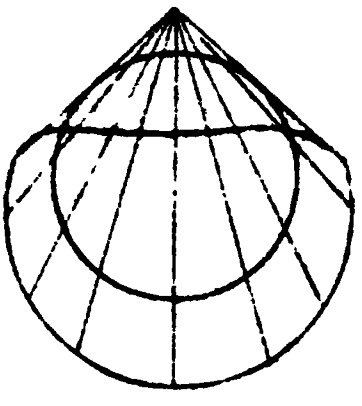
$$\text{و}^2(\text{جب}^2\text{عہ} - \text{مہ}^2\,\text{جم}^2\text{عہ}) + \frac{(\text{ر}-\text{ل})^2\,\text{لہ}^4}{\text{ل}^2} + \frac{2(\text{ر}-\text{ل})\,\text{لہ}^2}{\text{ل}}\ \text{و جب عہ جم طہ} = 0 \quad \ldots\ldots(\text{ا})$$

چونکہ نقطہ ن کے قطبی محدد ر، طہ ہیں اس لیے مساوات (ا) مستوی کے اس حصہ کے حدود کی قطبی مساوات ہے جس کے اندر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔

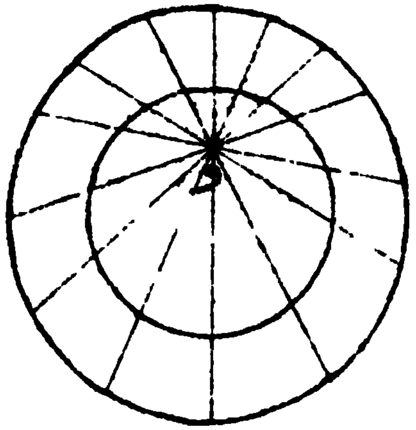
اس مساوات کی توضیح آسان ترین طریقہ پر ہو گی اگر ہم یہ دیکھیں کہ ر-ل کی بجائے ر رکھنے سے مساوات (ا) ہو جاتی ہے (۵۴۳)

$$\text{و}^2(\text{جب}^2\text{عہ} - \text{مہ}^2\,\text{جم}^2\text{عہ}) + \frac{\text{لہ}^4}{\text{ل}^2}\,\text{ر}^2 + 2\,\frac{\text{لہ}^2}{\text{ل}}\ \text{و جب عہ} \times \text{ر جم طہ} = 0 \quad \ldots\ldots(\text{ب})$$

جو ایک دائرہ کی قطبی مساوات ہے۔ پس ابتدائی طریق جو مساوات (ا) سے تعبیر ہوتا ہے اِس طور پر کھینچا جا سکتا ہے کہ اول وہ دائرہ کھینچ لیا جائے جو مساوات (ب) سے تعبیر ہوتا ہے اور پھر مبدا میں سے گذرنے والے ہر سمتی نیم قطر کو اس دائرہ کے محیط سے آگے فاصلہ ل تک بڑھایا جائے۔



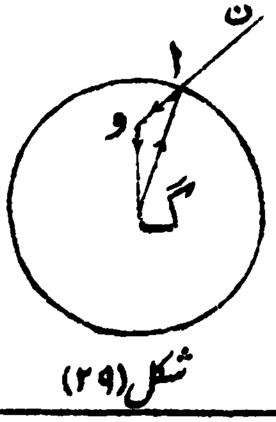
شکل (۲۸)



شکل (۲۷)

یہی نتیجہ ہندسی طور پر مسئلہ کو حل کرنے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ذرہ جس مستوی پر ساکن ہے اِس میں صرف تین قوتیں اُس پر عمل کرتی ہیں اسلئے اِن قوتوں کے متوازی اور متناسب خطوں کو ایک مثلث بنانا چاہئے۔

شکل (۲۹) میں فرض کرو کہ و ن ڈوری ہے اور فرض کرو کہ ن سے خط ن ا طول ل کا پیمائش کیا گیا ہے اور اس لیے ا و ڈوری کی توسیع ر - ل ہے۔ تناؤ ہمیشہ ا و کے متناسب ہوگا اور ا و کی سمت میں عمل کرے گا۔ فرض کرو کہ ہم یہ طے کر لیتے ہیں کہ قوتوں کے مثلث میں تناؤ کو حقیقی خط ا و سے تعبیر کر لیا گیا ہے۔ اسی پیمانہ پر فرض کرو کہ وزن کا جزو ترکیبی و جب عہ خط و گ سے تعبیر ہوتا ہے جس کی سمت بلاشبہ نیچے وار و میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم کی سمت ہے۔ پس ا و گ کو قوتوں کا مثلث ہونا چاہئے اور اسلئے گ ا سے



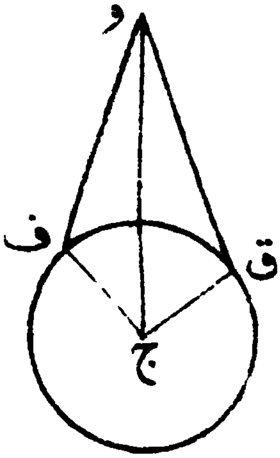
شکل (۲۹)

وہ فرکی تعامل تعبیر ہونا چاہیئے جو ذرہ اور مستوی کے درمیان ہے۔ اِس کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت مہ و جم عہ ہے اور اس لیے اگر پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو تو گ ا قوت مہ و جم عہ کو تعبیر کرے گا۔ پس ن کے ایک محل کے متناظر جس میں پھسلن عین واقع ہونے کو ہو ا کا محل ایسا ہے کہ گ ا مستقل قوت مہ و جم عہ کو تعبیر کرتا ہے یعنی دوسرے الفاظ میں ا کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز گ ہے۔ اِس سے وہ عمل ملتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔

مستوی کا وہ حصہ جس میں توازن ممکن ہے دو مختلف شکلیں اختیار کرتا ہے بموجب (۵۴)
اِس کے کہ مائل مستوی کا زاویہ عہ رگڑ کے زاویہ صہ سے چھوٹا یا بڑا ہو۔ پہلی صورت میں توازن کا قطعہ اُس قسم کا ہے جس کو شکل (۲۷) میں بتلایا جا چکا ہے۔ قیمت عہ = صہ میں سے گذرنے پر وہ دائرہ جو عمل میں استعمال کیا گیا ہے نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور صہ سے بڑی عہ کی قیمتوں کے لیے توازن کا قطعہ اُس قسم کا رقبہ ہو جاتا ہے جس کو شکل (۲۸) میں کھینچا گیا ہے۔ کیونکہ عہ کی اُن قیمتوں کے لیے جو صہ سے بڑی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر) نصف قطر ل کا دائرہ جس کا مرکز و ہے قائمیت کے قطعہ سے بالکل باہر واقع ہوتا ہے' اس کے برخلاف عہ کی اُن قیمتوں کے لیئے جو صہ سے چھوٹی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر) یہ دائرہ توازن کے قطعہ میں کُلاً واقع ہوتا ہے۔ صریحاً یہ دائرہ اُس قطعہ کو نشان زد کرتا ہے جس کے اندر وزن ڈوری کے ساتھ ساکن رہ سکتا ہے لیکن وہ توازن کا قطعہ ہوگا اگر عہ < صہ اور توازن کا قطعہ نہیں ہوگا اگر عہ > صہ۔

اِس طرح یہ دائرہ اُس طریقہ پر توازن کے قطعہ کے اندر یا باہر واقع ہوگا جس کا علم علم تحلیل سے حاصل کر لیا گیا ہو۔ اِس کے ساتھ ہی بغیر جداگانہ تحقیق کے ہمیں اِس کا یقین نہیں ہو سکتا تھا کہ وہ نتیجہ جو علم تحلیل سے حاصل ہوا ہے اُس قطعہ کے متعلق صحیح ہے جو و سے فاصلہ ل کے اندر واقع ہے۔ کیونکہ تحلیل تو یہ فرض کر کے شروع ہوئی تھی کہ ڈوری تنی ہوئی ہے اور اس لیئے اِس کا اطلاق صرف اُس قطعہ پر ہو سکتا ہے جو و سے ل سے بڑے فاصلہ پر واقع ہے

۴۔ دو وزن و، وَ ایک چکنے کرہ پر ایک ڈوری کے ذریعہ جو و پر کے ایک چھوٹے حلقہ میں سے گذرتی ہے سہارے گئے ہیں جہاں و کرہ کے مرکز کے انتصاباً اوپر واقع ہے۔ توازن کی تشکیل معلوم کرو۔



شکل (۳۰)

فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں اِن دو اوزان کے محل ف، ق شکل (۳۰) ہیں۔ ف پر کے وزن و حسب ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں:

(ا) اس کا وزن و انتصاباً نیچے وار،

(ب) ڈوری کا تناؤ سمت ف و میں۔

(ج) وہ تعامل جو کرہ اور وزن کے درمیان ہے چونکہ کرہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اسلیے اِس تعامل کی سمت ذرہ اور کرہ کے تماس کے مستوی کے علی القوائم ہے یعنی اِس کی سمت ج ف ہے۔

یہ تین قوتیں جو ذرہ ف پر عمل کرتی ہیں مثلث و ف ج کے تین ضلعوں کے متوازی ہیں۔ اس لیے مثلث و ف ج کو اِن تین قوتوں کا مثلث تصور کیا جا سکتا ہے، اِن قوتوں کی مقداریں اِس مثلث کے اضلاع کے متناسب ہونی چاہئیں۔ تناؤ اور تعامل کو ت اور ر سے تعبیر کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

و / وج = ت / وف = ر / ج ف ، ....(۱)

اسی طرح مثلث و ج ق کو ذرہ ق کے لیے قوتوں کا مثلث سمجھا جا سکتا ہے۔ (مخفی مباد کہ یہ مثلث اُسی پیمانہ پر قوتوں کو تعبیر نہیں کرتا جس پیمانہ پر مثلث و ف ج تعبیر کرتا تھا کیونکہ اُس صورت میں و ف سے وزن و کو تعبیر کیا گیا تھا اور اب و ق سے وزن وَ تعبیر ہوتا ہے)۔

قوتوں کے اس دوسرے مثلث سے حاصل ہوتا ہے

وَ / و ج = تَ / و ق = رَ / ج ق ، .... (ب)

جہاں تَ اور رَ سے وہ تناؤ اور تعامل تعبیر ہوتے ہیں جو ق پر عمل کرتے ہیں۔

چونکہ و پر کے حلقہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اِس لیے ڈوری ف و ق کا تناؤ ہر نقطہ پر وہی ہے۔ اِس لیے تَ = ت۔ پس مساواتوں (ا) اور (ب) سے

و × و ف = وَ × و ق ، .... (ج)

کیونکہ ہر حاصل ضرب، ت × و ج کے مساوی ہے۔ اگر ڈوری کا پورا طول ل ہو تو

و / و ق = وَ / و ف = (و + وَ) / ل (د)

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری خود کو اِس طور پر ترتیب دے لیتی ہے کہ وہ نقطہ و پر اِن دو وزنوں کی نسبت معکوس میں تقسیم ہوتی ہے۔ نیز ہم مساواتوں (ا) اور (ب) سے دیکھتے ہیں کہ

ر / و = رَ / وَ

کیونکہ ہر ایک نسبت وہ نسبت ہے جو کرہ کے نصف قطر کو و ج کے ساتھ ہے۔

اگر ڈوری نا استداد پذیر ہے تو طول ل معلوم ہے اور اِس لیے مساواتوں (د) سے طول و ف، و ق پوری طرح معلوم ہوتے ہیں۔ لیکن فرض کرو کہ ڈوری استداد پذیر ہے اور فرض کرو کہ اس کا فطری طول ا اور مقیاس لہ ہے۔ اب ل ایک نا معلوم مقدار ہے اور اِس کے لیے ہمیں ایک زائد مساوات نا معلوم مقداروں کے درمیان حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے:

ت = لہ (ل − ا) / ا

اب چونکہ مساوات (ج) سے مقدار ت × و ج کے لیے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

اس لیے

$$\text{ت} \times \text{وج} = \frac{\text{ل}-1}{1}\,\text{ل} \times \text{وج} = \text{و} \times \text{وف} = \text{وَ} \times \text{وق}$$

$$= \frac{\text{وف}}{\frac{1}{\text{و}}} = \frac{\text{وق}}{\frac{1}{\text{وَ}}} = \frac{\text{ل}}{\frac{1}{\text{و}} + \frac{1}{\text{وَ}}}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ل}-1}{1}\,\text{ل} \times \text{وج} = \frac{\text{ل}}{\frac{1}{\text{و}} + \frac{1}{\text{وَ}}}$$

اس مساوات سے ل کی قیمت معلوم ہو گی اور اس کو معلوم کر لینے کے بعد ہم حسب سابق عمل جاری کریں گے ۔

۵ ـ ایک وزن و کو ڈوریوں سے جنکے تناؤ $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$. $ت_n$ ہیں سہارا گیا ہے ۔ ڈوریاں انتصاباً نہیں لٹکتیں لیکن اِن کے مختلف زوجوں کے درمیان زاوئے $صہ_{12}$، $صہ_{13}$ وغیرہ معلوم ہیں ۔ وزن و کو تناؤں اور اِن زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو ۔

صریحاً وزن، تناؤں $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$ . . . $ت_n$ کے حاصل کے مساوی ہے ۔ (۵۶)

فرض کرو کہ ہم فضا میں کوئی تین قائم محاور لیتے ہیں ۔ فرض کرو کہ پہلی ڈوری کی سمتی جیوب التمام $ل_1$، $م_1$، $ن_1$ ہیں، دوسری کی $ل_2$، $م_2$، $ن_2$ اور علیٰ ہذا ۔ تب تناؤں کو محاور کے متوازی تحلیل کرنے سے پہلے تناؤ کے اجزائے ترکیبی ہونگے

$$\text{ل}_1\text{ت}_1،\ \text{م}_1\text{ت}_1،\ \text{ن}_1\text{ت}_1$$

اسی طرح دوسرے تناؤں کے اجزائے ترکیبی کے لئے اِن کے مشابہ جملے ہیں اور اس لیے اگر حاصل کے تین اجزائے ترکیبی لا، ما، ے سے تعبیر ہوں تو

$$\text{لا} = \text{ل}_1\text{ت}_1 + \text{ل}_2\text{ت}_2 + \ldots\ldots + \text{ل}_n\text{ت}_n،$$

$$\text{ما} = \text{م}_1\text{ت}_1 + \text{م}_2\text{ت}_2 + \ldots\ldots + \text{م}_n\text{ت}_n،$$

$$\text{ے} = \text{ن}_1\text{ت}_1 + \text{ن}_2\text{ت}_2 + \ldots\ldots + \text{ن}_n\text{ت}_n،$$

اب چونکہ حاصل کی مقدار و کے مساوی ہے، اس لیے

$$\text{و}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2$$

$$= (\text{ل}_1\text{ت}_1 + \text{ل}_2\text{ت}_2 + \ldots + \text{ل}_n\text{ت}_n)^2 + (\text{م}_1\text{ت}_1 + \text{م}_2\text{ت}_2 + \ldots + \text{م}_n\text{ت}_n)^2 + (\text{ن}_1\text{ت}_1 + \text{ن}_2\text{ت}_2 + \ldots + \text{ن}_n\text{ت}_n)^2$$

$$= \text{ت}_1^2(\text{ل}_1^2 + \text{م}_1^2 + \text{ن}_1^2) + \ldots + 2\,\text{ت}_1\text{ت}_2(\text{ل}_1\text{ل}_2 + \text{م}_1\text{م}_2 + \text{ن}_1\text{ن}_2) + \ldots\ldots$$

$$= \text{ت}_1^2 + \text{ت}_2^2 + \ldots + 2\,\text{ت}_1\text{ت}_2\,\text{جم}\,\text{صہ}_{12} + \ldots\ldots$$

جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

عام مثالیں

۱۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جس کا زاویہ ا قائمہ ہے۔ ا د، ب ج پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ قوتوں $\frac{1}{\text{اب}}$ (جو ا ب پر عمل کرتی ہے) اور $\frac{1}{\text{اج}}$ (جو ا ج پر عمل کرتی ہے) کا حاصل $\frac{1}{\text{اد}}$ ہے جو ا د پر عمل کرتا ہے۔

۲۔ ایک نقطہ و پر قوت ف عمل کرتی ہے جس کا خط عمل اُس مستوی میں ہے جو و پر ملنے والے دو عمود وار خطوط و ا، و ب سے متعین ہوتا ہے۔ ف کا جزو ترکیبی سمت و ا میں مقدار اور سمت کے لحاظ سے و لا سے تعبیر ہوتا ہے اور سمت و ب کا جزو ترکیبی و ما سے۔ ثابت کرو کہ قوت ف مقدار میں دائرہ و لا ما کے قطر سے تعبیر ہوتی ہے، اِس کی سمت معلوم کرو۔

۳۔ قوتیں ف_1، ف_2، ...، ف_n جو ایک مستوی میں نقطہ و پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہیں۔ کوئی قاطع اِن کے خطوط عمل کو نقطوں ل_1، ل_2، ...، ل_n پر قطع کرتا ہے اور طول و ل_r کو مثبت خیال کیا جاتا ہے جبکہ و سے ل_r کی سمت

وہی ہو جو $\text{ف}_{\text{غ}}$ کی ہے ۔ ثابت کرو کہ $\sum \text{ف}_{\text{غ}} \mid \text{ول}_{\text{غ}} = 0$

۴ ۔ ایک جسم ایک چکنے مائل مستوی پر دو قوتوں کے ذریعہ سہارا گیا ہے، ہر قوت جسم کے نصف وزن کے مساوی ہے ان میں سے ایک افقی طور پر عمل کرتی ہے اور دوسری مستوی کے متوازی ۔ مستوی کا میلان معلوم کرو ۔

۵ ۔ ایک چکنے مائل مستوی کا میلان °۳۰ ہے اور اس پر ایک جسم افقی طور پر عمل کرنے والی قوت ف سے سہارا گیا ہے ۔ دوسری کونسی سمت میں قوت ف عمل کر سکتی ہے اور جسم کو سہارا سکتی ہے ۔ اِن دو صورتوں میں مستوی پر کے دباؤ کا مقابلہ کرو۔

۶ ۔ دو چکنے مستوی جن کے میلان عہ اور جہ ہیں ایک افقی خط ا ب (۵۷)
پر ملتے ہیں ۔ ا ب کے ایک نقطہ پر ایک چھوٹا چکنا حلقہ ہے جس میں سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے دونوں سروں پر وزن بندھے ہیں، اِن میں سے ایک وزن ایک مستوی پر اور دوسرا دوسرے مستوی پر ہے اور یہ اوزان اور حلقہ ایک ہی انتصابی مستوی میں ہیں ۔ اگر اوزان توازن میں ہوں تو ڈوری کا تناؤ اور وزنوں کی نسبت معلوم کرو ۔

۷ ۔ وزن و_1 اور و_2 کے دو چکنے حلقے ایک ڈوری سے مربوط ہیں اور ایک دائری تار کی محدب جانب انتصابی مستوی میں متوازن ہیں ثابت کرو کہ اگر دائرہ کے مرکز پر ڈوری کے محاذی زاویہ عہ بنے تو انتصابی کے ساتھ ڈوری کا زاویہ میلان طہ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{و}_1 + \text{و}_2}{\text{و}_1 - \text{و}_2}\ \text{مم}\ \frac{\text{عہ}}{2}$$

۸ ۔ دو اوزان ایک کھردرے مستوی پر ساکن ہیں، یہ اوزان ایک ڈوری سے مربوط ہیں جو مستوی کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ۔ اگر زاویہ میلان عہ، زاویہ رگڑ صہ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ کمتر وزن کو بڑے وزن کے ساتھ کم سے کم نسبت $\frac{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{صہ})}{\text{جب}\,(\text{عہ} + \text{صہ})}$ ہے ۔

۹۔ دو وزن ایک کھردرے دوہرے مائل مستوی پر ایک دوسرے کو ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو راس پر سے گذرتی ہے سہارے ہوئے ہیں اور دونوں اوزان عین حرکت کرنے کو ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مستوی کو جھکایا جائے یہاں تک دونوں اوزان پھر حرکت کرنے کو ہوں تو وہ زاویہ جس میں سے مستوی کو جھکانا ہوگا رگڑ کے زاویہ کا دگنا ہوگا۔

۱۰۔ دو اوزان ف اور ق ایک ہی مادی شئے سے بنائے گئے ہیں، یہ اوزان ایک دوہرے مائل مستوی پر ساکن ہیں اور ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو مشترک راس پر سے گذرتی ہے مربوط ہیں۔ اِن میں سے وزن ق مستوی کے نیچے حرکت کرنے کو ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو توازن کے خلل کے بغیر ف میں جمع کیا جا سکتا ہے حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{ف جب ۲ صہ جب (عہ + بہ)}}{\text{جب (عہ − صہ) جب (بہ − صہ)}}$$

جہاں مستویوں کے زوایائے میلان عہ اور بہ ہیں اور زاویہ رگڑ صہ ہے۔

۱۱۔ ایک جسم ایک کھردرے مائل مستوی پر ایک قوت کے ذریعہ جو مستوی میں عمل کرتی ہے سہارا گیا ہے۔ اگر قوت کی کم سے کم مقدار جبکہ مستوی افق سے زاویہ عہ پر مائل ہو اُس قوت کی بڑی سے بڑی مقدار کے مساوی ہو جبکہ مستوی افق سے زاویہ بہ پر مائل ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کا زاویہ $\frac{1}{2}$ (عہ − بہ) ہے۔

۱۲۔ وزن و کے دو مساوی چھلے ایک پردے کی ڈنڈی پر حرکت کر سکتے ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ چھلے طول ل کی ایک ڈھیلی ڈوری سے مربوط ہیں جو ایک چکنے چھلے کے ذریعہ وزن و، کو سہارتی ہے۔ چھلے ایک دوسرے سے کتنے فاصلہ پر ہونے چاہئیں کہ وہ ایک دوسرے سے قریب آکر نہ ملیں۔

۱۳۔ مختلف مادی اشیاء سے بنے ہوئے دو اوزان ف اور ق ایک کھردرے مستوی پر رکھے گئے ہیں۔ مستوی کا میلان طہ ہے اور اوزان [illegible] مستوی اور افق کے خط تقاطع سے ۴۵° [illegible] ف اور ق کی رگڑ کی تعدیل [illegible]

معلوم کرو اگر یہ معلوم ہو کہ او پر کے وزن کی قدر نیچے کے وزن کی قدر سے دگنی ہے۔

۱۴۔ ایک وزنی حلقہ خروج المرکز ز کے ایک چکنے ناقصی تار پر جو انتصابی مستوی میں ہے آزادانہ پھسل سکتا ہے۔ ناقص کا محور اعظم افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور ایک ڈوری جو حلقے سے بندھی ہے ناقص کے مرکز پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے اور مساوی وزن کے ایک جسم کو سہارتی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقے اور تار کے نقطہ تماس پر تار کا مماس محور اعظم کے ساتھ جو زاویہ فہ بناتا ہے حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

س (فہ + عہ) (قط² فہ - ز²) = ز² س فہ

۱۵۔ دو چھوٹے چکنے حلقے جنکے وزن و، وَ ہیں ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط کئے گئے ہیں اور وہ دو ثابت تاروں پر پھسلتے ہیں، ان میں سے پہلا انتصابی ہے اور دوسرا افق سے زاویہ عہ پر مائل ہے۔ ایک وزن ف ڈوری سے باندہ دیا گیا ہے اور اس ڈوری کے دو حصے انتصابی کے ساتھ زاویے طہ، فہ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

مم طہ : مم فہ : مم عہ = و : ف + و : ف + و + وَ

۱۶۔ نا مساوی کمیت کے دو ذرّے ایک تیسرے ذرہ کے ساتھ مہین نا امتداد پذیر ڈوریوں کے ذریعہ باندہ دئے گئے ہیں۔ وہ ایک کھردرے مائل مستوی پر پڑے ہیں اور ڈوریاں تنی ہوئی ہیں اور مستوی میں افقی خط کے ساتھ زاویے عہ، یہ بناتی ہیں۔ کم سے کم افقی قوت کی مقدار اور سمت معلوم کرو جس کو تیسرے ذرہ پر لگانے سے تینوں ذرّے حرکت کرنے لگیں۔

۱۷۔ ایک وزنی ذرہ ایک کھردرے مائل مستوی پر جس کا میلان عہ رگڑ کے زاویہ کے مساوی ہے رکھا گیا ہے۔ ایک ڈوری ذرہ سے باندہ دی گئی ہے جو ایک سوراخ میں سے جو مستوی میں ذرہ سے نیچے واقع ہے گذرتی ہے لیکن وہ اس نقطہ میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سوراخ میں سے ڈوری کو بتدریج کھینچا جائے تو ذرہ ایک خط مستقیم اور ایک نیم دائرہ علی التواتر مرتسم کرے گا۔

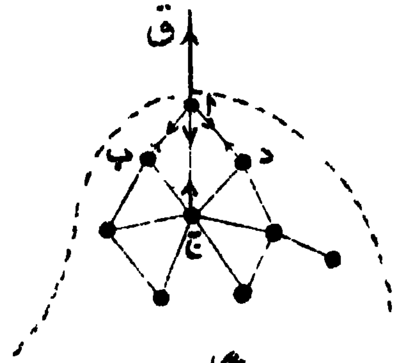
(۵۹)

چوتھا باب

ذروں کے نظاموں کا علم سکون

۴۴ ــ ہم نے ابتک ایک واحد ذرہ پر قوتوں کے عمل سے بحث کی ہے لیکن مسئلوں کی ایک مختلف جماعت پیدا ہوتی ہے جب ہم ایک جسم پر جو ذروں کی ایک بہت بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہوتا ہے قوتوں کے عمل کا مطالعہ کرتے ہیں جبکہ قوتیں اس طریقہ سے لگائی جائیں کہ وہ جسم کے مختلف ذروں پر عمل کریں۔

فرض کرو کہ قوت ق، ایک جسم کے ذرہ ا پر لگائی گئی ہے جبکہ جسم ذروں ا، ب، ج، د . . . کی ایک بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہے۔ اگر ذرہ ا پر دوسرے ذروں ب، ج، د . . . . کا کوئی اثر نہ ہوتا تو ذرہ ا قوت عاملہ کے زیر عمل حرکت کرنے لگتا اور جلد دوسرے ذروں ب، ج، د . . . سے جدا ہو جاتا۔ لیکن اگر ذروں ا، ب، ج، د . . . . سے ایک واحد مسلسل جسم کی ترکیب ہوئی ہے تو ایسا وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ فی الحقیقت جوں ہی ذرہ ا، دوسرے ذروں کے لحاظ سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے ذرہ ا اور متصلہ ذروں ب، ج، د . . . . کے درمیان اعمال اور تعاملات کے نظامات ظہور پذیر ہو جاتے ہیں۔



شکل (۳۱)

چنانچہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ا پر عمل کرنے والی قوتیں ا کی حرکت کو روکنے کا میلان رکھتی ہیں اور متناظر تعاملات ذروں ب، ج، د ... میں حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتے ہیں۔ جب ب، ج، د ... حرکت کی ابتدا کرتے ہیں تو قوتوں کے دیگر نظامات، ب، ج، د، ... کے متصلہ ذروں پر عمل کرنے لگتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طرح تمام ذرے حرکت میں آتے ہیں اور صرف ذرہ ا کے ہی حرکت کرنے کی بجائے پورا جسم حرکت کرتا ہے۔

(۶۰) اب ہم غور کریں گے کہ آیا ایسا جسم یا اجسام کا نظام حرکت کرے گا یا ساکن رہے گا جبکہ قوتوں کے نظامات بیرونی جانب سے اس کے مختلف ذروں پر عمل کریں۔ لیکن ہمیں ہمیشہ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ وہ قوتیں جو بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں صرف وہی جسم پر عمل کرنے والی ہوتی ہیں بلکہ ان کے ساتھ وہ اعمال اور تعاملات بھی ہوتے ہیں جو مختلف ذروں کے درمیان ظہور پذیر ہوتے ہیں۔

۴۵ — اس آخری واقعہ کا ایک نتیجہ فوراً ظاہر ہے۔ کسی جسم کے ایک ذرہ ا پر ایک قوت لگانا اور اس کے دوسرے ذرہ ب پر ٹھیک اتنی ہی متشابہ قوت لگانا یہ دونوں امور ایک ہی نہیں ہیں۔ کیونکہ اندرونی اعمال اور تعاملات کے نظامات دونوں صورتوں میں مختلف ہوں گے۔ کسی سادہ مثال سے معلوم ہو جائے گا کہ حاصل حرکت بھی بالعموم مختلف ہو گی، مثلاً کرسی کے پشت کے وسطی نقطہ پر کوئی افقی قوت لگائی جائے تو وہ ممکن ہے کرسی کو الٹ دے لیکن اگر اتنی ہی متشابہ قوت کرسی کے پایہ پر لگائی جائے تو وہ کرسی کو زمین پر گھسیٹے گی اور نیز اس کو ایک انتصابی محور کے گرد گھمائے گی۔

وہ محل جہاں ذرہ ہے جبکہ اس پر قوت لگائی جاتی ہے قوت کا نقطہ عمل کہلاتا ہے۔ وہ خط جو اس نقطہ میں سے قوت کی سمت میں کھینچا جائے قوت کا خط عمل کہلاتا ہے۔

کسی قوت کے عمل سے متعلق جتنی چیزیں معلوم ہونی چاہئیں وہ

سرپجاً حسب ذیل ہیں:
(ا) اس کی مقدار،
(ب) اس کا نقطہ عمل،
(ج) اس کا خط عمل

معیار

۴۶ ۔ تعریف ۔ کسی قوت کا معیار ایک خط کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القوائم ہو قوت اور اُس اقل فاصلہ کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو ان دو خطوں کے درمیان ہے۔

یہ معیار جیسا کہ ہمیں جلد معلوم ہوگا اُس خط کے گرد گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے جس کے گرد معیار کی پیمائش کیجاتی ہے، مثلاً اگر ایک ترازو کے بازو کا طول ل ہو تو اس کے سرے پر وزن و کا معیار ترازو کے نصاب کے گرد ل و ہوگا اور ہمیں معلوم ہوگا کہ یہ معیار بازو کو گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے۔

تعریف ۔ کسی قوت کا معیار ایک خط ل کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القوائم نہ ہو وہی ہوتا ہے جو ل کے عمود وار مستوی میں قوت کے جزو ترکیبی کا معیار ل کے گرد ہے۔

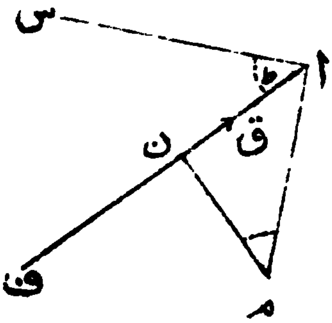
(۶۱) قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں یعنی ل کے متوازی اور اس کے عمود وار تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ اول الذکر سے ل کے گرد گھمانے کا کوئی میلان حاصل نہیں ہوگا اور اس لیے صرف دوسرے جزو ترکیبی سے ہی گھمانے کا پورا میلان حاصل ہوتا ہے۔

متذکرۂ صدر دو تعریفیں کسی خط ل کے گرد کسی قوت ق کے معیار کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔ صریحاً معیار معدوم ہوگا اگر
(ا) ق کا خط عمل، ل کے متوازی ہو،
(ب) ق کا خط عمل، ل کو قطع کرے۔

کیونکہ ظاہر ہے کہ اِن میں سے کسی صورت میں ل کے گرد گھمانے کا میلان صفر ہوتا ہے۔

۴۷۔ فرض کرو کہ خط ل کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور اس کو نقطہ م پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کاغذ کے مستوی میں ایک قوت ق کا خط عمل ف ا ہے اور قوت نقطہ ا کے ذرہ پر عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ م سے ن ا پر عمود م ن کھینچا گیا ہے۔ تب بموجب تعریف قوت ق کا معیار خط ل کے گرد ق × م ن ہے۔

فرض کرو کہ زاویہ ف ا س، زاویہ ن م ا کے مساوی کھینچا گیا ہے اور یہ زاویہ طہ کے مساوی ہے، اِس لیے ا س، م ا پر عمود ہے۔



شکل (۳۲)

اب قوت ق کا معیار خط ل کے گرد

= ق × م ن

= ق × ا م جم طہ

= ا م × ق جم طہ

= ا م × ق کا جزو تحلیلی خط س ا کی سمت میں۔

ہم نے فرض کیا تھا کہ ا پر عمل کرنے والی قوت ق ہے، اس کی بجائے فرض کرو کہ ق، کسی دوسری قوت ر کا جزو تحلیلی اس مستوی میں ہے جو خط ل کے عمود وار ہے۔ اب ل کے گرد ر کا معیار بموجب تعریف وہی ہے جو ق کا معیار ہے، اور ر کا جزو تحلیلی خط ا س کی سمت میں = ق جم طہ۔ اِس لیے جو کچھ ثابت ہوا ہے اِس کو شکل ذیل میں رکھا جا سکتا ہے:

ل کے گرد کسی قوت ر کا معیار جو ا پر عمل کرتی ہے

= ا م × ر کا جزو تحلیلی خط س ا کی سمت میں۔

اب س ا سمت میں متعین ہو جاتا ہے کیونکہ وہ ل پر اور نیز ا م پر عمود ہے

جہاں ام' ا سے ل پر عمود ہے۔ اس لیے معیار کی ایک نئی تعریف ہمیں ملتی ہے جو قبل الذکر تعریف کے بالکل مماثل ہے یعنی: (۴۲)

کسی خط ل کے گرد ا پر عمل کرنے والی قوت کا معیار دو مقداروں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جن میں سے ایک مقدار ام ہے جو ا سے ل پر عمود ہے اور دوسری مقدار ر کا جزو ترکیبی اُس سمت میں ہے جو ام اور ل دونوں پر عمود ہے۔

۴۸ ـ معیار کے اس تخیل سے ہمیں فوراً حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

کسی خط ل کے گرد ا پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ل کے گرد ان قوتوں کے حاصل کے معیار کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ یہ قوتیں ر۱، ر۲، ر۳ ... ہیں اور ان کا حاصل ر ہے۔ فرض کرو کہ ام حسب دفعہ (۴۷) ا سے ل پر عمود ہے اور فرض کرو کہ اس وہ سمت ہے جو ام اور ل دونوں پر عمود ہے۔ مسئلہ ثابت شدنی یہ ہے کہ

ام × ر۱ کا جزو ترکیبی اس کی سمت میں
+ ام × ر۲ کا " " " " "
+ ام × ر۳ کا " " " " "
. . . .
= ام × ر کا جزو ترکیبی اس کی سمت میں

اس مساوات کی طرفین کو ام سے تقسیم کرنے سے مسئلہ صرف یہ رہ جاتا ہے کہ ر کا جزو ترکیبی سمت اس میں = سمت اس میں ر۱، ر۲، ر۳ ... کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ، اور یہ بالکل درست ہے۔

اب ہم زیادہ واضح طور پر معلوم کر سکتے ہیں کہ کس طرح ایک قوت معیار سے گھمانے کے میلان کا ناپ حاصل ہوتا ہے۔ شکل (۳۲) میں ہم ایک خط ل کے گرد جو کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور اس سے نقطہ م پر

سکتا ہے معیار لیا ہے۔ وہ قوت جس کا معیار زیر بحث ہے ایک قوت ر کا ہے جو ا پر عمل کرتی ہے۔ ا پر تین سمتیں باہم علی القوائم ہوں گی یعنی ا س، ا م، اور اس خط کی سمت جو ا میں سے ل کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

ر کا معیار ل کے گرد حسب تعریف

ا م × ر کا جزو ترکیبی سمت ا س میں

ہے۔

اب ر کا جزو ترکیبی سمت ا م میں ایک ایسی قوت ہے جس کا خط عمل ل کو قطع کرتا ہے اور اس لیے ل کے گرد جسم کو گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا۔ اسی طرح ر کا جزو ترکیبی اس خط کے گرد جو ا میں سے ل کے متوازی کھینچا گیا ہے ل کے گرد گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا۔ اس طرح ر کو تین اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جن میں سے صرف پہلا جزو ترکیبی یعنے جو ا س کی سمت میں ہے ل کے گرد گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔ ہم نے پوری قوت ر کے معیار کی تعریف اس طریقہ پر کی ہے کہ وہ قوت کے اجزائے ترکیبی میں سے اس جزو ترکیبی کے معیار کے مماثل ہو جاتا ہے جو گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ معیار کی علامت بھی ہوتی ہے اور مقدار بھی۔ کسی قوت ر کے خط عمل پر حرکت کرنے میں ہم خط ل کے گرد ایک سمت میں گھوم سکتے ہیں یا دوسری سمت میں۔ ہم اس امر پر اتفاق کرتے ہیں کہ جب گھماؤ ایک سمت میں ہو تو ر کا معیار ل کے گرد مثبت سمجھا جائے گا اور دوسری سمت میں ہو تو منفی۔

۴۹۔ اگر ایک ذرہ متعدد قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہو تو ان تمام قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہیئے۔ ان مختلف قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ خواہ یہ معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں حاصل کے معیار کے مساوی ہو گا اور اس لیے وہ بھی صفر ہونا چاہیئے۔

پس ہم حسب ذیل نتیجہ پر پہنچتے ہیں:

جب ایک ذرہ کسی قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہو تو کسی خط کے گرد اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیئے ۔

ذروں کے نظامات توازن میں

۵۰ ۔ فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام متعدد قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں دو قسم کی ہوتی ہیں :

(ا) بیرونی قوتیں ' یہ وہ قوتیں ہیں جو بیرونی جانب سے ذرہ پر عمل کرتی ہیں مثلاً ذرہ کا وزن ۔

(ب) اندرونی قوتیں ' یہ وہ قوتیں ہیں جو اِس ذرہ اور نظام کے باقی دیگر ذروں کے درمیان اندرونی طور پر عمل کرتی ہیں ۔

اب اگر ذروں کا پورا نظام توازن میں ہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر ذرہ جداگانہ طور پر توازن میں ہونا چاہیئے ۔ پس دفعہ ۳۳ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۶۴)

(ا) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں لیے جائیں تو اِن کا مجموعہ معدوم ہونا ہیئے ۔

اور دفعہ ۴۸ میں ثابت شدہ مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

(ب) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں تو اِن کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیئے ۔

لیکن اگر ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو تو عمل جمع سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام ذروں پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیئے ۔ اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ بہر حال خود معدوم ہوگا کیونکہ اندرونی قوتیں اعمال اور تعاملات کے ازواج پر مشتمل ہوتی ہیں اور قوتوں کے

کسی ایسے زوج کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ چونکہ کل مجموعہ معدوم ہوتا ہے اور اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اس لیے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔

اسی طرح وہ مسئلہ بھی جو بیرونی قوتوں کے معیاروں کے لیے مسئلہ بالا کے جواب میں ہے درست ہے۔ کسی خط ل کے گرد تمام اندرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ایک عمل اور تعامل کے معیار مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ اندرونی اور بیرونی تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے معیاروں کا ہر مجموعہ جداگانہ صفر ہے۔ پس بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے۔

اس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلے ثابت کر دئے:

جب ذروں کا ایک نظام بیرونی قوتوں کے کسی نظام کے زیر عمل توازن میں ہو تو

(ا) کسی سمت میں ان تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوتا ہے،

(ب) کسی خط کے گرد ان تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

عام زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مسئلے اس امر کو بیان کرتے ہیں کہ کسی سمت میں بڑھنے کا یا کسی خط کے گرد گھومنے کا کوئی میلان نہیں ہے۔

توضیحی مثال

(۶۵) چرخ اور محور۔ اس آلہ میں جو "چرخ اور محور" کے طور پر مشہور ہے ایک دائری محور ہوتا ہے جو اپنے مرکزی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور اس کے ساتھ ایک دائری پہیہ استوار طور پر لگا ہوتا ہے۔ پہیہ کا مرکز اور محور کا مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ ایک رسی یا ڈوری محور کے گرد لپٹی جاتی ہے اور اس کے سرے پر

ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ایک دوسری رسی یا ڈوری پہیہ کے محیط کے گرد مخالف سمت میں لپٹی جاتی ہے اور اِس کے سرے پر بھی ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔اِن دو اوزان کی نسبت کو مناسب طور پر منتخب کرکے اِس آلہ کو متوازن کیا جاسکتا ہے اِس طور پر کہ وہ اپنے محور کے گرد گھومنے کا کوئی میلان نہ رکھے۔

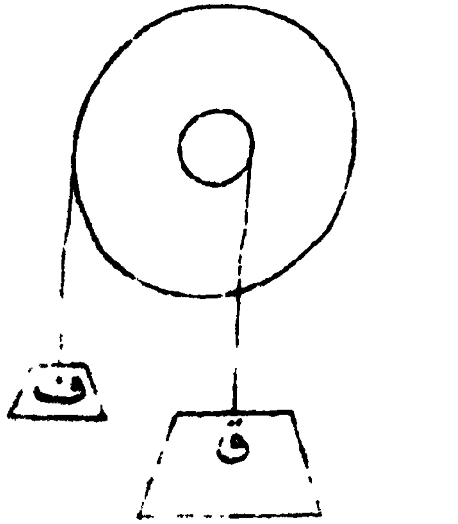
اب ہم اس نظام کے توازن پر غور کرتے ہیں جس میں چرخ اور محور اور رسیوں یا ڈوریوں کے وہ حصے شامل ہیں جو اِن کے گرد لپیٹے گئے ہیں۔مسئلہ کو سادہ بنانے کے لیے ہم اِس نظام کے وزن کو بالکل نظرانداز کریں گے۔اب بیرونی قوائے عاملہ حسب ذیل ہیں:

(ا) چرخ کے گرد لپٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ب) محور کے گرد لپٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ج) اُن سہاروں کا عمل جو چرخ اور محور کو گرنے سے بچاتے ہیں۔

فرض کروکہ اوزان ف اور ق سے تعبیر ہوتے ہیں اس لیے وہ رسیوں کے تناؤ بھی ہیں۔فرض کروکہ چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ا، ب ہیں۔



شکل (۳۳)

اب ہم ریاضیاتی زبان میں اس امر کو بیان کریں گے کہ بیرونی قوائے عاملہ کے معیاروں کا مجموعہ جبکہ انہیں محور کے گرد لیا جائے صفر ہے۔

چرخ پر کی رسی کے تناؤ کا معیار ف ا ہے کیونکہ تناؤ کی مقدار ف ہے جو محور کے علی القوائم عمل کرتا ہے اور ا وہ چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے جو محور اور اِس تناؤ کے خط عمل کے درمیان ہے۔

اسی طرح قوت (ب) کا معیار - ق ب ہے منفی علامت اس وجہ سے لی گئی ہے کہ یہ قوت نظام کو اُس سمت میں گھمانے کا میلان رکھتی ہے جو اُس سمت

مخالف ہے جس میں پہلا تناؤ گھمانے کا میلان رکھتا ہے۔

اگر ہم یہ خیال کریں کہ یہ نظام خود محور پر عمل کرنے والی قوتوں سے بنا ہوا ہے تو قوتوں (ج) کا معیار معدوم ہوگا کیونکہ ان قوتوں کے خطوط عمل اس خط کو قطع کرتے ہیں جس کے گرد معیار لیے جا رہے ہیں۔ اس لیے مطلوبہ مساوات ہے

ف ا - ق ب = ٠

یہ مساوات صرف یہ ظاہر کرتی ہے کہ

[نظام کو گھمانے میں ف کا میلان] - [نظام کو گھمانے میں ق کا میلان] = ٠

اس لیے جب نظام متوازن ہو اس طرح پر کہ وہ ساکن رہ سکے تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے

ف : ق = ب : ا

یعنے اوزان نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہونے چاہئیں۔ چرخ اور محور کے اصول کی عملی مثالیں ڈنڈا چرخ اور لنگر چرخ ہیں۔

(٦٦) مثالیں

١ — آٹھ ملاح جن میں سے ہر ایک ١٠٠ پونڈ کی افقی قوت سے ایک لنگر چرخ کے بازو پر مرکز سے ٥ فٹ کے فاصلہ پر زور لگا رہا ہے لنگر کو عین اٹھا سکتے ہیں لنگر چرخ کے محور کا نصف قطر ١٢ انچ ہے۔ اس زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جو لنگر اٹھاتی ہے۔

٢ — شکل ٣٣ کے آلہ میں وزن ف کو جدا کر لیا گیا ہے اور رسی کے آزاد سرے کو ق پر اسی نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے جس پر دوسری رسی کا سرا بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں یہ نقطہ انتصاباً محور کے نیچے ہوگا۔

٣ — ایک پہیہ ایک افقی محور کے گرد گھومنے میں آزاد ہے اور اس پر دو رسیاں بندھی ہیں جو اس کے محیط کے گرد مخالف سمتوں میں لپٹی ہوئی ہیں دوسرے دونوں سرے ایک چھوٹے حلقہ سے بندے ہیں جس سے ایک وزن لٹکا ہوا ہے ثابت کرو کہ جب یہ نظام ساکن ہو تو یہ دو رسیاں انتصابی کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گی۔

٤ — ایک شخص ایک قفلی گیٹ کو اس کی چول سے ٥ فٹ کے فاصلہ سے ١٥٠ پونڈ کی افقی قوت لگا کر پانی کے دباؤ کے خلاف عین حرکت دے سکتا ہے۔

لئے کتنی قوت لگانی ہوگی اگر وہ چول سے ۹ فٹ کے فاصلہ سے دیائے۔

۵ — ایک پہیہ ایک افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اس کے ایک آرے (Spoke) کے سرے پر ۲ پونڈ کا ایک وزن باندہ دیا گیا ہے اور یہ آرا اُفق کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔ پہیہ کے ایک افقی آرے کے سرے پر کتنا وزن باندھنا چاہیئے کہ وہ حرکت کو وقوع پذیر ہونے سے روک سکے۔

۶ — ایک قنطرہ[1] کو ایک زنجیر کے ذریعہ جو قبضوں سے بعید ترین سرے پر بندھی ہوئی ہے اٹھایا جاتا ہے۔ جب پُل افقی محل میں ساکن ہوتا ہے تو زنجیر پُل کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے اور زنجیر کا تناؤ جو پُل کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے تین ٹن کے وزن کے مساوی ہے۔ بتاؤ کہ زنجیر میں اور کتنا زائد تناؤ مطلوب ہوگا جبکہ ایک ٹن کا وزن پُل کے وسطی نقطہ پر رکھدیا جائے۔

قوتیں ایک مستوی میں

۵۱ — سکونیات میں سادہ ترین مسئلے ہمیشہ وہ ہوتے ہیں جن میں تمام قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مستوی میں ہوں۔ کسی ایسے مسئلہ میں سرگا سب سے زیادہ سہولت اِس میں ہوگی کہ معیاروں کو ایک ایسے خط کے گرد لیا جائے جو اُس مستوی پر عمود ہو جس میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کوئی ایسا خط مستوی کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو ہر قوت اُس خط کے کاملاً عمود وار ہوگی جس کے گرد معیار لیے جارہے ہیں اور اِس لیے معیار، قوت اور اُس چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کا حاصل ضرب ہوگا جو قوت کے خط کے عمل کا نقطہ ن سے ہے۔

جب معیار ایک ایسے محور کے گرد لیے جاتے ہیں جو قوتوں کے مستوی کو علی القوائم نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو اکثر یہ کہا جاتا ہے کہ معیار نقطہ ن کے گرد لئے گئے ہیں اور اِس صورت میں اُس عمود کو جو نقطہ ن سے قوت کے خط عمل پر کھینچا جاتا ہے قوت کے معیار کا بازو کہتے ہیں۔ (۶۷)

۵۲ — مسئلہ — جب تین قوتیں ایک جسم پر یا اجسام کے ایک نظام

[1] پل Drawbridge

ایک مستوی میں عمل کر کے اس کو توازن میں رکھیں تو یہ تین قوتیں ایک نقطہ پر ملنی چاہئیں۔

فرض کرو کہ قوتیں ف، ق، ر ہیں اور فرض کرو کہ ف اور ق نقطہ ا پر متقاطع ہوتی ہیں۔ اب ا کے گرد قوتوں ف، ق، اور ر کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ ہم جانتے ہیں کہ ف اور ق کے معیار معدوم ہوتے ہیں۔ اس لیے ا کے گرد ر کا معیار معدوم ہونا چاہئے یعنی ر کو نقطہ ا میں سے گذرنا چاہئے یا بالفاظ دیگر یہ تین قوتیں ایک واحد نقطہ پر متقاطع ہونی چاہئیں۔

اس اصول کا اطلاق سکونیاتی مسئلوں کو حل کرنے کے لیے اکثر خود کافی ہوتا ہے کیونکہ قوائے عاملہ تین قوتوں میں تحویل کی جا سکتی ہیں۔

توضیحی مثالیں

ا۔ Seesaw ۔ وزن $و_1$، $و_2$ کے دو آدمی ایک تختہ پر کھڑے ہیں جو ایک کھردرے سہارے پر جس کے گرد وہ آزادانہ گھوم سکتا ہے ٹکا ہوا ہے۔ تختہ کا وزن نظرانداز کر کے معلوم کرو کہ آدمیوں کو کہاں کھڑے ہونا چاہئے کہ تختہ متوازن ہو۔

قوتوں کو ایک مستوی سطح میں جو تختہ کے مرکزی خط میں سے انتصاباً گذرتی ہے عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔ یہ قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن $و_1$ جو ایک شخص کا ہے جو ایک سرے پر ہے۔



(ب) وزن $و_2$ جو دوسرے شخص کا ہے جو دوسرے سرے پر ہے،

(ج) تختہ اور اس کے سہارے کے درمیان تعامل۔

شکل (۳۴)

فرض کرو کہ سہارے سے آدمیوں کے فاصلے ا، ب ہیں۔ اب سہارے کے نقطہ کے گرد معیار لینے سے

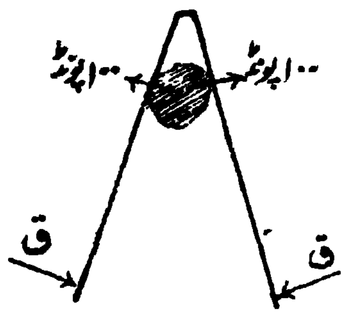
و ا – و ب = ۰

اس لئے اِن دو آدمیوں کو سہارے سے ایسے فاصلوں پر کھڑے ہونا چاہیے جو اِن کے اوزان کے بالعکس متناسب ہوں۔

یاد رہے کہ اس مسئلہ میں نظام پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں جو ایک نقطہ پر ملتی ہیں۔ یہ نقطہ لاتناہی پر ہے۔

(۴۸) ۴۔ سروتہ۔ یہ معلوم کیا گیا کہ چھالیہ کی ایک ڈلی پر ۱۰۰ پونڈ کا وزن رکھنے سے وہ مین پھوٹتی ہے۔ معلوم کرو کہ ایک سروتہ کے بازوؤں کے سِروں پر کتنی قوت لگائی جائے کہ چھالیہ پھوٹ جائے جبکہ وہ قبضہ سے $\frac{1}{2}$ انچ کے فاصلہ پر رکھی ہوئی ہو اور بازو ۶ انچ لمبے ہوں۔

فرض کرو کہ ہر بازو کے انتہائی سِرے پر قوت ق لگانے سے وہ چھالیہ کو پھوڑنے کے لیے مین کافی ہوتی ہے۔ اِس لیے جب بازو کے سِرے پر قوت ق لگائی جاتی ہے تو چھالیہ اور بازو کے درمیان دباؤ ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہونا چاہئے۔ اِس طرح سروتہ کے کسی ایک بازو پر بیرونی جانب سے عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہوں گی:



شکل (۳۵)

(ا) قوت ق جو بازو کے سرے پر لگائی گئی ہے،

(ب) ۱۰۰ پونڈ وزن کا دباؤ جو چھالیہ بازو پر قبضہ سے $\frac{1}{2}$ انچ فاصلہ پر لگاتی ہے،

(ج) تعامل قبضہ پر۔

سروتہ کا وزن یہاں نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

قبضہ کے گرد معیار لینے سے

$$۶ \times ق = \frac{1}{2} \times ۱۰۰ \text{ پونڈ وزن}$$

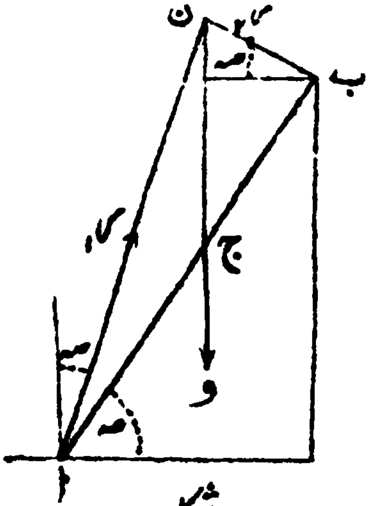
$$\text{اس لیے} \quad ق = \frac{۲۵}{۳} \text{ پونڈ وزن}$$

نوٹ۔ جب کوئی نامعلوم قوت مفروضات میں داخل ہو نہ جائے

مطلوب ہو مثلاً قوت (ح) تو ہم ہمیشہ ایسی مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں جن میں یہ قوت واقع نہ ہو اور یہ اس طرح کہ ہم اُس نقطہ کے گرد معیار لیتے ہیں جو اِس قوت کے خط عمل میں واقع ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر ایسی دو قوتیں واقع ہوں تو ہم اِن کے خطوط عمل کے نقطہ تقاطع کے گرد معیار لیکر وہ مساوات حاصل کرتے ہیں جن میں یہ قوتیں شامل نہیں ہوتیں۔

۳ — ایک سیڑھی ایک کھردرے افقی مستوی پر ایک کھردری انتصابی دیوار کے سہارے جھکی کھڑی ہے اور اس کے سروں کے نقاط تماس بھی اتنے ہی کھردرے ہیں یہ معلوم کرو کہ ایک شخص سیڑھی پر کتنی دور بغیر پھسلے چڑھ سکتا ہے، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ سیڑھی کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

اِس نظام پر جس میں شخص اور سیڑھی شامل ہیں عمل کرنے والی قوتیں تین ہیں۔
(ا) تعامل افقی مستوی کے ساتھ،
(ب) تعامل انتصابی دیوار کے ساتھ،
(ج) شخص کا وزن۔



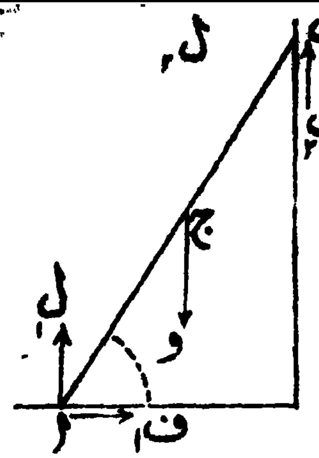
شکل (۳۶)

یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں۔ اس لیے دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کی رُو سے اِن کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

شکل میں فرض کرو کہ سیڑھی ا ب ہے، شخص کا محل ج، اور ن وہ نقطہ جس پر تینوں قوتیں ملتی ہیں۔

اِس لیے ن ج انتصابی ہے، اور ا، ب پر کے تعاملات کے خطوط عمل ا ن، ب ن ہیں۔ جب پھسلن عین شروع ہونے کو ہو تو اِن میں سے ہر تعامل کو عمود کے ساتھ رگڑ کے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا چاہئے۔ فرض کرو کہ رگڑ کا یہ زاویہ صہ ہے اور فرض کرو کہ سیڑھی کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔ اب مثلث ا ج ن کے علم ہندسہ کی رو سے (۶۹)

$$\frac{\text{ا ج}}{\text{جب صہ}} = \frac{\text{ا ن}}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{2} + \text{عہ}\right)}$$



شکل (۴۷)

اور چونکہ ان ب ایک قائمہ زاویہ ہے ایسلیے

ان = اب جم (π/۲ - صہ - عہ)

اسلیے اج = ان جب صہ قط عہ

= اب جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ

اِسلیے پھسلن شروع ہوگی جوں ہی شخص اتنی بلندی پر چڑھ جائیگا جو پوری بلندی کا جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ گنا ہے۔

وہ شرط کہ شخص سیڑھی کے سِرے پر بغیر پھسلے پہنچ جائے یہ ہے کہ جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ اکائی سے بڑا ہو یعنی

جب صہ جب (صہ + عہ) > جم [(صہ + عہ) - صہ]

> جب صہ جب (صہ + عہ) + جم صہ جم (صہ + عہ)

اس لیئے شرط کے پورا ہونے کے لیے جم صہ جم (صہ + عہ) کو منفی ہونا چاہیے یعنی صہ + عہ، ۹۰° سے بڑا ہونا چاہیئے۔ اِس طرح سیڑھی اور انتصابی کا درمیانی زاویہ رگڑ کے زاویے سے چھوٹا ہونا چاہیئے۔ یہ شکل سے بھی ظاہر ہے کیونکہ جب شخص ب پر پہنچ جاتا ہے تو دو قوتیں یعنی ب پر کا تعامل اور شخص کا وزن دونوں ب میں سے گذرتے ہیں اور اِس لیے تیسری قوت بھی ب میں سے گذرنی چاہیئے یعنی ا پر کے تعامل کا خط عمل اب ہونا چاہیئے اور اگر سیڑھی عین یہاں پھسلتی ہے تو اب اور انتصابی کے درمیان زاویہ صہ ہونا چاہیئے۔

۴ — اگر مثال ماسبق میں سیڑھی کے پھسلے بغیر شخص کسی نقطہ ج تک چڑھ جائے تو ا اور ب پر کے تعاملات کیا ہوں گے؟

یہاں یہ معلوم نہیں ہے کہ تعاملات عمادوں کے ساتھ کیا زاوئے بناتے ہیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ زاوئے رگڑ کے زاوئے سے چھوٹے ہیں۔

فرض کرو کہ ہم ا پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل۱، ف۱ میں اور ب پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل، ف میں تحلیل کرتے ہیں، یہ اجزائے ترکیبی اُفقی اور انتصابی ہیں حسب شکل۔ اب اِس نظام پر جو شخص اور سیڑھی سے ترکیب پاتا ہے عمل کرنے والی قوتیں پانچ ہیں:

ل$_1$، ف$_1$، ل$_2$، ف$_2$، اور و

انتصاباً تحلیل کرنے سے

و − ل$_1$ − ف$_2$ = ۰ .... (ا)

افقاً تحلیل کرنے سے

ف$_1$ − ل$_2$ = ۰ .... (ب)

ا کے گرد معیار لینے سے

و = اج جم ع − ف$_2$ × اب جم ع − ل$_2$ × اب جب ع = ۰

.... (ج)

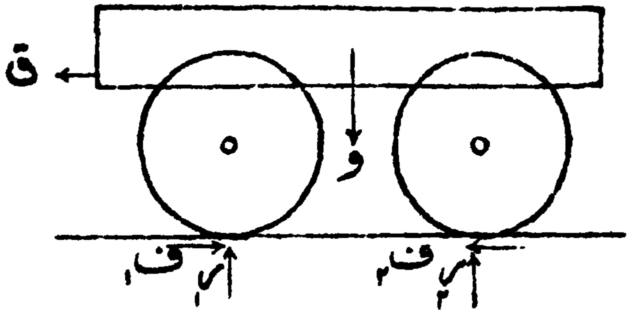
چار مقداریں معلوم کرنی ہیں اور ابتک صرف تین مساواتیں حاصل ہوئی ہیں (۷۰)

بلا شبہ قوتوں کو دوسری سمتوں میں تحلیل کرکے اور دوسرے نقطوں کے گرد معیار لیکر ہم دوسری مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتیں نئی نہیں ہیں بلکہ صرف وہی مساواتیں ہیں جن کا درست ہونا ان مساواتوں میں مضمر ہے جو اوپر حاصل کی جاچکی ہیں ۔ اس طرح قوتوں کو تحلیل کرنے اور معیاروں کو لینے سے ہم تین سے زیادہ غیر تابع مساواتیں حاصل نہیں کر سکتے اور یہ مساواتیں چار نامعلوم مقداروں کو متعین کرنے کے لیے کافی نہیں ہیں ۔

ہم نے یہاں ایک ایسا مسئلہ پیش کیا ہے جو ان طریقوں سے جو اس باب میں سمجھائے گئے ہیں حل نہیں ہو سکتا اور اس کے حل کے لیے قوتوں کے ان نظاموں پر غور کرنے کی ضرورت ہے جو اجسام کے مختلف ذرات کے درمیان پیدا ہوتے ہیں ۔ طالب علم کو اس حقیقت کا جان لینا ضروری ہے کہ ایسے مسئلے موجود ہوتے ہیں اگرچہ وہ ان کو فی الحال حل کر سکنے کے قابل نہ ہو ۔

۵ ۔ قوت جو گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے ۔ اس مسئلہ کو سادہ سے سادہ بنانے کے لیے فرض کرو کہ گاڑی چار مساوی پہیوں پر بنائی گئی ہے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ا ہے اور ہر ایک نصف قطر ب کے محور کے گرد گردش کرتا ہے اور فرض کرو کہ پہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر ہر پہیہ کے لیے

رہی ہے ۔ فرض کرو کہ قوت ق کو اتفاقاً لگانے سے وہ گاڑی کو حرکت میں لانے کے لیے عین کافی ہوتی ہے ۔



شکل (۳۸)

اول پوری گاڑی کے توازن پر غور کرو ۔ کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتوں کو شمار کرنے کا سب سے زیادہ سہولت بخش طریقہ یہ ہے کہ پہلے ہم اپنے تصور میں ایک ایسا قالب لیں جو نظام پر عین ٹھیک بیٹھتا ہو اور پھر اس کی پوری سطح پر چلکر وہ قوتیں دیکھے جائیں جو اس کے مختلف نقطوں پر عمل کرتی ہیں ۔ یہ قوتیں اور پورے نظام کا وزن ملکر قوتوں کا کُل نظام حاصل ہوگا ۔ اس طریقہ سے گاڑی پر عمل کرنے والی قوتوں کو معلوم کیا جائے تو وہ حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں :

(ا) اس کا وزن و ،

(ب) افقی قوت عاملہ ق ،

(ج) پہیوں اور زمین کے درمیان تعاملات ۔ فرض کرو کہ ہر تعامل کو ایک انتصابی جزو ترکیبی م اور ایک افقی جزو ترکیبی ف میں تحلیل کیا گیا ہے ۔ فرض کرو کہ پہلے پہیہ اور زمین کے درمیان جو تعامل ہے اس کے اجزائے ترکیبی کو ف۱ م۱ سے تعبیر کیا گیا ہے، دوسرے پہیہ کے لیے متناظر مقداروں کو ف۲، م۲ سے اور علیٰ ہذا القیاس ۔

(۷۱) (پہیہ اور زمین کے درمیان عمل کرنے والی رگڑ کی قوت کے متعلق ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ حرکت وقوع پذیر ہونے کو ہے لیکن یہ حرکت زمین اور پہیہ کے درمیان

پھسلن کی قسم کی نہیں ہے اور اس لیے کسی پہیہ کے لیے ف کو جو نسبت ر کے ساتھ ہے وہ پہیہ اور زمین کے درمیان رگڑ کی قدر نہیں ہے۔)

وہ قوتیں جو اوپر شمار کی گئی ہیں گاڑی کو توازن میں رکھتی ہیں۔ اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے اور اسی طرح کسی خط کے گرد ان کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔ افقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ق} = \text{ف}_1 + \text{ف}_2 + \text{ف}_3 + \text{ف}_4 \ldots\ldots \quad (\text{ا})$$

$$\text{و} = \text{ر}_1 + \text{ر}_2 + \text{ر}_3 + \text{ر}_4 \ldots\ldots \quad (\text{ب})$$

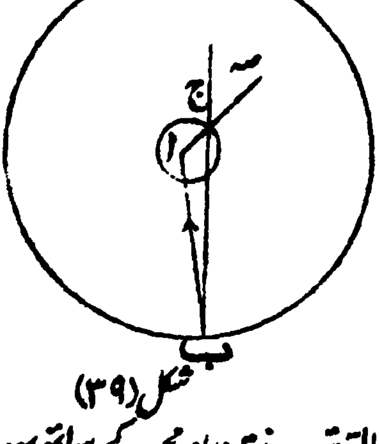
کسی خط کے گرد معیار لینے سے کچھ بھی فائدہ نہ ہوگا، چونکہ ق کا خط عمل معلوم نہیں ہے اس لیے ہم اس کا معیار معلوم نہیں کر سکتے۔

ثانیاً ایک واحد پہیہ کے توازن پر غور کرو۔ پہیہ زمین کو مس کرتا ہے اور محور کو بھی کسی نقطہ ج پر مس کرتا ہے۔ (ہم محور کو ایک ایسے نصف قطر کا دائرہ خیال کر سکتے ہیں جو پہیہ کے ناف کے اندرونی دائرہ کے نصف قطر سے بہت ہی خفیف فرق رکھتا ہے)۔ چنانچہ پہیہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اس کا تعامل زمین کے ساتھ،

(ب) اس کا تعامل محور کے ساتھ،

(ج) اس کا وزن، جس کو ہم نظر انداز کریں گے کیونکہ وہ گاڑی کے وزن کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہے۔



شکل (۳۹)

اس تیسری قوت کو نظر انداز کرنے سے دو قوتیں رہ جاتی ہیں جو مساوی اور مخالف ہونی چاہئیں۔ چنانچہ ہر ایک کا خط عمل وہ خط ہے جو ب اور ج کو ملاتا ہے جو علی الترتیب زمین اور محور کے ساتھ پہیہ کے نقاط تماس ہیں۔ چونکہ ج پر پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہے اس لیے ج پر کا تعامل، ج پر کے عماد ا ج کے ساتھ زاویہ صہ بنائیگا یعنی رگڑ کے زاویہ کے مساوی

اسی طرح زاویہ ب ج ا، صہ کے مساوی ہے۔
مثلث ا ج ب میں ا ج = ب، ا ب = ا اور زاویہ ا ج ب = صہ۔ اس لیے

$$\frac{ا}{\text{جب } ا ب ج} = \frac{ب}{\text{جب صہ}}$$

لیکن چونکہ ب ج پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی، ا ب کے متوازی اور اس کے عمود وار، کا اور فا ہیں اس لیے

$$\text{مس } ا ب ج = \frac{ف_1}{ک_1}$$

اس طرح $$\frac{ف_1}{ک_1} = \text{مس } ا ب ج$$

$$= \frac{\text{جب } ا ب ج}{\sqrt{1 - \text{جب}^2 ا ب ج}}$$

$$= \frac{\text{ب جب صہ}}{\sqrt{ا^2 - ب^2 \text{جب}^2 \text{صہ}}}$$

(۷۲) اب چونکہ صہ، ا، اور ب ہر پہیہ کے لیے وہی فرض کئے گئے ہیں اس لیے

$$\frac{\text{ب جب صہ}}{\sqrt{ا^2 - ب^2 \text{جب}^2 \text{صہ}}} = \frac{ف_1}{ک_1} = \frac{ف_2}{ک_2} = \frac{ف_3}{ک_3} = \frac{ف_4}{ک_4}$$

$$= \frac{ف_1 + ف_2 + ف_3 + ف_4}{ک_1 + ک_2 + ک_3 + ک_4}$$

$= \frac{ق}{و}$، مساواتوں (ا) اور (ب) کی رُو سے

اس لیے $$ق = \frac{\text{و ب جب صہ}}{\sqrt{ا^2 - ب^2 \text{جب}^2 \text{صہ}}}, \quad \ldots\ldots\ldots (ع)$$

اس مساوات سے مطلوبہ افقی قوت حاصل ہوگی۔

ب کی قیمت جو محور کا نصف قطر ہے بالعموم ا کے مقابلہ میں جو پہیہ کا نصف قطر ہے چھوٹی ہوگی ۔ اس لیے بغیر کسی قابل قدر خطا کے ہم ا کے مقابلہ میں ب جب مہ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور مساوات (ج) کے نسب نما میں صرف ا رکھ سکتے ہیں ۔ چنانچہ یہ مساوات اب ہو جاتی ہے

$$ق = \frac{و ب جب مہ}{ا}$$

$\frac{ب}{ا}$ کو بہت چھوٹا کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ گاڑی کو بہت ہی آسانی سے چلایا جا سکتا ہے ۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر پہیہ اور محور کے درمیان اتنی بڑی رگڑ بھی ہو کہ رگڑ کی قدر کو لامتناہی سمجھا جا سکے تو بھی جب مہ = ۱ اور اس لیے

$$ق = \frac{و ب}{ا}$$

اور اس لئے گاڑی کھینچنے کے لیے جو قوت درکار ہوگی وہ پھر بھی اُس قوت کے مقابلہ میں چھوٹی ہوگی جو اتنے ہی وزن کو کافی چکنی سطح پر کھینچنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے ۔

اِس تحلیل میں ہم نے مان لیا ہے کہ پہیئے زمین کو صرف اپنے زیر ترین نقطوں پر مس کرتے ہیں ۔ یہ بڑی حد تک اُس صورت میں صحیح ہے جبکہ فولادی پہیئے فولادی پٹڑیوں پر لڑھک رہے ہوں لیکن اِس کا اطلاق اُس مسئلہ پر نہیں ہوتا جبکہ معمولی بندی نرم سڑک پر حرکت کر رہی ہو کیونکہ پہیئے کچھ حد تک سڑک میں دھنسے رہتے ہیں ۔ فی الحقیقت اگر مندرجۂ بالا تحلیل میں وہ سب واقعات شامل کرلئے جائیں جو ایسی صورت میں پیش آتے ہیں تو یہ ظاہر ہے کہ گاڑی کو کھینچنے میں جو قوت مطلوب ہوگی وہ سڑک کی حالت پر منحصر ہوگی ۔

مثالیں

۱ ۔ ۲۵۰ پونڈ کا ایک وزن ایک ہلکے ڈنڈے سے جو دو آدمیوں کے

کندھوں پر ہے لٹکا ہوا ہے اور یہ آدمی اسے افقی محل میں لیجا رہے ہیں ـ اگر آدمی ایک دوسرے سے ۱۰ فٹ کے فاصلہ سے چلیں اور وزن قریب تر آدمی سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو معلوم کرو کہ ہر شخص کتنا وزن لیے جا رہا ہے ـ

۲ ـــ ایک [redacted] لٹکایا گیا ہے ـ سہاروں کے درمیان فاصلہ ۶ فٹ ہے ـ وزن کو ایک سہارے سے ۶ انچ قریب تر حرکت دینے پر اِس سہارے پر کا دباؤ بقدر ۱۰ پونڈ کے بڑھ جاتا ہے ـ وزن کی مقدار کیا ہے ؟

۳ ـــ ایک ترازو کے دو پلڑوں میں سے ہر ایک کا وزن ۸ اونس ہے اور ہر ایک نصاب سے ۷ انچ کے فاصلہ پر ڈنڈی سے لٹکا ہوا ہے ـ ایک بے ایمان تاجر ایک پلڑے کو نصاب سے نصف انچ قریب تر کرتا ہے اور اِس میں کچھ وزن کا اضافہ کر دیتا ہے تاکہ دونوں پلڑے متوازن ہو جائیں ـ یہ اضافہ شدہ وزن معلوم کرو اور بتاؤ کہ اُس کی اِس بے ایمانی سے اُس کو کتنا زیادہ فائدہ ہوگا ـ

۴ ـــ ایک ترازو کی ڈنڈی کے ایک سِرے سے ۲۰ اونس کا ایک وزن لٹکایا گیا ہے ـ ڈنڈی کے دوسرے سِرے پر نصاب سے مساوی فاصلہ پر ایک ڈوری باندھ دی گئی ہے جو افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے ـ اِس ڈوری کو کِس قوت سے کھینچنا چاہیئے کہ ترازو کی ڈنڈی افقی محل میں رہے ـ

۵ ـــ ۸ فٹ لمبے ڈنڈے کو ایک جسم کے ہٹانے میں استعمال کرنا ہے ' یہ معلوم ہے کہ اِس جسم پر ۵۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت انتصابا اوپر وار لگانے سے اسکو ہٹایا جا سکتا ہے ـ ڈنڈے کے سِرے سے کس قدر قریب نصاب کو رکھنا چاہیئے کہ ۱۴۰ پونڈ وزن کا ایک شخص اِسں کے دوسرے سِرے پر کھڑے رہ کر مطلوبہ قوت لگا سکے ـ

۶ ـــ ناقابل قدر وزن کا ایک میز متعدد پایوں پر قائم ہے ـ ایک وزنی ذرہ میز پر رکھا گیا ہے ـ ثابت کرو کہ میز الٹ جائیگا اگر ذرہ میں سے گذرنے والا انتصابی میز کے نیچے کے فرش سے اُس کثیر الاضلاع کی بیرونی جانب جو فرش پر پایوں کے نقاط تماس کو ملانے سے بنتا ہے ایک نقطہ پر ملے ـ

۷۔ ناقابل قدر وزن کا ایک میز تین پایوں پر قائم ہے جو ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ ایک وزنی ذرہ کو میز پر ایسے محل میں رکھا گیا ہے کہ میز الٹنے نہیں پاتا۔ وزن کا تناسب معلوم کرو جو ہر پایہ پر ہے۔

۸۔ ایک کارڈ افقی محل میں تین مساوی ناامتدادپذیر ڈوریوں کے ذریعہ جو کارڈ کے تین نقطوں ا، ب، ج سے بندھی ہیں اور نیز کارڈ کے اوپر ایک نقطہ ن سے بندھی ہیں لٹکا ہوا ہے اور ا، ب، ج ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ کارڈ کے کسی نقطہ ق پر جو مثلث کے اندر ہے ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۹۔ ایک کارڈ چار مساوی ناامتدادپذیر ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے جو کارڈ کے اندر ایک مربع کے چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرتی ہیں اور چار نقطوں اَ، بَ، جَ، دَ سے بندھی ہیں جو نقطوں ا، ب، ج، د کے انتصاباً اوپر مساوی بلندیوں ف پر ہیں۔ کارڈ پر مربع ا ب ج د کے اندر کسی نقطہ ن پر ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ، ڈوریوں کے اندرونی زوروں (Stresses) پر غور کئے بغیر متعین نہیں ہو سکتے۔

۱۰۔ اگر پچھلی مثال میں ڈوریوں کے اندرونی زور، ڈوریوں کو بہت خفیف طور پر وسیع کریں تاکہ کلیہ ہک کی پابندی ہو تو ثابت کرو کہ تناؤ معلوم کئے جا سکتے ہیں اور انہیں معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مستطیلی تختہ نصف قطر ا کے ایک کھردرے دائری کندے پر جو افقاً ثابت ہے لڑھکتا ہے۔ دو شخص تختہ کے وسطی نقطہ سے فاصلوں ب، ج پر کھڑے ہیں، ان کے وزن ایسے ہیں کہ تختہ عین افقاً متوازن ہے اور اس کا وسطی نقطہ کندے پر ٹکا ہوا ہے۔ پہلا شخص کندے کے مرکز کی جانب فاصلہ د تک حرکت کرتا ہے۔ کس زاویے میں سے تختہ گردش کرے گا؟ شخص کتنے آگے بڑھ سکتا ہے قبل اس کے کہ تختہ کندے سے بالکل پھسل پڑے۔

۱۲۔ نصف قطر ا کے دو پہیئے، نصف قطر ب کے ایک محور سے مربوط کئے گئے ہیں اور وہ افقی پٹڑیوں پر جا رہے ہیں۔ محور کے گرد ایک ڈوری لپیٹی گئی ہے

اور اِس کا سرا محور سے نکل کر افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے ۔ اگر اِس ڈوری کو ایک شخص کھینچے تو ثابت کرو کہ پہیئے شخص کی جانب حرکت کریں گے یا اُس سے پرے ہٹینگے ہو جب اِس کے کہ جم طہ ، ب/ا سے بڑا یا چھوٹا ہو ۔ کیا ہوگا جبکہ جم طہ = ب/ا ؟

۱۳ ۔ اگر ایک گاڑی کے پہیوں اور محوروں کا وزن و ہو اور اگر اسے وَ کے مقابلہ میں جو گاڑی کا کل وزن ہے نظر انداز نہ کیا جا سکے تو ثابت کرو کہ مثال ۵ صفحہ ۱۰۶ کی مساوات (ج) حسب ذیل ہونی چاہیے (۴۴)

$$ق = \frac{(وَ - و) \; ب \; جب \; صہ}{\sqrt{ا^2 - ب^2 \; جب^2 \; صہ}}$$

۱۴ ۔ ایک انجن جس کا وزن ۱۳۴ پونڈ ہے ایک بوگی پر جس کے پہیئے اور محور ۴ ٹن وزن کے ہیں اور چلاؤ پہیوں کے دو جوڑوں پر جن کے پہیے اور محور ۱۰ ٹن وزن کے ہیں ساکن ہے ۔ بوگی کے محوروں پر ۴۰ ٹن کا وزن اور چلاؤ پہیوں کے محوروں پر ۸۰ ٹن کا وزن بار کیا گیا ہے ۔ پہیوں کے نصف قطر علی الترتیب ۲/۰۱ اور ۷/۰۱ ہیں ۔ ہر محور جہاں وہ محور صندوق میں سے گذرتا ہے ۱/۲ ۲ انصف قطر کا ہے اور رگڑ کی قدر ۱/۵ ہے ۔ وہ افقی قوت معلوم کرو جو انجن کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے ۔

۱۵ ۔ مثال ۱۴ میں پٹڑیوں پر چکنائی لگائی گئی ہے تاکہ ان میں اور پہیوں کے درمیان رگڑ کی قدر ۱/۱۰۰ سے بھی کم ہو ۔ ثابت کرو کہ انجن کو ، چکنے پٹڑیوں پر پہیوں کو گھسیٹے بغیر چلایا نہیں جا سکتا اور اُن حرکی اعمال کی تشریح کرو جن سے اِس صورت میں انجن کو حرکت میں لایا جا سکتا ہے ۔

ڈوریاں

۵۳ ۔ ڈوریاں ، رسیاں اور زنجیریں اکثر اجسام کے اُن نظامات کا جزو ہوتی ہیں جو سکونیاتی مسائل سے تعلق رکھتے ہیں اور اِس لیے ڈوری (یا رسی یا زنجیر) کے توازن پر غور کرنا ضروری ہے ۔ پہلا مسئلہ جس پر ہم غور کریں گے

ایک ایسی ڈوری کا ہے جو ایک سطح پر مثلاً چرخی کے پہیہ پر تنی ہوئی ہو، یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ ڈوری کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یہ کہ ڈوری اور سطح کے درمیان تماس تمام نقطوں پر برابر کھردرا ہے۔ نیز یہ بھی فرض کیا جائے گا کہ ڈوری پوری کی پوری ایک مستوی میں ہے۔

فرض کرو کہ ڈوری کے دو متصلہ نقطے ف، ق باہم اس قدر قریب ہیں کہ ڈوری کے حصہ ف ق کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔

اس ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہوں گی:

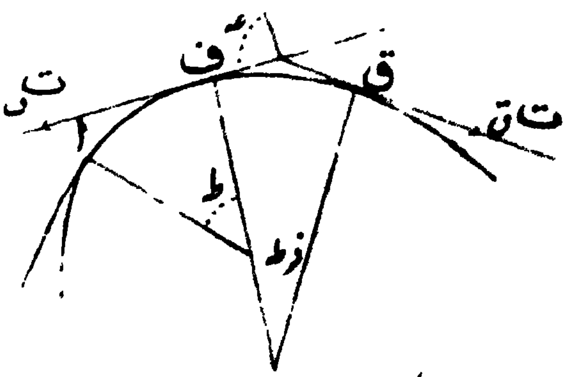
(ا) $ت_ف$، نقطہ ف پر کا تناؤ جو ڈوری کے نقطہ ف پر کے مماس کی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ب) $ت_ق$، نقطہ ق پر کا تناؤ جو ڈوری کے نقطہ ق پر کے مماس کی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ج) تعامل سطح کے ساتھ۔

لامی کے مسئلہ کی رو سے ہر قوت اس زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے جو باقی دو قوتوں کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ا سطح کا وہ نقطہ ہے جس پر ڈوری سطح کو چھوڑتی ہے۔ (۵۵)
فرض کرو کہ سطح کے عماد نقاط ا، ف، ق پر کھینچے گئے ہیں اور فرض کرو کہ ف پر کا عماد، ا پر کے عماد سے زاویہ ط بناتا ہے۔ اگر نقاط ا، ف، ق اسی ترتیب میں ہوں (دیکھو شکل ۴۰) تو ق پر کا عماد، ف پر کے عماد سے



شکل (۴۰)

ایک ایسا زاویہ بنائے گا جو طہ سے خفیف طور پر بڑا ہوگا، فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ + فرطہ ہے تو فرطہ وہ چھوٹا زاویہ ہے جو ف اور ق پر کے عادوں کے درمیان ہے۔

اس ترقیم کی رو سے تناؤں ت ا ن اور ت ا ق کے درمیان زاویہ ۲۲ ۔ فرطہ ہے ۔ فرض کرو کہ تعامل س اور تناؤ ت ا ن کے درمیان زاویہ عہ ہے تو تناؤ ت ا ق اور س کے درمیان زاویہ ۲۲ ۔ عہ ۔ فرطہ ہوگا۔ اس لیے

$$\frac{\text{س}}{\text{جب}(۲۲-\text{فرطہ})} = \frac{\text{ت ا ن}}{\text{جب}(۲۲-\text{عہ}+\text{فرطہ})} = \frac{\text{ت ا ق}}{\text{جب عہ}}$$

چونکہ جب (۲۲ ۔ عہ + فرطہ) = جب (عہ ۔ فرطہ) اس لیے

$$\frac{\text{ت ا ق}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{ت ا ن}}{\text{جب}(\text{عہ}-\text{فرطہ})}$$

اور جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلے سے ہر کسر

$$= \frac{\text{ت ا ق} - \text{ت ا ن}}{\text{جب عہ} - \text{جب}(\text{عہ}-\text{فرطہ})}$$

اب ت ا ق ۔ ت ا ن، ت کا اضافہ ہے جبکہ طہ، طہ سے طہ + فرطہ تک تبدیل ہوتا ہے اور یہ تفرقی احصاء کی ترقیم میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}\ \text{فرطہ}$$

(۶) نیز نسب نما جب عہ ۔ جب (عہ ۔ فرطہ)، جب عہ کا اضافہ ہے جبکہ عہ، عہ ۔ فرطہ سے عہ تک بدلتا ہے اور یہ بھی اسی طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فر}(\text{جب عہ})}{\text{فرعہ}}\ \text{فرطہ یا جم عہ فرطہ}$$

اس لئے ابتدائی کسر

$$= \frac{\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}\ \text{فرطہ}}{\text{جم عہ فرطہ}} = \text{قط عہ}\ \frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}$$

اس لیے   (ت ق) / (بب عہ) = ٹا عہ   (ف ت) / (ف طہ)

یا   ت ق = مس عہ (ف ت) / (ف طہ) ، .... (۱۲)

جب انتہا میں ذرہ ف ق کو لاانتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو

ت ف اور ت ق ناقابل امتیاز ہو جاتے ہیں۔ فرض کرو ان میں سے کسی ایک کو ت سے تعبیر کیا گیا ہے اور اس لیے ت صرف ایک نقطہ پر کا تناؤ ہے۔ کا عماد ا پر کے عماد کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ اگر ڈوری سمت ا ف ق میں حرکت پھسلنے کو ہو تو نقطہ ق یا ف کسی ایک پر کے عماد اور تعامل ر کے درمیان زاویہ صہ بنے گا جو رگڑ کا زاویہ ہے۔ اس لیے حاصل ہونا چاہیے

عہ = π/۲ − صہ

اس لیے مس عہ = مم صہ اور مساوات (۱۲) ہو جاتی ہے

ت = مم صہ (ف ت) / (ف طہ) ، .... (۱۳)

۵۴ — اگر سطح اور ڈوری کے درمیان تماس کامل چکنا ہو تو صہ = ۰ اور اس لیے (ف ت) / (ف طہ) = ۰۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ت مستقل ہے یعنی ڈوری کے تمام نقطوں پر تناؤ ایک ہی ہے۔ اس لیے کسی ڈوری کا تناؤ نہیں بدلتا جبکہ اسے ایک چکنی سطح پر سے گذارا جاتا ہے، یہ وہی نتیجہ ہے جو دفعہ ۴۶ میں حاصل ہو چکا ہے۔

۵۵ — بالعموم تماس عملاً کامل چکنا نہیں ہوتا، فرض کرو کہ رگڑ کی قدر مہ ہے، اس لیے

مہ = مس صہ اور مساوات (۱۳) لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\text{فر ت}}{\text{فر طہ}} = \text{مہ ت}$$

اور تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{فر ت}}{\text{ت}} = \text{فر (مہ طہ)}$$

$$\text{فر (لوک ت)} = \text{فر (مہ طہ)}$$

یا

$$\text{لوک ت} = \text{مہ طہ} + \text{مستقل}$$

فرض کرو کہ ا پر کا تناؤ ت۔ ہے تو طہ = ۰ رکھنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ یہ مستقل لوک ت۔ کے مساوی ہونا چاہئے، اس لیے

$$\text{لوک ت} - \text{لوک ت۔} = \text{مہ طہ}$$

یا

$$\text{ت} = \text{ت۔ و}^{\text{مہ طہ}}$$

اگر ڈوری سطح کو مکرر کسی نقطہ ب پر چھوڑے اور اس نقطہ پر کا عماد، ا پر کے عماد کے ساتھ زاویہ سہ بنائے تو ب پر کے تناؤ کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \text{ت۔ و}^{\text{مہ سہ}}$$

اس لیے تناؤ، ا سے ب تک سطح پر گذرنے میں $\text{و}^{\text{مہ سہ}}$ سے ضرب کھا جاتا ہے۔

اگر ڈوری (یا رسی) ایک ستون یا مستول کے گرد اگرد لپیٹی جائے تو ہر مکمل پھیر کے لیے تناؤ نسبت $\text{و}^{\text{۲ مہ}\pi}$ میں بڑھ جاتا ہے۔ بلوط پر سن کی رسی کے لیے رگڑ کی قدر مورِن (Morin) کی تحقیق کی بموجب مہ = ۵۳ء۰ ہے۔ اس لیے ۲ مہ π = ۳ء۳۴ اور $\text{و}^{\text{۲ مہ}\pi}$ = ۲۸ء۱ — اس لیے سن کی رسی کا تناؤ جو بلوط کے ستون کے گرد لپیٹی گئی ہو ہر مکمل پھیر کے لیے تقریباً اٹھائیس گنا بڑھ جاتا ہے۔

مثالیں

۱- ایک وزن کو ایک رسی سے لٹکایا گیا ہے جو ایک افقی شہتیر کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور جو شہتیر سے افقاً نکلتی ہے۔ اس کا سرا ایک مزدور کے قابو میں ہے

اگر رسی شہتیر کے گرد $\frac{1}{4}$ ۱ مکمل پھیروں میں لپیٹی گئی ہو تو مزدور کو کتنی قوت لگانی چاہیے کہ

(ا) وزن پھسلنے نہ پائے،

(ب) وزن اُٹھے، (م = $\frac{1}{4}$ فرض کرو)۔

۲ — $\frac{1}{2}$ ۲ پونڈ کا ایک وزن ایک کھردرے میز پر قائم ہے۔ وزن کے قاعدہ سے ایک رسی باندھ دی گئی ہے جو میز کے کنارے پر سے لٹکتی ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ایک دوسرا وزن باندھا گیا ہے جو آزادانہ لٹکتا ہے۔ اگر میز اور وزن کے درمیان اور میز اور ڈوری کے درمیان رگڑ لی قدر علی الترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہو تو معلوم کرو کہ لٹکتا وزن کتنا بھاری ہونا چاہیئے کہ دوسرا وزن میں حرکت کر سکے۔ (۰۸)

۳ — ۲۵۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک جہاز کے پیٹے سے اُٹھانا ہے۔ ایک رسی جو وزن سے بندھی ہے ایک بھاپ ڈنڈا چرخ کے گرد $\frac{1}{4}$۳ پھیروں میں لپیٹی ہوتی ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک ملاح پکڑے ہوئے ہے۔ اُس کو رسی کا سرا کتنی قوت سے کھینچنا چاہیئے کہ وزن اُٹھ سکے جبکہ ڈنڈا چرخ حرکت میں ہو۔ (م = $\frac{1}{8}$)۔

۴ — مثال ماسبق میں رسی پہ کتنی قوت لگانی چاہیئے اگر ڈنڈا چرخ ساکن ہو۔

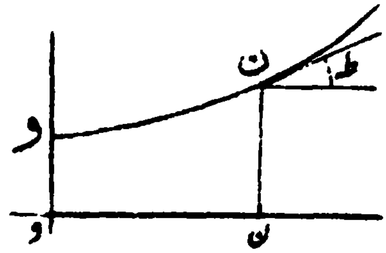
۵ — یہ معلوم ہوا کہ دو آدمی ایک وزن کو جو ایک رسی سے بندھا ہے سہار سکتے ہیں جبکہ رسی ایک ستون کے گرد تین پھیروں میں لپٹی ہوئی ہو۔ اور صرف ایک آدمی سہار سکتا ہے جبکہ رسی صرف ساڑھے تین پھیروں میں لپٹی ہوئی ہو۔ اگر ہر آدمی ۲۲۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچ سکتا ہے تو سہارے ہوئے وزن کی مقدار معلوم کرو۔

۶ — رسا کھینچنے کے ایک مقابلہ میں (Tug of war) یہ دیکھا گیا کہ رسی عین نازک موقع پر ایک ستون سے رگڑ کھاتی ہے اور اسلئے رسی کے دو حصے ایک دوسرے سے $^{\circ}$۱ کا زاویہ بناتے ہیں۔ اگر رسی اور ستون کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{6}$ ہو تو ثابت کرو کہ اس واقعہ سے جیتنے والے گروہ پر اپنی کل کھینچ کا ۱.۰۲۹ گنا زائد بار پڑتا ہے۔

جھولا پل

۵۶ - جھولا پل سے ایک دلچسپ سوال ہمارے سامنے پیش ہوتا ہے۔ اس میں پل (جسے افقی فرض کیا گیا ہے) کے وزن کو ایک موٹا تار انتصابی زنجیروں کے ذریعہ جو پل کو تار سے مربوط کرتی ہیں سہارتا ہے۔

فرض کرو کہ زنجیروں اور تار کے اوزان نظر انداز کئے گئے ہیں اور پل کا وزن اس کے طول پر یکساں طور پر منقسم ہے۔ فرض کرو کہ تار کا زیر ترین نقطہ و ہے اور کوئی اور نقطہ ن ہے۔ فرض کرو کہ و، ن کے انتصاباً نیچے پل کے نقطے و، ن



شکل (۴۱)

ہیں۔ فرض کرو کہ و ن = لا۔ فرض کرو کہ ن پر کا تناؤ ت ہے اور و پر کا ھ۔ فرض کرو کہ ن پر تار کی سمت، افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔

(۹،) تار کے ٹکڑے و ن پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) و پر کا تناؤ ھ جو افقاً عمل کرتا ہے،

(ب) ن پر کا تناؤ ت جو افق کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ج) انتصابی زنجیروں کے تناؤ جو سب کے سب انتصاباً عمل کرتے ہیں۔

قوتوں کو افقاً تحلیل کرنے سے

ھ - ت جم طہ = ۰، .... (۱۵)

انتصاباً تحلیل کرنے سے

ت جب طہ - س = ۰

جہاں س ان تمام زنجیروں کے تناؤں کا مجموعہ ہے جو و اور ن کے درمیان

تار سے لٹک رہی ہیں۔ یہ تناؤ پل کے حصہ ون کو سہارتے ہیں اور اگر پل کا وزن فی اکائی طول و ہو تو ون کا وزن ولا ہوگا۔ اس لیے س = ولا اور اس لیے

ت جب طہ = ولا، .... (۱۶)

اس مساوات اور مساوات (۱۵)

ت جم طہ = ھ، .... (۱۷)

سے مطلوبہ معلومات حاصل ہوں گی۔

وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جو تار کی ہونی چاہیے تاکہ پل افقاً لٹک سکے ہمیں طہ اور لا کے درمیان ایک رشتہ حاصل کرنا ہوگا۔ چنانچہ مساواتوں (۱۶) اور (۱۵) سے ہم ت کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{و}}{\text{ھ}}\,\text{لا}$$

اگر پل کے اوپر تار کا ارتفاع ما ہو تو تار کے کسی نقطہ ن کے کارتیزی محدد لا، ما سمجھے جا سکتے ہیں اور ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس ن کے محدد لا، ما رشتہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{و}}{\text{ھ}}\,\text{لا}$$

کے ذریعہ مربوط ہیں۔ تکمل کرنے سے

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}}{\text{ھ}}\,\text{لا}^2 + \text{ج}$$

جہاں ج تکمل کا مستقل ہے۔

(۸۰) مساوات بالا تار کی کارتیزی مساوات ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ وہ وتر خاص $\frac{2\text{ھ}}{\text{و}}$ کے ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لیے تار کو

مکافی کی شکل میں لٹکنا چاہیئے۔ افقی تناؤ بڑا ہو تو مکافی کا وتر خاص بھی بڑا ہوگا اور اس لیے تار کا منحنی زیادہ چوڑا ہوگا۔ کامل طور پر مستقیم تار بلا شبہ ناممکنات سے ہے کہ اس صورت میں لامتناہی تناؤ کی ضرورت ہے۔

۵۷ — تار کے کسی نقطہ پر تناؤ معلوم کرنے کے لیے ہم مساواتوں (۱۶) اور (۱۷) کا مربع لیتے ہیں اور متناظر طرفین کو جمع کرتے ہیں۔ اس طرح

$$ت^۲ = ھ^۲ + و^۲ لا^۲$$

اس مساوات سے اُس نقطہ پر کا تناؤ حاصل ہوگا جس کا فاصلہ مرکز سے لا ہے۔ اگر پُل کا طول ۲ ا ہے تو اس کے کسی ایک سرے پر تناؤ

$$\sqrt{ھ^۲ + و^۲ ا^۲}$$

ہونا چاہیئے۔

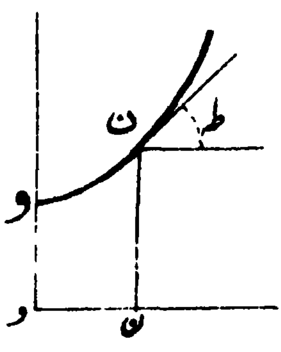
زنجیرہ

۵۸ — جھولا پُل کے مسئلہ میں ہم نے تار کے وزن کو نظرانداز کیا ہے۔ ایک دوسرا مسئلہ پیدا ہوتا ہے جبکہ تار پر سوائے اس کے ذاتی وزن کے کوئی اور بیرونی قوتیں عمل نہ کریں۔ یہ مسئلہ صرف اُس ڈوری کا مسئلہ ہے جسکے دو سرے دو ثابت نقطوں سے بندھے ہوں اور وہ ان نقطوں کے درمیان آزادانہ لٹک رہی ہو۔

حسب سابق فرض کرو کہ زیر ترین نقطہ و ہے اور کوئی دوسرا نقطہ ن ہے ڈوری کے حصہ و ن پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) و پر کا تناؤ ھ جو افقاً عمل کرتا ہے،

(ب) ن پر کا تناؤ ت جو افق کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے،



شکل (۴۲)

(ج) و ن کا وزن ۔ اگر ہم فرض کریں کہ ڈوری کا وزن فی اکائی طول و ہے اور فاصلہ و ن کو س سے تعبیر کریں تو یہ وزن و س ہے جو انتصاباً عمل کرتا ہے۔

(۸۱) افقاً تحلیل کرنے سے

ھ ۔ ت جم ط = ۰ ، ....(۱۸)

انتصاباً تحلیل کرنے سے

ت جب ط ۔ و س = ۰ ، ....(۱۹)

منحنی کی وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جس میں ڈوری لٹکتی ہے ہمیں ط اور س میں ربط معلوم کرنا چاہیے۔ ت کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ھ مس ط = و س

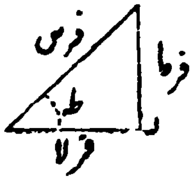
یا اگر ہم ھ/و کی بجائے ایک واحد مستقل م رکھیں تو

س = م مس ط ، ....(۲۰)

یہ منحنی کی مساوات کی ایک شکل ہے جس میں س اور ط محددوں کے طور پر لئے گئے ہیں۔ اس شکل میں مساوات کو منحنی کی **ذاتی مساوات** کہتے ہیں۔ لیکن اس مساوات کو کارٹیزی شکل میں اخذ کرنے کی ضرورت ہے۔

۵۹ ۔ اگر شکل (۴۲) میں نقطہ و کو مبداء اور محوروں کو افقی اور انتصابی لیا جائے تو حسب ذیل ربط فوراً حاصل ہوتا ہے

فرلا : فرما : فرس = جم ط : جب ط : ۱ ، ....(۲۱)



شکل (۴۳)

کیونکہ فرلا اور فرما، ڈوری کے طول کے چھوٹے عنصر فرس کے افقی اور انتصابی ظِل ہیں۔ اول ہم رشتوں (۲۱) کا استعمال مساوات (۲۰) کے متغیروں کو س اور ط سے س اور ما میں بدلنے کے لیے کریں گے۔

چنانچہ

$$\text{م}^{2}\text{س}^{2}\text{تم}^{2}\text{طہ} = \text{س}^{2}\text{تم}^{2}\text{طہ} - \text{س}^{2} = \text{س}^{2}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}\right)^{2} - \text{س}^{2}$$

اس لیے $\text{س}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}} = \sqrt{\text{س}^{2} + \text{م}^{2}}$

پس $\text{فرما} = \frac{\text{س فرس}}{\sqrt{\text{س}^{2} + \text{م}^{2}}}$

اور اس کو تکمل کرنے سے

$$\text{ما} = \sqrt{\text{س}^{2} + \text{م}^{2}} + \text{مستقل} \quad \text{.........} \quad (۲۲)$$

ہم تکمل کے مستقل کو متعین کر سکتے ہیں اگر اس کا فیصلہ ہو جائے کہ مبدا، کو کہاں لینا چاہئے۔ ہم نے ابتک نقطہ و کو منفرد نہیں لیا ہے۔
(۸۲) چونکہ س سے منحنی کی وہ قوس تعبیر ہوتی ہے جو و سے پیمائش کی گئی ہے اس لیے نقطہ و پر س = ۰ اور اس لیے و کا ما محدد (مساوات (۲۲) میں س = ۰ رکھنے سے) حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{م} + \text{مستقل}$$

فرض کرو کہ ہم و د کو م کے مساوی بناتے ہیں، اس لیے و پر ما = م۔ اب تکمل کا نامعلوم مستقل صفر ہونا چاہئے۔ اس لیے مساوات (۲۲) ہو گی

$$\text{ما}^{2} = \text{س}^{2} + \text{م}^{2} \quad \text{.........} \quad (۲۳)$$

آخر میں ہمیں متغیروں کو ما اور س سے ما اور لا میں مستحیل کرنا ہے۔ وہ رشتہ جس کی مدد سے ہم ایسا کر سکتے ہیں رشتوں (۲۱) سے طہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے اور حسب ذیل ہے

$$(\text{فرس})^{2} = (\text{فرما})^{2} + (\text{فرلا})^{2} \quad \text{.........} \quad (۲۴)$$

چونکہ محصلہ مساوات

$$\text{س} = \sqrt{\text{ما}^2 - \text{م}^2}$$

ہے اس لیے

$$\text{فرس} = \frac{\text{ما فرما}}{\sqrt{\text{ما}^2 - \text{م}^2}}$$

اِس مساوات اور مساوات (۲۴) سے فرس کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ما}^2(\text{فرما})^2}{\text{ما}^2 - \text{م}^2} = (\text{فرما})^2 + (\text{فرلا})^2$$

اس سے

$$(\text{فرلا})^2 = (\text{فرما})^2 \left[\frac{\text{ما}^2}{\text{ما}^2 - \text{م}^2} - 1 \right]$$

$$= \frac{\text{م}^2}{\text{ما}^2 - \text{م}^2} (\text{فرما})^2$$

اس لیے

$$\text{فرلا} = \frac{\text{م فرما}}{\sqrt{\text{ما}^2 - \text{م}^2}} \quad \text{...........} \quad (۲۵)$$

اس کو تکمیل کرنے سے

$$\frac{\text{ما}}{\text{م}} = \text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{م}} \quad \text{...........} \quad (۲۶)$$

جہاں

$$\text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{م}} = \frac{1}{2} \left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}} \right)$$

طالب علم اگر زائدی جیب التمام (جمز) تفاعل سے واقف نہیں ہے تو وہ مساوات (۲۶) کی تصدیق اس طور پر کرسکتا ہے کہ اس کو تفرق کرکے دیکھے کہ آیا مساوات (۲۵) حاصل ہوتی ہے۔

(۸۳) مساوات (۲۶) اُس منحنی کی کارتیزی مساوات ہے جو ڈوری سے بنتا ہے۔ اِس منحنی کو زنجیرہ کہتے ہیں۔

مساوات (۲۳) سے س کی قیمت شکل

$$\text{س}^2 = \text{ما}^2 - \text{م}^2$$

$$= \text{م}^2 \left(\text{جمز}^2 \frac{\text{لا}}{\text{م}} - 1\right)$$

$$= \text{م}^2 \, \text{جبز}^2 \frac{\text{لا}}{\text{م}}$$

میں حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے

$$\frac{\text{س}}{\text{م}} = \text{جبز} \frac{\text{لا}}{\text{م}}$$

جہاں $\text{جبز} \frac{\text{لا}}{\text{م}} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}}\right)$

٦٠ — قوت نماؤں $\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}}$، $\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}}$ کو پھیلانے سے $\text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{م}}$ شکل

$$\text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{م}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^4 + \cdots\cdots$$

میں حاصل ہوتا ہے۔

جب تک لا چھوٹا ہے ہم اس سلسلہ کی تمام رقموں کو سوائے پہلی اور دوسری رقم کے نظرانداز کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ سے حاصل شدہ قیمت کو استعمال کرنے سے مساوات (٢٦) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

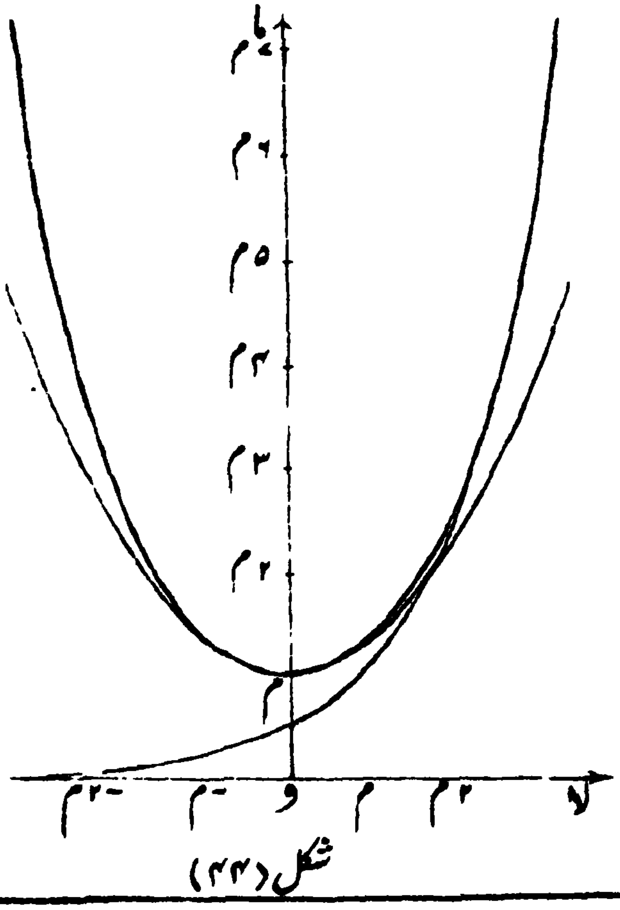
$$\text{ما} = \text{م} + \frac{\text{لا}^2}{2\text{م}}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک لا چھوٹا رہتا ہے منحنی قریب قریب ایک مکافی پر منطبق ہوتا ہے جس کا وتر خاص ٢ م یا ٢ ھ \ د ہے۔

یہ قطع مکافی وہ ہے جو جھولا پل کے تار سے بنتا ہے جبکہ تار کا افقی تناؤ ھ ہو

اور خود پل کا وزن فی اکائی طول و ہو۔ بلا شک یہ ظاہر ہے کہ جب تار تقریباً افقی ہوتا ہے تو اس امر سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ تار کا وزن اس کی قوس کے فی اکائی طول و ہے یا فی اکائی طول پر ایک وزن و اس سے لٹکایا گیا ہے تاکہ وہ افقی طور پر رہے۔

جب لا بڑا ہو یعنی اُن نقطوں پر جو زیر ترین نقطے سے دور واقع ہیں تو بھی ہم زنجیرہ کا ایک سادہ تقرب حاصل کر سکتے ہیں۔ جب لا بہت بڑا ہو تو $\frac{\text{لا}}{\text{م}}$ بہت بڑا ہوگا اور $\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}}$ کی قیمت بہت بڑی ہو جائے گی لیکن $\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}}$ کی قیمت بہت چھوٹی ہو جائے گی۔ اسلئے جمز $\frac{\text{لا}}{\text{م}}$ کی قیمت تقریباً $\frac{1}{2}\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}}$ ہو جائے گی اور زنجیرہ کی مساوات (۲۶)

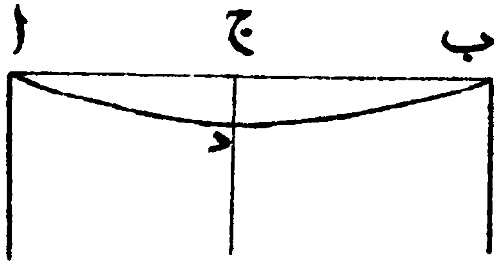


شکل (۴۴)

$$\frac{\text{ما}}{\text{م}} = \frac{۱}{۲}\,\text{و}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}}$$

ہو جائیگی۔ پس لا کی بڑی قیمتوں کے لئے زنجیرہ قوت نمائخنی پر منطبق ہوتا ہے۔
شکل (۴۴) میں زنجیرہ کی شکل دکھائی گئی ہے۔ بارِیک خطی حسب ذیل ہیں:
(ا) قطع مکافی، جس پر زنجیرہ تقریبًا منطبق ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں چھوٹی ہوں،
(ب) قوت نمائخنی، جن پر زنجیرہ تقریبًا منطبق ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں بڑی ہوں۔

(۸۵) **۶۱ ۔ خوب تنی ہوئی ڈوری کا جھوک** ۔ جب کوئی ڈوری یا تار اپنے پورے طول پر تقریبًا افقًا تنی ہوئی ہو —— مثلاً تار برقی کا تار —— تو جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ڈوری کافی تقرب تک ایک قطع مکافی بناتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ ا، ب مساوی ارتفاع کے دو ستون ہیں جن کے درمیان ایک تار تنا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور فرض کرو کہ د تار کا وہ نقطہ ہے جو ج کے نیچے انتصابًا واقع ہے۔



اب تشاکل سے تار کا زیریں ترین نقطہ د ہوگا اور اس لیے وہ مکافی کا راس ہوگا۔
اس لیے مکافی کی مساوات سے

$$\text{ج ب}^۲ = \frac{۲\,\text{ھ}}{\text{و}}\ \text{ج د}$$

شکل (۴۵)

کیونکہ اس کا وتر خاص بموجب دفعہ (۶۰) $\frac{۲\,\text{ھ}}{\text{و}}$ ہے۔
اس لیے اگر ف = ا ب تو جھوک ج د، مساوات

$$\text{ج د} = \frac{\text{و}}{۲\,\text{ھ}}\ \text{ج ب}^۲$$

$$= \frac{۱}{۸}\,\frac{\text{و ف}^۲}{\text{ھ}}، \quad \ldots\ldots\ldots\ (۴۷)$$

سے حاصل ہوگا۔

تار کا طول معلوم کرنے کے لیے چھوٹی مقداروں کے اعلیٰ تر رتبے لینے ہوں گے اور اس لیے ہمیں زنجیرہ کی مساوات کی طرف رجوع ہونا چاہیئے۔ چنانچہ

$$س = \frac{۱}{۲} م \left(و^{\frac{لا}{م}} - و^{-\frac{لا}{م}} \right)$$

$$= لا + \frac{۱}{۶} \frac{لا^۳}{م^۲} + \cdots\cdots$$

مطلوبہ مقدار س - لا ہے یعنی د ب - ج ب (شکل ۴۵)۔ جب تار خوب تنا ہوا ہو تو م بہت بڑا ہوتا ہے اس لیے ہم س کی وہ رقمیں نظر انداز کر سکتے ہیں جو اوپر لکھی ہوئی رقموں کے آگے ہیں۔ پس

$$س - لا = \frac{۱}{۶} \frac{لا^۳}{م^۲} \text{، تقریباً}$$

$$= \frac{۱}{۶} \frac{و^۲ لا^۳}{ھ^۲}$$

لا = $\frac{۱}{۲}$ ف رکھ کر ہم معلوم کرتے ہیں کہ طول ف کے فصل میں (۸۶)

کل اضافہ بوجہ جھوک، $۲ س - ف = \frac{۱}{۲۴} \frac{و^۲ ف^۳}{ھ^۲}$ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک جھولا پل کا کل بوجھ ۳۲۰ ٹن ہے، فصل ۶۴۰ فٹ، اور ارتفاع ۵۰ فٹ ہے۔ سہارے کے نقطوں پر تناؤ معلوم کرو اور نیز زیریں ترین نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک آزادانہ لٹکے ہوئے تار کا وزن ۳۲۰ ٹن ہے۔ سہارے کے دو نقطوں کے درمیان فاصلہ ۶۴۰ فٹ ہے اور یہ نقطے ایک ہی افقی خط میں ہیں

اور ان کا ارتفاع تار کے زیر ترین نقطے کے اوپر ۵۰ فٹ ہے سہارے کے نقطوں کے تناؤ اور نیز زیر ترین نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو ۔

۳ ۔ ایک تار برقی سلسلہ کا تار اپنے طول کے ایک میل سے زیادہ کا وزن بغیر ٹوٹے برداشت نہیں کر سکتا ۔ اگر تار ۸۸ گز کے مساوی وقفوں سے ستونوں پر تنا ہوا ہو تو کم سے کم قابل اجازت جھوک کیا ہے ؟

۴ ۔ مثال ماسبق میں ایک میل تار برقی سلسلہ کے لیے کتنے تار کی ضرورت ہوگی ؟

۵ ۔ ایک تار برقی سلسلہ ایک خاص قسم کے تار سے جو یکساں فصل کے ستونوں پر تنایا گیا ہو قائم کرنا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ستونوں کی تعداد بہت زیادہ ہو تو تار اور ستونوں کی قیمت کا لحاظ کرتے یہ سلسلہ سب سے زیادہ کفایت کے ساتھ تیار کیا جا سکتا ہے اگر ستونوں کی قیمت تار کے اس زائد طول کی قیمت سے دگنی ہو جو جھوک کی وجہ سے مطلوب ہے ۔

عام مثالیں

۱ ۔ پتھر کا ایک گنڈ جس کا وزن $\frac{1}{2}$ ٹن ہے ایک ایسی رسی کے ذریعہ اٹھایا جاتا ہے جو ایک چرخی پر سے جو پتھر کے اوپر انتصاباً واقع ہے گذرتی ہے اور ایک ڈنڈا چرخ پر جس کا قطر ایک فٹ ہے لپٹی ہوئی ہے ۔ ڈنڈا چرخ پر دو آدمی کام کرتے ہیں جو ۳ فٹ طول کے گردانے گھماتے ہیں ۔ ہر آدمی کو گردانوں کے عمود وار کتنی قوت لگانی چاہیئے ۔

۲ ۔ ایک شخص ایک ترازو کے پلڑے میں بیٹھ کر ۶۰ پونڈل قوت سے ڈنڈی کو انتصابی سمت میں اس نقطہ پر دباتا ہے جو نصاب اور ڈنڈی کے اس سرے کے وسط میں ہے جس سے اس کا پلڑا لٹکا ہوا ہے ۔ اگر ڈنڈی کا طول ۵ فٹ ہو تو وہ زائد وزن معلوم کرو جو دوسرے پلڑے میں توازن کے لیے رکھنا پڑیگا ۔

۳ ۔ ایک نادرست ترازو کے پلڑے نصاب سے غیر مساوی فاصلوں ا ، ب پر لٹکتے ہیں لیکن خالی ہونے پر متوازن رہتے ہیں ۔ ایک وزن کو جب دونوں پلڑوں میں تولا جاتا ہے تو اس کے اوزان علی الترتیب ف ، ق حاصل ہوتے ہیں ۔

اس کا اصلی وزن معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$\frac{ب}{ل} = \sqrt{\frac{ق}{ف}}$$

۴ ۔ ایک غیر وزنی ڈوری ۲۴" لمبی دو نقطوں پر جو ایک ہی افقی خط میں (۸۷)
ہیں اور ایک دوسرے سے ۱۶" کے فاصلہ پر ہیں باندھ دی گئی ہے ۔ ڈوری کے
سروں سے ۹ اور ۷ انچ کے فاصلوں پر دو نقطوں سے اوزان باندھے گئے ہیں
جو اس طریقہ سے لٹکتے ہیں کہ ان کے درمیان ڈوری کا حصہ افقی ہے ۔ اوزان کی
نسبت معلوم کرو ۔

۵ ۔ ایک ہلکے تار کے وسطی نقطہ سے ایک وزن لٹکایا گیا ہے اور خود
تار کو ایک ڈوری سے سہارا گیا ہے جو اس کے دونوں سروں پر بندھی ہے اور ایک
چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ تار صرف افقی یا انتصابی محل میں ساکن
رہ سکتا ہے ۔

۶ ۔ تین چکنی کھونٹیاں ا، ب، ج ایک دیوار میں گڑی ہیں اور وہ
ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راس ہیں ۔ ا بلند ترین ہے اور ضلع ب ج
افقی ہے ۔ ایک ہلکی ڈوری ان کھونٹیوں پر سے صرف ایک مرتبہ گذرتی ہے
اور اس کے سرے ایک وزن و سے بندھے ہیں جو ب ج کے نیچے توازن
میں لٹکتا ہے ۔ ہر ایک کھونٹی پر دباؤ معلوم کرو ۔

۷ ۔ وزن ف اور ق کے دو چھلے ایک غیر وزنی ڈوری میں جس کے
سرے ایک سیدھے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں پھسلتے ہیں ۔ ڈنڈا ... سے
زاویہ ط پر مائل ہے ۔ اس ڈنڈے میں ایک ہلکا چھلا جس میں سے ڈوری گذرتی
ہے پھسلتا ہے اس طور پر کہ وزنی چھلے اس کی مخالف سمتوں میں رہتے ہیں ۔ تمام تماس چکنے ہیں
اور توازن کی حالت میں فہ وہ زاویہ ہے جو ڈنڈے اور ڈوری کے ان حصوں کے
درمیان ہے جو ہلکے چھلے سے قریب ہیں ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس } ط}{\text{مس } فہ} = \frac{ف - ق}{ف + ق}$$

۸ ـــ دو چھوٹے وزنی حلقے ایک چکنے تار پر پھسلتے ہیں، تار کی شکل قطع مکافی ہے جس کا محور افقی ہے۔ حلقوں کو ایک ہلکی ڈوری سے مربوط کیا گیا ہے جو ماسکہ پہ کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ جب حلقے توازن میں ہوتے ہیں تو محور کے نیچے محور سے ان کے انتصابی فاصلے اِن کے اوزان کے متناسب ہوں گے۔

۹ ـــ دو برابر وزنی حلقے ایک تار پر پھسلتے ہیں، تار کی شکل ایک قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم انتصابی ہے۔ حلقوں کو ایک ڈوری سے جو اوپر کے ماسکہ پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے مربوط کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے محل تعداد میں لامتناہی ہیں۔

۱۰ ـــ ا ب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے، ضلعوں ا ب، ب ج، ج د، اور د ا پر قوتیں عمل کرتی ہیں جو علی الترتیب اضلاع کا ہ، بہ، جہ، ضہ گنی ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر یہ قوتیں ذروں کے کسی نظام کو توازن میں رکھیں تو

$$ء\ جہ = بہ\ ضہ$$

۱۱ ـــ ایک ہلکا ڈنڈا کلاً ایک چکنے نیم کروی پیالہ میں جس کا نصف قطر ر ہے پڑا ہے اور اس سے ایک وزن و ایک ایسے نقطے پر باندھا گیا ہے جس کے فاصلے ڈنڈے کے سروں سے ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں ڈنڈے کا میلان افق کے ساتھ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$2\sqrt{ر^2 - ا\,ب}\ جب\ ط = ا - ب$$

۱۲ ـــ ایک غیر وزنی ڈنڈا جس پر کمیت ک اور کَ کے لکڑ ڈرے سرے کے لگے ہوئے ہیں ایک مائل مستوی پر پڑا ہے اور وہ ایک محور کے گرد جو ڈنڈے میں سے گذرتا ہے اور مستوی پر عمود ہے آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اگر ڈنڈا افقی محل میں ہو تو ثابت کرو کہ وہ اطراف پھسلنا شروع نہیں کرے گا اِلّا آنکہ (۸۸)

$$مہ > \frac{ک\,ا - کَ\,ب}{ک\,ا + کَ\,ب}\ مس\ ع$$

جہاں عہ مستوی کا زاویہ ہے اور ا اور ب محور سے علی الترتیب ک اور کً کے فاصلے ہیں۔

۱۳۔ وزن و کا ایک منکا جو ایک چکنی غیر وزنی ڈوری میں پرویا گیا ہے زاویہ عہ کے ایک مائل مستوی پر ساکن ہے۔ منکے اور مستوی کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ڈوری کے سرے مستوی کے دو نقطوں ا، ب سے جو ایک ہی ارتفاع پر ہیں باندھے گئے ہیں۔ بتاؤ کہ منکے کے انتہائی توازن کے محل کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ثابت کرو کہ ایسے محل ن میں ڈوری کا تناؤ حسب ذیل ہے:

$$\frac{1}{2}\ \text{و قط}\ \frac{1}{2}\ (\text{ان ب} \times \text{جم عہ}(\text{مس}^2\text{عہ} - \text{مہ}^2)^{\frac{1}{2}}$$

۱۴۔ ایک یکساں ڈوری ایک کھردرے کرہ پر رکھی گئی ہے اس طور پر کہ وہ ایک افقی چھوٹے دائرہ پر جس کا ارتفاع عہ ہے پڑی ہوئی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ڈوری نصف النہار وں پر عین پھسلنے کو ہے تو تناؤ مستقل ہے اور وم (عہ + صہ) کے مساوی ہے جہاں و ڈوری کے اس طول کا وزن ہے جو دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے اور صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۵۔ ایک غیر وزنی ڈوری دو ثابت نقطوں سے لٹکی ہوئی ہے اور اس کے معلومہ نقطوں پر مساوی اوزان بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈوری کے مختلف حصوں کے افق کے ساتھ جو میلانات ہیں ان کے مماس ایک سلسلہ حسابیہ بناتے ہیں۔

۱۶۔ ایک چکنی نیم دائری نلی کو ۲ ن مساوی چکنے منکوں سے جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے پر کیا گیا ہے، یہ منکے نلی میں عین ٹھیک بیٹھتے ہیں۔ نلی ایک انتصابی مستوی میں قائم ہے اور اس کے سرے مساوی ارتفاع پر ہیں۔ اگر سرے سے م ویں اور (م + ۱) ویں منکوں کے درمیان دباؤ کم ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{کم} = \text{و جب}\ \frac{\text{م}\ \pi}{2\text{ن}}\ \text{قم}\ \frac{\pi}{2\text{ن}}$$

۱۷۔ مثال ماسبق میں فرض کرو کہ منکوں کو لا انتہا چھوٹا کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی دو منکوں کے درمیان دباؤ نلی کے سرے کے نیچے گہرائی کے متناسب ہوگا۔

۱۸ — ایک وزنی ڈوری دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی ہمواری پر اور ایک دوسرے سے فاصلہ ۱ پر ہیں لٹکی ہوئی ہے۔ ڈوری کے دونوں سرے آزادانہ لٹک رہے ہیں اور مرکزی حصہ ایک زنجیرہ کی شکل میں لٹک رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے امکان کے لیے ڈوری کا کل طول ۱ ز سے کم نہ ہونا چاہیے۔

۱۹ — وزن و کی ایک ڈوری دو نقطوں سے جو ایک ہی ہمواری پر نہیں لٹکائی گئی ہے اور اس کے زیرترین نقطے سے ایک وزن وَ باندھا گیا ہے۔ اگر بلندترین اور زیرترین نقطوں پر کے مماس انتصابی سے زاویوں عہ، بہ پر مائل ہوں (۸۹)
تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس عہ}}{\text{مس بہ}} = ۱ + \frac{\text{و}}{\text{وَ}}$$

۲۰ — طول ل کی ایک وزنی ڈوری دو نقطوں پر سہاری گئی ہے اور ان نقطوں پر ڈوری انتصابی سے زاویے عہ، بہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کا ارتفاع دوسرے نقطہ کے اوپر

$$\text{ل جم } \frac{۱}{۲}(\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ قط } \frac{۱}{۲}(\text{عہ} - \text{بہ})$$

ہے۔

۲۱ — ثابت کرو کہ کم سے کم قوت کی سمت جو ایک گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے زمین سے زاویہ طہ پر مائل ہوتی ہے جہاں ۱ جیب طہ = ب جب صہ، پہیوں اور محوروں کے نصف قطر علی الترتیب ۱ اور ب ہیں اور صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۹۰)

پانچواں باب

اُستواراجسام کا علم سکون

اُستواری

۶۲ — اگر ہم چکنی مٹی کے گیلے ڈھیلے یا نرم موم کو اُنگلی سے دبائیں تو مٹی یا موم میں نشان پڑ جائے گا ہم نے اُنگلی سے جو قوت لگائی ہے اس نے جسم کی شکل میں تبدیلی پیدا کردی۔ اگر ہم اُنگلی سے جیلی کی کیست کو دبائیں تو جیلی میں کوئی نشان نہیں پڑے گا لیکن ہم دیکھیں گے کہ جب تک قوت عمل کرتی ہے جیلی کی شکل بدلی رہتی ہے اگرچہ کہ وہ اپنی اصلی شکل پر عود کرتی ہے جبکہ دباؤ ہٹ جاتا ہے۔

برخلاف ازیں اگر ہم سیسے کی گولی یا ہاتھی دانت کے بلیرڈ گولے کو اُنگلی سے دبائیں تو شکل کی کوئی تبدیلی قوت لگانے کے اثناء میں یا اس کے بعد نظر نہیں آئے گی۔ معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ سیسہ اور ہاتھی دانت مٹی اور موم سے زیادہ سخت ہیں اور علمی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ وہ زیادہ اُستوار ہیں۔

۶۳ — کامل طور پر اُستوار جسم وہ ہوگا جو کسی قوت کے تحت خواہ یہ قوت کتنی ہی بڑی ہو اپنی شکل نہ بدلے۔ گولی اور بلیرڈ گولہ کامل طور پر اُستوار نہیں ہیں کیونکہ بلیرڈ گولہ جب دوسرے گولے سے ٹکراتا ہے تو ٹکر کی اثناء میں دبکر اسکی شکل بگڑی ہوئی رہتی ہے لیکن فوراً بعد ہی وہ اپنی شکل پر آجاتا ہے۔ گولی

نشانہ پر لگتے ہی دبتی ہے اور اس کی شکل مستقلاً تبدیل ہو جاتی ہے۔ کامل طور پر اُستوار جسم فطرت میں موجود نہیں ہے، بلیرڈ کے گولے یا سیسی کی گولی کامل طور پر اُستوار سمجھے جا سکتے ہیں صرف اس وقت تک کہ ان پر کوئی بہت بڑی قوت عمل نہ کرے۔

کامل طور پر اُستوار جسم کی تعریف ریاضی کی زبان میں حسب ذیل ہے:

ایک جسم کامل طور پر اُستوار ہوتا ہے اگر اس کے کسی دو ذرّوں کا درمیانی فاصلہ غیر متغیر رہے خواہ جسم پر کوئی قوتیں عمل کریں۔

(۹۱) **۶۴**۔ کوئی اُستوار جسم اپنے اندر کسی خط کی سمت کو بدلے بغیر فضا میں حرکت کر سکتا ہے، ایسی حرکت کو **حرکت انتقال** کہتے ہیں۔ نیز وہ کسی نقطہ ن کے گرد ن کے محل کو بدلے بغیر گھوم سکتا ہے ایسی حرکت کو ن کے گرد **گردش کی حرکت** کہتے ہیں۔ نیز اس میں ایسی حرکت ہو سکتی ہے جو حرکتِ انتقال اور گردش کی حرکت سے مرکب ہو۔ اور ہم ثابت کریں گے کہ یہ وہ عام سے عام حرکت ہے جو جسم اختیار کر سکتا ہے۔

۶۵۔ سب سے اول ہمیں یہ معلوم ہونا چاہئے کہ کوئی اُستوار جسم ثابت ہوگا جبکہ اس کے کوئی تین نقطے ثابت ہوں بشرطیکہ یہ تین نقطے ایک خطِ مستقیم میں واقع نہ ہوں۔ کیونکہ فرض کرو کہ یہ نقطے ا، ب، ج ہیں۔ اگر ہم ا اور ب کو ثابت کریں تو چونکہ جسم بموجب فرض کامل طور پر اُستوار ہے اس لیے کوئی حرکت جو وقوع پذیر ہو سکتی ہے ایسی ہونی چاہئے جس میں ا اور ب سے کسی دوسرے نقطہ ن کے فاصلے غیر متغیر رہیں۔ اس لیے ن کو ا ب کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرنا چاہئے اور جسم کی حرکت خط ا ب کے گرد گردش کی حرکت ہونی چاہئے۔ پس اگر ا، ب، ج ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں تو ج کو ا ب کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرنا چاہئے۔

لیکن اگر ج بھی ثابت ہو تو ایسا ہو نہیں سکتا، بالفاظ دیگر کوئی حرکت وقوع پذیر نہیں ہو سکتی، اس لیے جسم اپنے محل میں ثابت ہے ۔

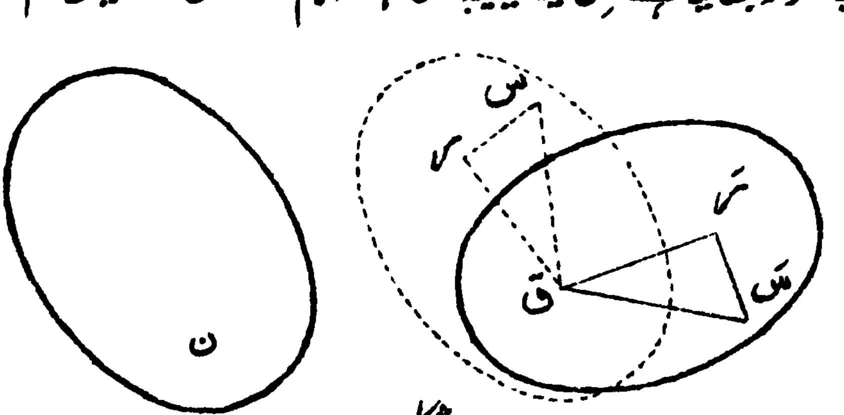
اس طرح کسی اُستوار جسم کا محل متعین ہو جاتا ہے جبکہ اس کے تین نقطوں کے محل معلوم ہوں بشرطیکہ یہ تین نقطے ایک ہی خط مستقیم میں نہ ہوں ۔

۶۶ — اب ہم حسب ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں ۔

کسی اُستوار جسم کی عام سے عام حرکت حرکتِ انتقال اور گردش کی حرکت سے مرکب ہوتی ہے ۔

شکل (۴۶) میں فرض کرو کہ بائیں جانب کی شکل جسم کو اس کے ابتدائی محل میں تعبیر کرتی ہے اور فرض کرو کہ دائیں جانب کا جلی منحنی جسم کو تعبیر کرتا ہے جبکہ وہ کسی طرح حرکت کر چکا ہے ۔ فرض کرو کہ جسم کے ابتدائی محل میں اس کے کسی ذرے کا مقام ن ہے اور فرض کرو کہ حرکت واقع ہونے کے بعد اسی ذرے کا مقام ق ہے ۔

اولاً فرض کرو کہ جسم اپنے ابتدائی محل سے اس طریقہ پر حرکت کر چکا ہے کہ نقطہ ن نقطہ ق تک حرکت کرتا ہے لیکن جسم کے تمام خطوط اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتے ہیں یہ حرکت خالص حرکتِ انتقال ہے اس حرکت کے وقوع کے بعد ہم جسم کو نقطہ ق کے گرد اس طریقے سے گھما سکتے ہیں کہ وہ گھوم کر آخری محل میں آجائے کیونکہ فرض کرو کہ جسم کے کوئی دو دوسرے نقطے ر، س ہیں (جو ق کے ساتھ ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں) اور فرض کرو کہ ان کے آخری محل رَ، سَ ہیں ۔ چونکہ جسم کو کامل طور پر اُستوار سمجھا گیا ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کے ذروں کے درمیان تمام فاصلے (۹۲)

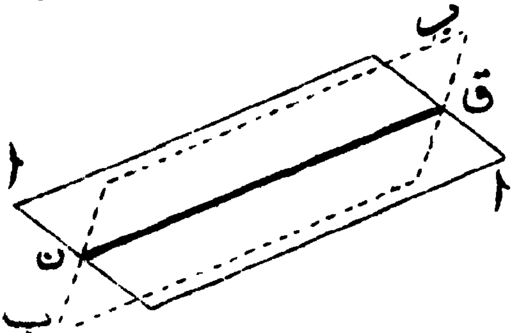


شکل (۴۶)

غیر متغیر رہتے ہیں۔ اس لیے فاصلے ق ر' ر س' س ق علی الترتیب ق ر' ر س' س ق کے مساوی ہیں۔ اس لیے مثلثات ق ر س اور ق ر س ہر طرح آپس میں برابر ہیں اور اس لیے ایک دوسرے پر منطبق کئے جا سکتے ہیں۔ پس ان مثلثوں کو ایک دوسرے پر منطبق کرنے کی حرکت مطلوبہ حرکت ہے اور یہ حرکت ق کے گرد خالص گردش کی حرکت ہے کیونکہ ق حرکت نہیں کرتا۔

اب چونکہ استوار جسم کا محل ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے کوئی تین نقطے ثابت ہوں اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ استوار جسم صرف ایک محل اختیار کر سکتا ہے جس میں تین نقطے ق' ر' س معلومہ مقامات پر ہوں۔ لیکن اس حرکت کے بعد جس کو ہم نے بیان کیا ہے تین نقطے ق' ر' س اپنے آخری مقامات پر ہیں۔ اس لیے پورا جسم اپنے آخری محل میں ہونا چاہئے اور اس لئے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۶۷۔ گردش کا محور۔ گردش کی حرکت میں فرض کرو کہ ن وہ نقطہ ہے جو ثابت رہتا ہے۔ ن میں سے گذرنے والا کوئی مستوی ا لو اور فرض کرو کہ گردش واقع ہونے کے بعد اس مستوی کا محل ب ہے۔ یہ دو مستوی ن میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے ن میں سے گذرنیوالے



شکل (۴۷)

ایک خط ن ق میں متقاطع ہونے چاہئیں۔ اس خط کو گردش کا محور کہتے ہیں۔ گردش کو ایک خیالی نقطے کے گرد جو گردش کے محور پر دوڑے گھماؤ کے طور پر خیال کیا جا سکتا ہے۔

کسی استوار جسم کے توازن کی شرطیں

۶۸ ــ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی اُستوار جسم ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے تین نقطے جو ہم خط نہوں ثابت ہوں اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ استوار جسم پر خواہ کتنی ہی قوتیں عمل کریں ہم ہمیشہ اس کو اس کے تین نقطوں پر جو ہم خط نہوں تین مناسب طور پر منتخبہ قوتیں لگا کر ساکن رکھ سکتے ہیں ۔

اِن قوتوں کو خاص طریقے سے منتخب کیا جا سکتا ہے ۔

فرض کرو کہ ا ' ب ' ج کوئی تین نقطے ہیں صرف اس شرط کے تحت کہ وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ۔ ا پر کے ذرے پر عمل کرنیوالی قوت کا مناسب انتخاب کرکے ہم ہمیشہ نقطہ ا کو ساکن بنا سکیں گے ۔

جب ا ثابت ہو جائے تو ب حرکت پر مائل ہوگا یا نہیں ہوگا ۔ اگر ب حرکت پر مائل ہے تو ب کی حرکت کی سمت ' ب ا پر عمود ہونی چاہئے کیونکہ ا حرکت نہیں کر سکتا ۔ پس ا ثابت ہو جانے کے بعد ب پر ب ا کے عمود وار ایک قوت لگانے سے ب کو ثابت کرنا ممکن ہونا چاہئے ۔

جب ا اور ب دونوں ثابت ہو جائیں تو تیسرے نقطہ ج کے لئے جو حرکت ممکن ہے وہ صرف ا ج اور ب ج دونوں کے عمود وار ہے یعنے مستوی ا ب ج کے عمود وار ۔ اس طرح ج کو ایک قوت کے ذریعہ جو مستوی ا ب ج پر عمود ہو ساکن رکھا جا سکتا ہے اور اس سے پورا جسم اب ساکن ہے ۔ اس لیے یہ ثابت ہو چکا کہ کسی اُستوار جسم کو قوتوں کے کسی نظام کے عمل کے خلاف ساکن رکھا جا سکتا ہے اگر حسب ذیل قوتیں تین اختیاری طور پر منتخبہ نقطوں ا ' ب ' ج پر جو ہم خط نہ ہوں لگائی جائیں :

(ا) ایک قوت نقطہ ا پر ' سمت نامعلوم

(ب) ایک قوت ب پر ' سمت خط ا ب کے عمود وار '

(ج) ایک قوت ج پر ' سمت مستوی ا ب ج کے عمود وار ۔

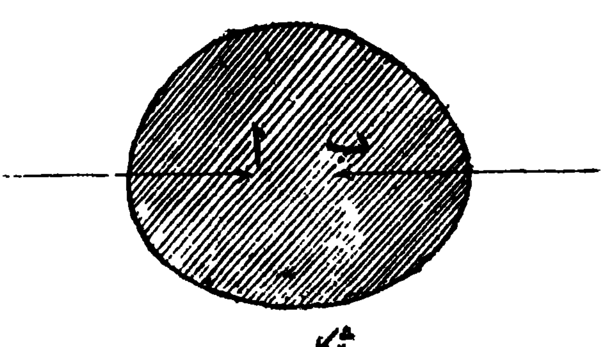
وہ شرط کہ قوتوں کا اصلی نظام جسم کو توازن میں رکھے یہ ہے کہ جسم کو ثابت

کرنے میں کوئی مزید قوتیں مطلوب نہوں اور اس لیے نقطوں ا، ب، ج پر جو قوتیں داخل کی گئی ہیں ان میں سے ہر ایک کو معدوم ہونا چاہئیے ۔

قوت کی انتقال پذیری (۹۴)

۶۹ ۔ ایک اُستوار جسم پر غور کرو جس پر دو قوتیں وا اور وب، دو نقطوں ا اور ب پر عمل کرتی ہیں، یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہیں لیکن مخالف سمتوں اب اور با میں عمل کرتی ہیں ۔

اُستوار جسم ان دو قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہوگا یا اس کو تین قوتوں فا، فب، فج کے ذریعے جو نقطوں ا، ب، اور کسی تیسرے نقطہ ج (جو خط اب میں نہیں ہے) پر عمل کرتی ہیں ساکن رکھا جا سکتا ہے، یہ قوتیں اُن سمتوں میں عمل کرتی ہیں جن کو قبل ازیں ظاہر کیا جا چکا ہے یعنے فج مستوی اب ج کے عمود وار اور فب خط اب کے عمود وار ۔



شکل (۴۸)

فرض کرو کہ یہ قوتیں بشرط ضرورت عائد کی گئی ہیں اور اس لیے جسم قوتوں وا، وب، فا، فب، فج کے زیر عمل توازن میں ہے ۔ جسم چونکہ توازن میں ہے اس لیے کسی خط کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ یا کسی سمت میں ان کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ حسب دفعہ (۵۰)

معدوم ہونا چاہیئے۔

فرض کرو کہ ہم خط ا ب کے گرد معیاروں کے مجموعے پر غور کرتے ہیں۔ قوتیں و ا، و ب، ف ا، ف ب سب کی سب اس خط سے ملتی ہیں اور اس لیے ان میں سے ہر قوت کا معیار معدوم ہوتا ہے۔ اس طرح خط ا ب کے گرد معیاروں کا مجموعہ واحد قوت ف ج کے معیار پر مشتمل ہے اور اس لیے ان معیاروں کے مجموعے کے معدوم ہونے کے لیے ف ج کے معیار کو معدوم ہونا چاہیئے۔ اب قوت ف ج کا معیار صرف اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ خود قوت ف ج صفر کے مساوی ہو۔ جس کے یہ معنے ہیں کہ کوئی قوت جسم کو ا ب کے گرد گھومنے سے روکنے کے لیے مطلوب نہیں ہے۔

پس جسم دو قوتوں ف ا اور ف ب کے زیر عمل ساکن ہے اور اس لیے قوتوں ف ا، ف ب، و ا، و ب کے زیر عمل توازن میں ہے۔ (۹۵)

ا میں سے گذرنے والے اور ا ب پر عمود وار خط کے گرد معیار لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ف ا، و ا، و ب کے معیار معدوم ہوتے ہیں اور اسلیے اس خط کے گرد ان چار قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونے کے لیے ف ب کا معیار صفر کے مساوی ہونا چاہیئے اور اس لیے خود ف ب کو صفر کے مساوی ہونا چاہیئے اس طرح جسم کو ساکن رکھنے کے لیے جو قوت مطلوب ہے وہ صرف ا پر کی قوت ف ا ہے۔

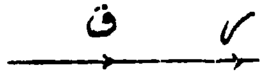
لیکن اب توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ و ا، و ب، اور ف ا کو

اجزائے ترکیبی کا مجموعہ کسی سمت میں معدوم ہو۔ و ا اور و ب کے اجزائے ترکیبی مساوی اور مختلف ہیں اِس لیے ف ا کا جزو ترکیبی ہر سمت میں معدوم ہونا چاہیئے یعنے ف ا صفر کے مساوی ہونا چاہیئے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ اُستوار جسم دو قوتوں و ا اور و ب کے زیر عمل توازن میں ہے۔

۷۰ ۔ دفعہ ماسبق سے فوراً ایک اصُول جو قوت کے انتقال پذیری کے طور پر مشہور ہے حاصل ہوتا ہے۔

کسی قوت کا اثر جو ایک اُستوار جسم پر عمل کرے اِس کی مقدار اور اُس خط پر جس پر وہ عمل کرتی ہے منحصر ہوتا ہے۔ لیکن اِس خط میں اُس مخصوص ذرّے پر منحصر نہیں ہوتا جس پر قوت لگائی گئی ہے۔



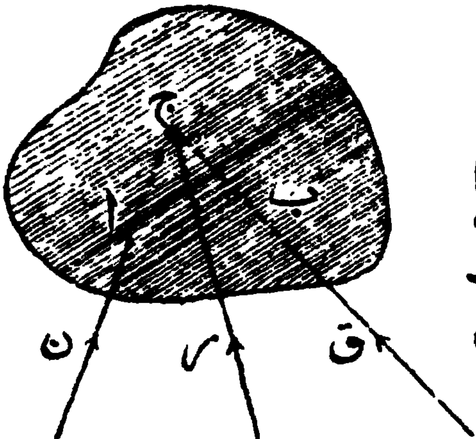
کیونکہ فرض کرو کہ قوت کے خط عمل کے کسی دو نقطوں ق اور ر پر وہی قوت لگائی گئی ہے۔ ر پر ایک مساوی اور مخالف قوت اِن دو قوتوں میں سے کسی ایک کی تعدیل کر سکتی ہے اور اسلئے یہ قوتیں مماثل ہیں۔

شکل (۴۹)

ایک مستوی میں عمل کرنیوالی قوتوں کی ترکیب

۷۱ ۔ فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم کے دو نقطوں ا ، ب پر دو قوتیں ف، ف عمل کرتی ہیں اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اِن قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مستوی میں واقع ہیں۔ اب یہ دو خطوط عمل نقطوں ا ، ب سے آگے (بشرط ضرورت) خارج کرنے پر کسی نہ کسی نقطہ ج پر ملیں گے۔

قوت کے انتقال پذیری کے اصول سے یہ ظاہر ہے کہ قوت ف خواہ ا پر عمل کرے یا ج پر ایک ہی بات ہے۔ فرض کرو کہ وہ ج پر عمل کر رہی ہے۔ اسی طرح فرض کرو کہ قوت ق' ب کی بجائے ج پر عمل کر رہی ہے۔ اب جسم پر عمل کرنے والی (۹۶)
دو قوتیں ف' ق ہیں جو ایک ہی ذرہ ج پر عمل کرتی ہیں۔ ان قوتوں کو تیسرے باب میں سمجھائے ہوئے قاعدوں کی بموجب ایک واحد قوت م میں جو ج پر عمل کرتی ہے مرکب کیا جا سکتا ہے۔ پس ہم قوتوں کو مرکب کر سکتے ہیں جبکہ خطوطِ عمل متقاطع ہوں اگرچہ وہ ایک ہی ذرہ پر عمل نہ کریں۔

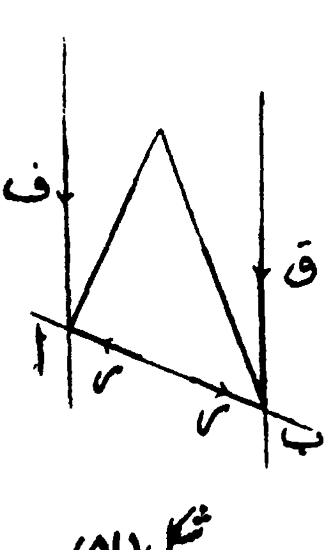


شکل (۵۰)

دو قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کر لینے کے بعد ہم اس حاصل قوت کو کسی تیسری قوت کے ساتھ جو اسی مستوی میں واقع ہو دو ابتدائی قوتوں کے طور پر مرکب کر سکتے ہیں اور اس طرح تین قوتوں کا حاصل دریافت کر سکتے ہیں اور علیٰ ہٰذا القیاس۔

پس قوتوں کی کسی تعداد کو جو سب کی سب ایک مستوی میں واقع ہوں ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے۔ اس قوت کو ابتدائی قوتوں کا **حاصل** کہتے ہیں۔

۷۲ — ایک مستثنےٰ صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ ہم دو متوازی قوتوں کو مرکب کرنے کی کوشش کرتے ہیں کیونکہ اس صورت میں خطوطِ عمل متقاطع نہیں ہوتے۔ لیکن یہ مشکل آسانی سے حل ہو جاتی ہے۔ فرض کرو کہ دو قوتیں ف' ق ہیں جن کو مرکب کرنا ہے اور فرض کرو کہ ا ب کوئی خط ہے جو ان کے خطوطِ عمل کو ا' ب پر



شکل (۵۱)

قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ قوتوں کے اِس نظام میں باہم دو قوتیں

(ا) ایک قوت س جو ب ا پر عمل کرتی ہے،

(ب) ایک قوت س جو ا ب پر عمل کرتی ہے، داخل کرتے ہیں۔

یہ دو قوتیں چونکہ مساوی اور مخالف ہیں اس لئے انہیں بغیر کسی اثر کے داخل کیا جا سکتا ہے۔ پہلی قوت کو ف کے ساتھ مرکب کرنے سے حاصل فَ ملتا ہے جو ا پر عمل کرتا ہے، اسی طرح دوسری قوت کو ق کے ساتھ
(۹۷) مرکب کرنے سے حاصل قَ ملتا ہے جو ب پر عمل کرتا ہے۔ اس طرح ابتدائی قوتوں ف، ق کی بجائے دو نئی قوتیں فَ، قَ حاصل ہوئی ہیں اِن قوتوں کے خطوطِ عمل بالعموم متوازی نہیں ہوں گے اور اس لیے اِن کو ایک واحد قوت میں جو اِن کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتی ہے مُرکب کیا جا سکتا ہے۔

۳۷ — فرض کرو کہ ابتدائی قوتیں جن کو مرکب کرنا ہے س۱، س۲، س۳..... ہیں اور ان کو ایک واحد حاصل س میں مرکب کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اُس مستوی میں جس میں یہ قوتیں عمل کرتی ہیں محاور لا، ما لئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اِن محوروں کی سمتوں میں س۱ کے اجزائے ترکیبی لا۱، ما۱ ہیں، س۲ کے لا۲، ما۲ اور علیٰ ہذا القیاس۔ بالآخر فرض کرو کہ س کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔

قوتوں کا یہ نظام جس میں ابتدائی قوتیں س۱، س۲، س۳ .... اور حاصل س (بہ سمت مخالف) شامل ہیں ایک ایسا نظام ہے جو توازن میں ہے۔ اِس لیے قوتوں کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے

$$\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \ldots\ldots - \text{لا} = 0،$$

$$\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3 + \ldots\ldots - \text{ما} = 0.$$

اس لئے س کے اجزائے ترکیبی مساواتوں

$$\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \dots\dots ,$$

$$\text{ما} = \text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3 + \dots\dots ,$$

سے حاصل ہوتے ہیں اور ر کی مقدار مساوات

$$\text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2$$

سے معلوم کیجا سکتی ہے۔ وہ زاویہ ط جو ر کا خط عمل محور لا کے ساتھ بناتا ہے مساوات

$$\text{مس ط} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ر کے خط عمل کا محل معلوم کرنے کے لیے ہم اس واقعہ کا استعمال کرتے ہیں کہ اسی مستوی کے کسی نقطہ کے گرد قوتوں ر_1، ر_2، ر_3 .... اور ـ ر کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔ اس سے کسی نقطہ کے گرد ر کا معیار معلوم ہوتا ہے او، اس لیے چونکہ ر کی مقدار اور سمت معلوم ہے ہم اس کے خط عمل کا محل معلوم کر سکتے ہیں۔

توضیحی مثال

(۹۸) قوتیں ف، ق، ر، ایک استوار جسم پر عمل کرتی ہیں، یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں اور ان کے خطوطِ عمل ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں جس کے اضلاع ا، ا، $\text{ا}\sqrt{2}$ ہیں۔ ان کا حاصل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور قوتیں ف، ق، ر علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر عمل کرتی ہیں۔ ج کو مبداء فرض کرو اور ج ا، ج ب کو محاور ما، لا لو۔

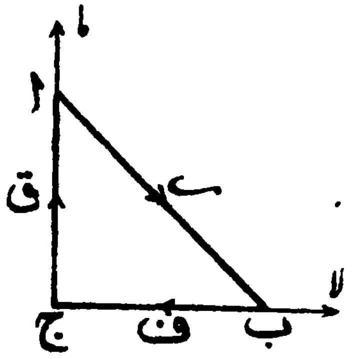
فرض کرو کہ حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔ تب ج لا کی سمت میں

تحلیل کرنے سے

$$لا = - ف + \frac{ر}{\sqrt{۲}}$$

اور اسی طرح ج ما کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$ما = ق - \frac{ر}{\sqrt{۲}}$$



شکل (۵۲)

اس لیے حاصل کی مقدار ح، مساوات

$$ح^۲ = لا^۲ + ما^۲ = (- ف + \frac{ر}{\sqrt{۲}})^۲ + (ق - \frac{ر}{\sqrt{۲}})^۲$$

$$= ف^۲ + ق^۲ + ر^۲ - \sqrt{۲}\, ر (ف + ق)$$

سے حاصل ہوگی۔ زاویہ طہ جو یہ حاصل، محور ج لا سے بناتا ہے مساوات

$$مس\, طہ = \frac{ما}{لا} = - \frac{ر - \sqrt{۲}\, ق}{ر - \sqrt{۲}\, ف}$$

سے حاصل ہوگا۔

خط عمل معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج کے گرد ح کا معیار، قوتوں ف، ق اور ر کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہونا چاہیے۔ اگر حاصل ح کے خط عمل پر ج سے عمود ع ہو تو

$$ح\, ع = ر \frac{ا}{\sqrt{۲}}$$

اس لئے

$$ع = \frac{ر}{ح} \frac{ا}{\sqrt{۲}}$$

اور اس سے ح کا خط عمل معلوم ہوتا ہے۔

مثالیں

(تمام قوتیں استوار اجسام پر عمل کرتی ہیں)

۱ — ا ب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں اب، ب ج، ج د پر علی الترتیب ۱، ۲، ۳ پونڈ کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ حاصل کی مقدار اور خط عمل معلوم کرو۔

۲ — ا ب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں اب، ب ج، ج د، د ا پر قوتیں ف، ق، ر، س عمل کرتی ہیں۔ شرط معلوم کرو کہ ان کا حاصل، مربع کے مرکز میں سے گذرے۔

۳ — مثال (۲) میں وہ شرط کیا ہے کہ

(ا) حاصل نقطہ ا میں سے گذرے،

(ب) حاصل نقطہ ب میں سے گذرے،

(ج) چاروں قوتیں توازن میں ہوں۔

۴ — قوتیں ف، ق، ر، ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور اِن کا حاصل، مثلث کے اندرونی و بیرونی دائروں کے مرکزوں میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۹۹)

$$\frac{ف}{جم ب - جم ج} = \frac{ق}{جم ج - جم ا} = \frac{ر}{جم ا - جم ب}$$

۵ — اگر چار قوتیں جو ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع مستوی ہونا چاہیئے۔

۶ — ا ب ج د ایک مستوی ذو اربعۃ الاضلاع ہے اور قوتیں جو اب، ج ب، ج د، ا د سے تعبیر ہوتی ہیں اِن ضلعوں پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر توازن موجود ہو تو یہ ذو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہونا چاہیئے۔

۷ — اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرے میں کھینچا جا سکے تو ثابت کرو کہ قوتیں جو اِس کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور متقابلہ ضلعوں کے متناسب ہیں اِس کو توازن میں رکھیں گی۔ نیز ثابت کرو کہ اِس کا عکس بھی درست ہے یعنے یہ کہ توازن کے لیے قوتوں کو متقابلہ اضلاع کے متناسب ہونا چاہیئے۔

۸ — ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرے میں بنایا گیا ہے اور چار قوتیں

اِس کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور اِن ضلعوں کے طولوں کے بالعکس متناسب ہیں ثابت کرو کہ حاصل کا خط عمل وہ خط ہے جو متقابلہ اضلاع کے زوجوں کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۹۔ چار قوتیں ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور علی الترتیب اِن ضلعوں کے طولوں کے ا، ب، ج، د گنے کے مساوی ہیں۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا ج = ب د$$

اور یہ کہ مزید شرطیں جو توازن کے لیے ضروری ہیں یہ ہیں کہ نسبتیں ا : ب اور ب : ج وہ نسبتیں ہونی چاہئیں جن میں وتر اپنے نقاطِ تقاطع پر تقسیم ہوتے ہیں۔

۱۰۔ مثال ماسبق میں ثابت کرو کہ پہلے ضلع کے عمودی فاصلے ذو اربعۃ الاضلاع کے اُن دو نقطوں سے جو اس ضلع پر نہیں ہیں حسب ذیل نسبت میں ہیں

$$ا (ج - ب) : د (ب - ا)$$

متوازی قوتیں

۴۷۔ فرض کرو کہ دو متوازی قوتوں ف اور ق کا حاصل معلوم کرنے کے لئے ہم وہ طریقہ استعمال کرتے ہیں جو اوپر سمجھایا گیا ہے۔

ف کے خطِ عمل پر کسی نقطہ و کو مبدأ فرض کرو اور ف کے اِس خط عمل کو محور و ما لو، شکل (۵۳)۔ فرض کرو کہ حاصل ما ہے اور اُس کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔ تب تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = ۰،$$

$$ما = ف + ق$$

اِس لیے حاصل قوت کی مقدار ف + ق ہے اور وہ و ما کے متوازی عمل کرتی ہے

(۱۰۰) فرض کرو کہ اِس کا فاصلہ و ما سے ب ہے اور ق کا فاصلہ ا سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب و کے گرد معیار لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$(ف + ق) ب = ق ا$$

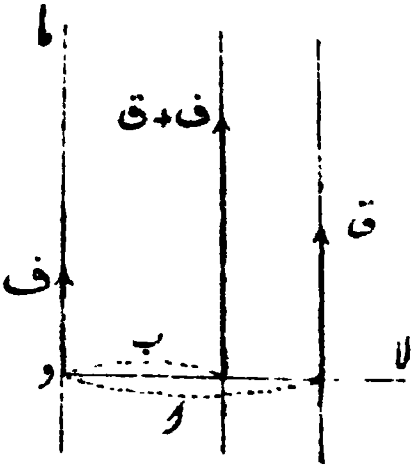
اس لئے

$$\frac{ب}{ق} = \frac{ا}{ف+ق} = \frac{ا-ب}{ف}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط عمل، ف اور ق کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ

دو متوازی قوتوں ف، ق کا حاصل



شکل (۵۳)

اِن قوتوں کے متوازی مقدار ف + ق کی ایک قوت ہے جس کا خط عمل، قوتوں ف اور ق کے خطوط عمل کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے۔

۷۵۔ متوازی قوتوں کا دوسرا ثبوت ۔ دفعہ (۶۹) سے ہم راست ثابت کر سکتے ہیں کہ متوازی قوتیں ف، ق اور قوت ۔(ف + ق) جو قوتوں ف، ق کے متوازی ہے اور ایک ایسے خط پر عمل کرتی ہے جو اِن قوتوں کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے توازن میں ہیں۔

ف، ق کے خطوط عمل پر دو نقطے ا، ب لو اور کوئی تیسرا نقطہ ج لو جو خط اب پر نہ ہو۔ تب وہ جسم جس پر قوتیں ف، ق اور ۔(ف + ق) عمل کرتی ہیں حسب ذیل مزید قوتوں کے عمل سے توازن میں رکھا جا سکتا ہے:

(ا) ایک قوت کاج جو ج پر عمل کرے اور اب ج پر عمود ہو،

(ب) ایک قوت کاب جو ب پر عمل کرے اور اب پر عمود ہو،

(ج) ایک قوت کاا جو ا پر عمل کرے۔

اس طرح قوتوں

ف، ق، -(ف + ق)، م ج، م ب، م ا

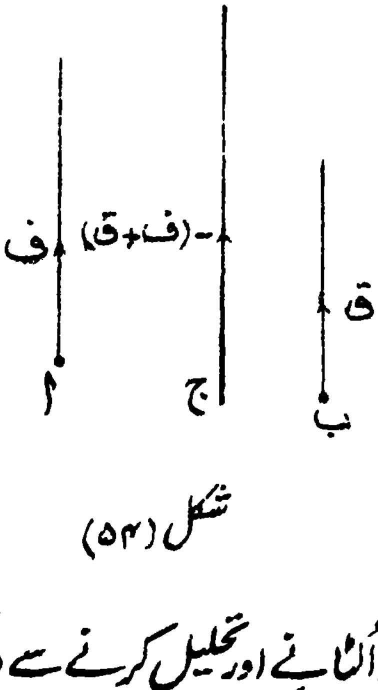
کا نظام توازن میں ہوگا۔

خط ا ب کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ م ج = ۰ اور ا کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ م ب = ۰ ۔ اور اگر ایسا نہیں ہے تو وہ خط ب ا پر عمل کرتی ہے اور ایسی صورت میں وہ م ا میں ضم کی جا سکتی ہے۔ قوتوں ف، ق کے مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ م ا کا کوئی جزو ترکیبی مستوی کے عمود وار نہیں ہو سکتا ۔ اِس لئے چار باقی قوتیں

ف، ق، -(ف + ق)، م ا

سب کی سب ایک مستوی میں ہیں۔

پھر ف کے خط عمل کے (۱۰۱)
متوازی اور عمود وار تحلیل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ م ا کے دونوں اجزائے ترکیبی معدوم ہوتے ہیں اور اس لئے م ا = ۰ ۔ اِس لیے ابتدائی قوتیں توازن میں ہیں۔



شکل (۵۴)

۷۶ — قوتوں کو مرکب کرنے کے اِن طریقوں کی صریحاً توسیع ہو سکتی ہے اور اِس لیے متوازی قوتوں کی کسی تعداد کو ایک واحد حاصل قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے ۔ ہم حاصل کو اُلٹانے اور تحلیل کرنے سے دیکھتے ہیں کہ حاصل، ابتدائی قوتوں کے خطوط عمل کے متوازی ہے اور اِس کی مقدار اِن قوتوں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے۔

یہ نتیجہ اجسام کے اوزان کے سلسلہ میں اہمیت رکھتا ہے۔ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی اُستوار جسم پر جاذبہ ارض کے اثر کو یعنی اُن منفرد ذروں کے اوزان کے حاصل کو جن سے جسم بنا ہے

ایک واحد قوت سمجھا جا سکتا ہے جو ایک واحد خط پر انتصابا عمل کرتی ہے۔ آئندہ باب میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ استوار جسم خواہ کسی محل میں ہو یہ خط ہمیشہ ایک معیّن نقطے میں سے گذرتا ہے جو جسم کے لحاظ سے ثابت ہوتا ہے، اس نقطہ کو مرکز ثقل کہتے ہیں۔

۷۷۔ اس کو تسلیم کئے بغیر متعدد سادہ صورتوں میں ہم خط عمل معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک ایکساں ڈنڈے پر بحث کر رہے ہیں۔ دو مساوی ذروں کے اوزان جو ڈنڈے کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوں ایک واحد قوت میں مرکب کئے جا سکتے ہیں جو ڈنڈے کے مرکز میں عمل کرتی ہے۔ تمام ذروں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کرنے پر ہم دیکھیں گے کہ ایک ایکساں ڈنڈے کا وزن اس کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک دائری قرص، ایک دائری حلقہ یا کرہ کا وزن اس کے مرکز پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔ ایک متوازی السطوح یا مکعب کا وزن اس کے وتروں کے نقطہ تقاطع پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے اور علیٰ ہذا۔

جفت

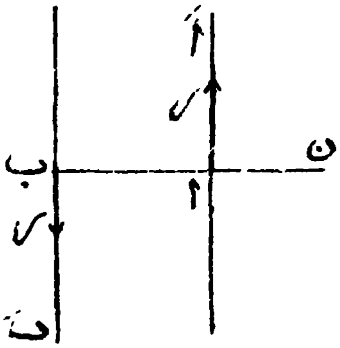
۷۸۔ اگر ہم دو متوازی قوتوں کو جو مقدار میں مساوی مگر علامت میں مختلف ہوں مرکب کرنے کی کوشش کریں تو ہمیں حاصل کے طور پر ایک ایسی قوت ملے گی جو مقدار میں صفر ہوگی اور اس کا خط عمل لاتناہی پر ہوگا۔ اگرچہ ایسی کسی قوت کی مقدار صفر ہوتی ہے لیکن اس کے اثر کو نظر انداز نہیں (۱۰۲) کیا جا سکتا کیونکہ اس کا معیار معدوم نہیں ہوتا اس وجہ سے کہ وہ ترکیبی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر شکل ۵۵ میں دو متوازی مخالف قوتوں کے خطوط عمل ا ا، ب ب ہوں اور ہر قوت ق کے مساوی ہو اور اگران کی سمت کے علی القوائم ایک خط ن ا ب ہو تو

ن میں سے گذرنے والے اور قوتوں کے مُستوی کے علی القوائم خط کے گرد اِن کے معیاروں کا مجموعہ

= ر × ن ب − ر × ن ا

= ر ف

جہاں قوتوں کے خطوط عمل کا درمیانی فاصلہ ف ہے۔ قوتوں کا ایسا زوج جو مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہو اور ایک ہی خط میں عمل نہ کرے جفت کہلاتا ہے اِن کا معیار کسی نقطہ ن کے گرد جو اِن کے خطوط عمل کے مُستوی میں ہو نقطہ ن کے محل پر منحصر نہیں ہوتا اور اِس کو جفت کا معیار کہا جاتا ہے۔



شکل (۵۵)

توازن کی شرط

۷۹ — چونکہ ہم مُستوی قوتوں کے کسی نظام کا حاصل یا تو ایک واحد قوت ہو سکتا ہے یا ایک جفت اس لئے وہ شرط کہ حاصل صفر کے مساوی ہو یہ ہوگی کہ حاصل واحد قوت صفر ہو اور کوئی جفت عمل نہ کرے۔ حاصل قوت کا جزو ترکیبی کسی سمت میں معدوم ہوتا ہے اگر اِس سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو۔ اس لئے حاصل قوت کے معدوم ہونیکے لیے یہ ضروری ہے کہ دو مختلف سمتوں میں اجزائے تحلیلی معدوم ہوں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے تو کوئی حاصل نہیں ہو سکتا اِلا جفت کے اور چونکہ جفت کا معیار وہی ہوتا ہے خواہ اُسے کسی نقطہ کے گرد لیا جائے اس لئے کوئی جفت نہیں ہو سکتا اگر کسی ایک نقطے کے گرد معیار صفر ہو۔ پس ہم مُستوی قوتوں کے کسی نظام کے توازن کی ضروری اور کافی شرط حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

ہم مستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر دو سمتوں میں قوتوں کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ منفرداً معدوم ہو اور اگر کسی نقطے کے گرد معیاروں کا مجموعہ بھی معدوم ہو۔

(۱۰۳) ہم توازن کی اس شرط کو ایک مختلف شکل میں بیان کر سکتے ہیں:

ہم مستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر کسی تین نقطوں کے گرد جو ایک ہی خط میں نہ ہوں معیاروں کے مجموعے جدا جدا صفر ہوں۔

کیونکہ اگر کسی ایک نقطہ کے گرد معیار صفر ہو تو حاصل جفت نہیں ہو سکتا۔ اس لیے وہ ایک واحد قوت ہونا چاہیئے۔ اگر دو نقطوں (ا ب) میں سے ہر ایک کے گرد معیار معدوم ہوں تو اس قوت کا خط عمل بالعموم (ا ب) ہونا چاہیئے لیکن اگر کسی تیسرے نقطہ ج کے گرد بھی جو (ا ب) میں نہیں ہے معیار معدوم ہو تو خود قوت کو معدوم ہونا چاہیئے۔

مثالیں

۱۔ ۲ فٹ طویل خط کے دو سروں پر اور وسطی نقطہ پر علی الترتیب ۵، ۱۲، پونڈ کی متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار اور خط عمل معلوم کرو۔

۲۔ مثال ماسبق کی قوتوں کا حاصل معلوم کرو جبکہ ان کی مقداریں ۵، -۱۲، اور ۷ پونڈ ہوں۔

۳۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار تین قوتیں جن میں سے ہر ایک کی مقدار ف ہے عمل کرتی ہیں۔ حاصل معلوم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا ایک نظام جو ایک مستوی کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار عمل کرتی ہیں اور ان ضلعوں سے تعبیر ہوتی ہیں ایک جفت کے مماثل ہے جس کا معیار کثیر الاضلاع کے رقبے کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے۔

۵۔ اگر تین نقطوں کے گرد جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں کوئی ہم مستوی قوتوں کے معیاروں کے مجموعے مساوی ہوں اور الگ الگ صفر نہ ہوں تو

ثابت کرو کہ یہ نظام ایک جفت کے مماثل ہے۔

۶۔ ایک ایکساں ڈنڈے کا طول ۳ فٹ اور وزن ۲۴ پونڈ ہے۔ ۱۶ اور ۱۸ پونڈ کے وزن اس کے دو سروں پر پیوست کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈنڈے کو کس نقطہ پر سہارنا چاہئے کہ وہ عین متوازن ہو۔

۷۔ ۲۰ پونڈ وزن کا ایک ایکساں شہتیر اپنے دو سروں سے لٹکایا گیا ہے اور ۵۰ پونڈ کا ایک وزن اس کے ایک ایسے نقطہ سے لٹکتا ہے جس کے فاصلے سروں سے ۷ فٹ اور ۳ فٹ ہیں۔ اُن نقطوں پر دباؤ معلوم کرو جن سے شہتیر لٹکا ہوا ہے۔

۸۔ ۵۰ پونڈ وزن اور ۱۸ فٹ طول کے ایک یکساں ڈنڈے کو دو آدمی اپنے شانوں پر لئے جا رہے ہیں وہ ڈنڈے کے سروں سے علی الترتیب ۲ فٹ اور ۳ فٹ کے فاصلوں پر چلتے ہیں۔ ۵۰ پونڈ کا ایک وزن شہتیر کے وسطی نقطے سے لٹکا یا گیا ہے۔ وہ کُل وزن معلوم کرو جو ہر شخص لیے جا رہا ہے۔

۹۔ ایک گھنٹی جس کا وزن ۳۲ پونڈ ہے دو مساوی کُروں سے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ۳ انچ ہے اور جو لو ہے کی ایک سلاخ سے جڑے ہوئے ہیں بنائی گئی ہے۔ کُروں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ۱۶ انچ ہے ایک کرہ کو اب جدا کر لیا جائے تو گھنٹی کے مابقی حصہ کا وزن ۲۰ پونڈ معلوم ہوتا ہے اِس حصہ کو کہاں سہارنا چاہئے کہ وہ عین متوازن ہو سکے۔

متوازی مستویوں میں جفت

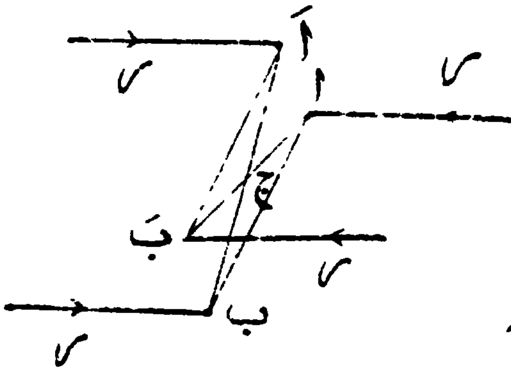
۸۰۔ دفعہ (۷۹) کے نتیجہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دو جفت جو ایک ہی مستوی میں عمل کریں ایک ہی اثر پیدا کرتے ہیں اگر اِن کے معیار مساوی ہوں کیونکہ اِن میں سے ایک کو الٹانے سے توازن کی تمام شرطیں پوری ہو سکتی ہیں۔

اس طرح ہم ایک جفت کا اثر صرف اس کا معیار معلوم کر کے متعین کر سکتے ہیں۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ وہ حقیقی مستوی جس میں

جفت عمل کرتا ہے کوئی اہمیت نہیں رکھتا صرف اس کی سمت اہم ہے دوسرے الفاظ میں:

مساوی معیاروں کے جفت جو متوازی مستویوں میں عمل کریں وہی اثر پیدا کرتے ہیں۔

اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم ایک جفت کو اٹھاتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں کہ اب یہ دو جفت توازن میں ہیں۔ فرض کرو کہ پہلا جفت دو قوتوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک ر کے مساوی ہے اور فرض کرو کہ ان کے خطوطِ عمل کا ایک مشترک عمود ثانی الذکر سے نقطوں ا، ب پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ دوسرے جفت کے مستوی میں اَ بَ ایک خط ہے جو ا ب کے مساوی



شکل (۵۶)

اور متوازی ہے اور فرض کرو کہ دوسرے جفت کو اٹھانے کے بعد وہ دو قوتوں ر، ر سے تعبیر ہوتا ہے جو اَ بَ پر عمل کرتی ہیں۔ ہم اس جفت کو یہ سمجھ سکتے ہیں کہ وہ اٹھائے ہوئے دوسرے جفت کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اس کا معیار دوسرے جفت کے معیار کے مساوی اور مخالف ہے اور وہ اسی مستوی میں ہے جس میں دوسرا جفت ہے۔

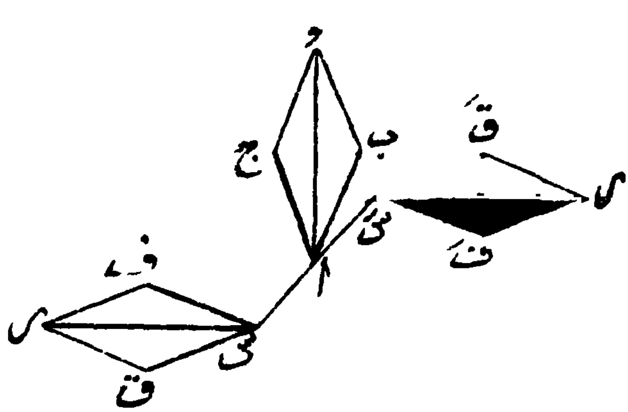
اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ چار قوتیں جن میں سے ہر ایک ر کے مساوی ہے اور جو علی الترتیب ا، ب، اَ، بَ پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہیں۔ بموجب عمل ا ب بَ اَ ایک متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج جو اس کے وتروں کا نقطہ تقاطع ہے ہر ایک وتر کا

نقطہ وسطی بھی ہے۔
دو متوازی قوتیں ر، ر جو علی الترتیب ا، ب پر عمل کرتی ہیں
ایک واحد قوت ۲ ر میں جو اب کے وسطی نقطہ ج پر عمل کرتی ہے
مرکب کیجا سکتی ہیں اور اسی طرح دو قوتیں ر، ر جو ب، ا پر عمل کرتی ہیں
ایک قوت ۲ ر میں جو اب کے وسطی نقطہ ج پر عمل کرتی ہے مرکب
کیجا سکتی ہیں۔ یہ دو قوتیں ۲ ر، ۲ ر مساوی ہیں اور ایک ہی نقطہ ج پر (۱۰۵)
مخالف سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ اس لیے توازن ہے اور یہ ثابت
ہوتا ہے کہ دو جفت مماثل ہوتے ہیں اگر ان کے معیار مساوی ہوں
اور اگر وہ مستوی جن میں وہ عمل کرتے ہیں متوازی ہوں۔

۸۱ ـــ وہ سمت جو اُس مستوی پر عمود ہو جس میں ایک جفت عمل کرتا ہے
اُس جفت کا محور کہلاتی ہے چنانچہ دو جفت جن کا محور ایک ہی ہو اور جن کے
معیار مساوی ہوں مماثل ہوتے ہیں۔

جفتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کرنا

۸۲ ـــ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی جفت ایک مقدار (اُس کا معیار) اور
ایک سمت (اُس کا محور) سے متعین ہو جاتا ہے۔ اس لیے اُس کو ایک



شکل (۵۷)

خط مستقیم سے پوری طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے، اس خط کی سمت محور کی سمت ہوگی اور اس کا طول جفت کے معیار کی مقدار کو کسی پیمانے پر تعبیر کرے گا۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ جفت قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کئے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر دو جفت مقدار اور سمت میں دو خطوں اب، اج سے تعبیر ہوں تو ان کا ماصل ایک جفت ہوگا جو مقدار اور سمت میں اد سے تعبیر ہوگا جہاں اد اُس متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے اب، اج ہیں۔

فرض کرو کہ اب، اج دو خط ہیں جو اپنی سمت اور مقدار سے دو جفتوں کے محوروں اور معیاروں کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ س ا سَ ایک خط ہے جو مستوی اب ج پر عمود ہے جہاں ا اِس خط کا وسطی نقطہ ہے۔ س اور سَ میں سے مستوی اب ج کے متوازی مستویاں کھینچو اور فرض کرو کہ جفت اب کی بجائے اِن دو مستویوں میں قوتیں ف س، فَ سَ ہیں جہاں خطوط ف س، فَ سَ (۱۰۶) دونوں اب پر عمود ہیں۔ اسی طرح فرض کرو کہ جفت اج کی بجائے اُن ہی دو مستویوں میں قوتیں ق س اور قَ سَ ہیں۔

اب اِن دو جفتوں کی بجائے چار قوتیں ف س، ق س، فَ سَ، قَ سَ ہیں۔

متوازی الاضلاعوں ف س ق ر، اب اج د، فَ سَ قَ رَ کی تکمیل کرو۔ صریحاً یہ متوازی الاضلاع سب کے سب ایک دوسرے کے مشابہ ہیں اور پہلے اور دوسرے متوازی الاضلاعوں کے

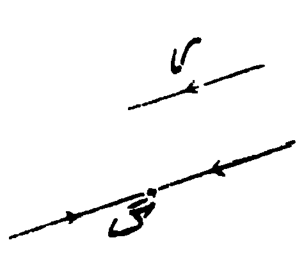
نظیری خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ اس طرح اس جفت کی بجائے جو اد سے تعبیر ہوتا ہے دو قوتیں ر اس، ر سَ رکھی جا سکتی ہیں۔ لیکن یہ دو قوتیں ان چار قوتوں ف س، ق سَ، ف سَ، ق سَ کے ٹھیک مماثل ہیں جن میں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جفت اب، اج تحویل ہو سکتے ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

قوتیں فضا میں

۸۳ — جب ایک جسم پر عمل کرنے والی قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں نہ ہوں تو ان کا حاصل بالعموم ایک واحد قوت نہیں ہوگا۔

مسئلہ۔ ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں جہاں قوت ایک اختیاری طور پر منتخبہ نقطہ پہ عمل کرے۔

فرض کرو کہ گ منتخبہ نقطہ ہے اور ر کوئی قوت ہے جس کا خط عمل گ میں سے نہیں گذرتا۔ گ پر دو مساوی اور مخالف قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ر کے مساوی اور اس کے خط عمل کے متوازی ہو ان میں سے ایک قوت کو ابتدائی قوت ر کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک جفت حاصل ہوتا ہے، اس لیے ابتدائی قوت ر کی بجائے ایک قوت (جو ابتدائی قوت کے مساوی اور متوازی ہے لیکن نقطہ گ پر عمل کرتی ہے) اور ایک



شکل (۵۸)

جفت رکھے جا سکتے ہیں ۔
نظام کی تمام قوتوں کے ساتھ یہی عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے

(ا) قوتوں کی ایک تعداد جو منتخبہ نقطہ گ پر عمل کرتی ہیں،

اور (ب) جفتوں کی ایک تعداد

رکھی جا سکتی ہے ۔

گ پر عمل کرنے والی قوتوں کو گ پر کی ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے اور جفتوں کو ایک واحد جفت میں مرکب کیا جا سکتا ہے ۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا ۔

۸۴ ۔ مسئلہ ۔ ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں جہاں جفت کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہو ۔ (۱۰۷)

دفعہ ۸۳ کے مسئلہ سے اِس نظام کی بجائے ایک قوت (جو کسی نقطہ و پر عمل کرے) اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں ۔ فرض کرو کہ اس قوت کی مقدار ر ہے اور اس کا خط عمل و ف ہے ۔ فرض کرو کہ جفت کا معیار گ ہے اور اس کا محور و ق ہے ۔ اگر زاویہ ف و ق کو طہ سے تعبیر کیا جائے تو ہم اِس جفت کو دو جفتوں میں تحلیل کر سکتے ہیں،

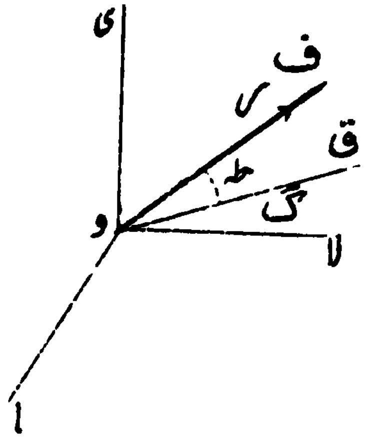
(ا) معیار گ جم طہ کا ایک جفت جس کا محور و ف ہے ۔

اور (ب) معیار گ جب طہ کا ایک جفت جس کا محور و ف پر عمود ہے ۔

اِن میں سے دوسرے جفت کی بجائے کوئی دو قوتیں رکھی جا سکتی ہیں بشرطیکہ وہ ایسی منتخب کی جائیں کہ وہ اس جفت کے مماثل ہوں ۔ فرض کرو کہ اِن میں سے ایک قوت ر ہے جو و ف پر عمل کرتی ہے یعنے یہ وہ قوت ہے جو اُس قوت ر کی جو پہلے ہی سے و ف پر عمل کرتی ہے تعدیل کرتی ہے ۔ جفت کی دوسری قوت وہ قوت ر ہونی چاہئے جو و ف کے

متوازی خط پر اس سے ایک ایسے فاصلہ پر عمل کرے جو $\frac{\text{گ جب طہ}}{\text{ر}}$ کے مساوی ہے

قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے اب حسب ذیل قوتیں اور جفت ہیں:



شکل (۵۹)

(ا) قوتیں + ر ، - ر جو و ف پر عمل کرتی ہیں

(ب) قوت ر جو و ف کے متوازی ہے

(ج) جفت گ جم طہ جس کا محور و ف کے متوازی ہے۔

دو قوتیں (ا) ایک دوسرے کی تعدیل کرتی ہیں اور اس لیے صرف ایک قوت ر اور ایک جفت گ جم طہ رہ جاتا ہے جس کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

قوت کے اس خط عمل کو جو اب جفت کا محور بھی ہے قوتوں کے نظام کا مرکزی محور کہتے ہیں۔ قوتوں کا کوئی نظام سب سے زیادہ سادہ طریقہ پر مشخص ہو جاتا ہے اگر قوت اور جفت کی مقدار اور مرکزی محور کا محل اور سمت معلوم ہوں۔ ایسے کسی نظام کو رنچ (Wrench) کہتے ہیں۔

توضیحی مثالیں (۱۰۸)

۱۔ دو مساوی یکساں تختے قبضے کے ذریعہ ایک سرے پر جوڑے گئے ہیں اور وہ اس طرح کھڑے ہیں کہ ان کے آزاد سرے ایک چکنے افقی مستوی پر ٹکے ہوئے ہیں اور انہیں پھسلنے سے ایک رسی کے ذریعہ روکا گیا ہے جو ہر تختے سے ایک ہی ارتفاع پر بندھی ہے۔ اس رسی کا تناؤ اور قبضے پر عمل معلوم کرو۔

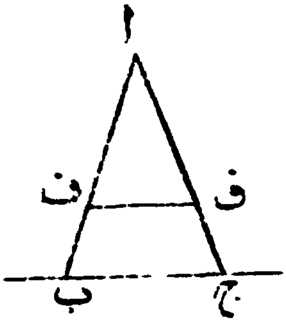
شکل میں فرض کرو کہ ا ب، ا ج دو تختے ہیں جو ا پر قبضے سے جوڑے گئے ہیں اور فرض کرو کہ ف ق رسی ہے۔ تختہ ا ب پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) قبضہ ا پر کا عمل،

(ب) رسی کا تناو جو ف ق پر عمل کرتا ہے،

(ج) پائین ب پر کا تعامل،

(د) وزن۔



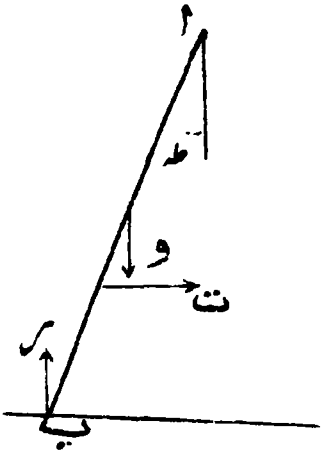
شکل (۶۰)

اِن چار قوتوں میں سے (ا) اور (ب) وہ قوتیں ہیں جن کو معلوم کرنا مطلوب ہے۔ قوت (ج) بھی فی الحال نامعلوم ہے۔ قوت (د) کو جیسا کہ دفعہ ۷۷ میں سمجھایا جا چکا ہے ایک واحد قوت و سمجھا جا سکتا ہے جو تختے کا کل وزن ہے اور چونکہ تختہ یکساں ہے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ قوت اس کے وسطی نقطے میں سے عمل کرتی ہے۔

قوت (ج) کو جو ب پر کا تعامل ہے معلوم کرنے کا ایک سادہ طریقہ ہے۔ چونکہ ب پر تماس چکنا ہے اِس تعامل کی سمت انتصاباً اوپر ہونی چاہیے۔ فرض کرو کہ اس کی مقدار ر ہے۔ تشاکل کی بنا پر دوسرے تختے کے پائین ج پر ٹھیک متشابہ تعامل ہونا چاہیے۔ اب اِس پورے نظام کے توازن پر غور کرو جو دو تختوں اور رسی پر مشتمل ہے۔ اِس نظام پر جو بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں وہ صرف حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن

(ب) ب اور ج پر کے تعامل۔



شکل (۶۱)

اگر ہم انتصاباً تحلیل کریں تو

چونکہ نظام توازن میں ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے ..

۲ و - ۲ ں = ۰

اس لیے ں = و، ہر تعامل ایک تختے کے وزن کے عین مساوی ہے جیساکہ ہمیں توقع ہونی چاہئے تھی ۔

تختہ ا ب پر عمل کرنے والی چار قوتوں میں سے آخری دو قوتیں اب معلوم ہیں اور پہلی دو معلوم کرنی ہیں ۔ اگر ہم ا کے گرد معیار لیں تو قوتوں (ب)، (ج) اور (د) کے درمیان ایک مساوات ملے گی جس سے نامعلوم قوت (ب) یعنے تناؤ معلوم ہوگا ۔

اگر ہم تناؤ کو ت سے تعبیر کریں اور زاویہ ب ا ج کو ۲ ط سے تو ا کے گرد معیار لینے سے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے :

ں = ا ب جب ط - و × ½ ا ب جب ط - ت × ا ف جم ط = ۰

اس لیے ت = (ا ب / ۲ ا ف) و س ط، کیونکہ ں = و

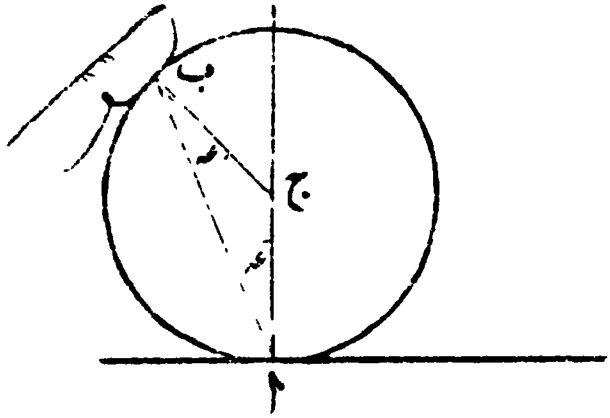
نیز اُفقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ ا پر کا عمل مقدار ت کی ایک افقی قوت پر مشتمل ہونا چاہئے جس کی سمت ت کی سمت کے مخالف ہو۔ (۱۰۹)

۲ - ایک حلقہ ایک میز پر کھڑا ہے اور اس کے ایک نقطے پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ ڈالا گیا ہے ۔ دونوں تماسوں پر رگڑ کی قدریں معلوم ہیں ۔ امتحان کرو کہ توازن اوّلاً کس طرح ٹوٹ جائے گا ۔

فرض کرو کہ حلقہ اور میز کا نقطہ تماس ا ہے اور حلقہ اور انگلی کا نقطہ تماس ب ۔ فرض کرو کہ ا اور ب پر رگڑ کے زاوئے صہ، صَہ ہیں ۔ فرض کرو کہ ب ا انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے ۔

حلقے پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب ذیل ہیں :

(ا) تعامل نقطہ ا پر،
(ب) تعامل نقطہ ب پر،
(ج) حلقہ کا وزن



شکل (۶۲)

آخری قوت کو ایک واحد قوت سمجھنے سے جو حلقہ کے انتصابی قطر ج ا پر عمل کرتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب تک حلقہ ساکن رہتا ہے وہ تین قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے۔

پس دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کے رُو سے ان تین قوتوں کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

یہ معلوم ہے کہ وزن کا انتصابی خط ج ا ہے اور ا پر کے تعامل کا خطِ عمل ا میں سے گذرنا چاہئے۔ اس لئے یا تو

(عہ) وہ نقطہ جس میں تین خطوط عمل ملتے ہیں ا ہونا چاہئے، یا

(بہ) ا پر کا تعامل ج ا پر عمل کرنا چاہئے، اس لئے وہ نقطہ جسمیں تین خطوط عمل ملتے ہیں ج ا میں ا کے سوا کوئی دوسرا نقطہ ہوگا۔

یہ دوسری صورت فوراً خارج کی جاسکتی ہے کیونکہ اگر ا پر کا تعامل ج ا پر عمل کرتا ہے تو اسکو اور وزن کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جاسکتا ہے اور اب

توازن اِس قوت اور ب پر کے تعامل کے تحت ہونا چاہیئے ۔ اِس کے لیے ضروری ہے کہ ہر قوت معدوم ہو یعنی ب پر کوئی دباؤ نہ ہو اور ا پر کا تعامل حلقہ کے وزن عین برابر ہو ۔ اِس سے صریحاً توازن کی ایک حالت ملتی ہے — یعنی حلقہ میز پر کھڑا ہے اور اِس پر صرف اِس کا وزن عمل کرتا ہے ——— لیکن توازن کی یہ حالت وہ نہیں ہے جس سے ہمیں اِس مثال میں واسطہ ہے ۔

اب ہم صورت (عہ) پر غور کریں گے ۔ اگر تین خطوط عمل ا پر ملتے ہیں تو ب پر کے تعامل کو ب ا پر عمل کرنا چاہیئے اور یہ بات درست ہونی چاہیئے خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی بڑا ہو ۔ پس ب پر کا تعامل عماد کے ساتھ ہمیشہ زاویہ عہ بنائیگا اگر عہ، ب پر کے رگڑ کے زاویہ صہ سے کم ہے تو تعامل کے لیے یہ ایک ممکن خط عمل ہوگا اور ب پر کوئی پھسلن واقع نہ ہو سکے گی خواہ ب پر کتنا ہی بڑا دباؤ عمل کرے ۔

برخلاف ازین اگر عہ، صہ سے بڑا ہے تو توازن ناممکن ہے خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی چھوٹا ہو ۔ اِس لیے اگر توازن ہے تو ب پر کا دباؤ معدوم ہونا چاہیئے اور اِس طرح ہم توازن کی اُسی حالت پر پہنچتے ہیں جو صورت (بہ) میں حاصل ہوئی تھی ۔ جوں ہی ب پر کا دباؤ قابل قدر ہو جاتا ہے توازن ب پر پھسلن واقع ہونے کی وجہ سے ٹوٹ جاتا ہے کیونکہ ب پر توازن برقرار رکھنے کے لیے تعامل کو ایسے زاویہ پر عمل کرنا پڑیگا جو رگڑ کے اصلی زاویہ سے بڑا ہو ۔



شکل (۶۳)

اس طرح حل دو مختلف صورتوں میں پیش ہوتا ہے :—

صورت (۱) اگر عہ، صہ سے بڑا ہے تو جوں ہی ب پر دباؤ ڈالا جاتا ہے حرکت واقع ہوتی ہے ۔ حلقہ ب پر پھسلتا ہے اور اِس لیے ا پر لڑھکتا ہے ۔

صورت (۲) اگر عہ، صہ سے کم ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ ب پر خواہ کتنا ہی بڑا دباؤ ڈالا جائے دب پر پھسلن واقع نہیں ہو سکتی۔ اب یہ امتحان کرنا باقی ہے کہ آیا ا پر پھسلن واقع ہو گی۔

اِس سوال کا تصفیہ کرنے کے لیے ہمیں یہ معلوم کرنا چاہیے کہ آیا ا پر کا تعامل انتصابی کے ساتھ ایک ایسے زاویہ پر عمل کرتا ہوا معلوم کیا جا سکتا ہے جو اتنا بڑا ہو جتنا ا پر رگڑ کا زاویہ ہے یعنے صہ۔ اب حلقہ پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں یعنے ا اور دب پر کے تعامل ر۱، رب (فرض کرو) اور حلقہ کا وزن و۔ اِن قوتوں کے خطوط نقطہ ا پر ملتے ہیں اور لامی کے مسئلے سے ہم قوتوں کی مقداروں اور اِن کے درمیانی زاویوں کے درمیان رشتے معلوم کر سکتے ہیں۔

اِن تین قوتوں کے خطوط عمل شکل (۶۳) میں تعبیر کیے گئے ہیں۔ و اور رب کا درمیانی زاویہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں ہمیشہ عہ کے مساوی ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ر۱ اور انتصابی کے درمیان زاویہ طہ ہے اب لامی کے مسئلے سے

$$\frac{\text{ر}_1}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{ر}_\text{ب}}{\text{جب طہ}} = \frac{\text{و}}{\text{جب (عہ − طہ)}}$$

ر۱ کی قیمت معلوم نہیں ہے، لیکن آخری دو کسروں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{\text{و}}{\text{ر}_\text{ب}} = \frac{\text{جب(عہ − طہ)}}{\text{جب طہ}} = \text{جب عہ مم طہ − جم عہ}$$

اِس لیے

$$\text{مم طہ} = \left(\text{جم عہ} + \frac{\text{و}}{\text{ر}_\text{ب}}\right)\text{قم عہ}$$

اِس مساوات سے ہم زاویہ طہ کی قیمت میں تبدیلیاں معلوم کر سکتے ہیں (۱۱۱)
جبکہ رب کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے۔ چنانچہ جب رب = ۰ تو طہ کی قیمت = ۰۔ پھر جیسے رب صفر سے بڑھتا ہے طہ مسلسل بڑھتا ہے لیکن قیمت طہ = عہ سے متجاوز نہیں ہوتا اور اِس قیمت پر وہ اُس وقت پہنچتا ہے جبکہ رب = ∞۔

اگر صہ، عہ سے کم ہے تو طہ کی قیمت، قیمت صہ میں سے گذرے گی جبکہ رب ایک خاص قیمت پر پہنچے۔ یعنے جبکہ

ک ب = و جب صہ / جب (عہ − صہ)

اور اس نقطہ پر ا پر پھسلن واقع ہو گی۔

اگر صہ، عہ سے بڑا ہے تو طہ کی قیمت، قیمت صہ پر کبھی بھی نہیں پہنچے گی اور اس لیے ا پر کبھی بھی پھسلن واقع نہیں ہو گی۔ اس لئے توازن ہرگز نہیں ٹوٹے گا اور جتنی قوت سے ب پر ہم دبائیں گے اتنی ہی زیادہ مضبوطی سے حلقہ انگلی اور میز کے درمیان گرفت میں رہے گا۔

اب ہم محصلہ نتیجوں کو خلاصہ کے طور پر ذیل میں درج کرتے ہیں:

اگر عہ > صہ تو حلقہ میز پر لڑھکتا ہے جوں ہی ہم ب پر دبانا شروع کرتے ہیں۔

اگر عہ < صہ تو دو صورتیں ہیں:

(ا) عہ > صہ تو حلقہ ا پر پھسلے گا جوں ہی کافی دباؤ لگایا جائے

(ب) عہ < صہ تو حلقہ کسی دباؤ کے تحت بھی متحرک نہیں کیا جا سکتا۔

حلقے کو انگلی کے نیچے سے ا پر پھسلا کر نکالنے کے لیے (اس صورت میں وہ اچھل کر ہاتھ میں آجائے گا جیسا کہ مشہور ہاتھ کی چالاکی کے کرتب میں کیا جاتا ہے) حلقے کو ایسے نقطہ پر دبانا ضروری ہے جس پر عہ، صہ سے بڑا ہو لیکن صہ سے کم ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ، صہ سے بڑا ہو تو حلقہ کو اس طریقے سے پھینکنا ناممکن ہے یہ صرف اس وقت کیا جا سکتا ہے جبکہ انگلی کے ساتھ حلقے کا تماس میز کے ساتھ حلقے کے تماس سے زیادہ کھردرا ہو۔

عام مثالیں

۱۔ دو یکساں سیڑھیوں کو جن میں سے ہر ایک ۱۲ فٹ لمبی اور ۲۰ پونڈ وزنی ہے سرے پر جوڑ کر ایک دوہری سیڑھی بنائی گئی ہے، سیڑھیوں کے ان نقطوں کو جو زمین سے ۵ فٹ بلند ہیں ۷ فٹ لمبی رسی سے ملحق کیا گیا ہے، یہ دوہری سیڑھی ایک چکنے افقی مستوی پر کھڑی ہے اور ایک شخص جس کا وزن

۱۶۰ پونڈ ہے ایک جانب ۹ فٹ بلندی تک چڑھتا ہے۔ رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک وزنی یکساں ڈنڈے کو دو ڈوریوں سے جن کے طول ا، ب ہیں سہارا گیا ہے، ڈوریوں کے اوپر کے سرے ایک ہی نقطے سے باندھے گئے ہیں اور نیچے کے سرے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ علی الترتیب ا اور ب کے متناسب ہیں۔

۳۔ دو چھوٹی ثابت کھونٹیاں ایک ایسے خط میں ہیں جو افق سے زاویہ ط پر مائل ہے۔ ایک کھُردرا پتلا ڈنڈا نچلی کھونٹی کے نیچے سے گذرتا ہے اور اوپر کی کھونٹی پر ٹکا ہے، یہ اوپر کی کھونٹی ڈنڈے کے مرکز ثقل سے نیچے ہے۔ کھونٹیوں سے اس مرکز ثقل کے فاصلے علی الترتیب ا اور ب ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ڈنڈا عین حرکت کے نقطے پر ہو تو

$$مہ = \frac{ب - ا}{ب + ا} مس ط$$

۴۔ دو وزنی یکساں ڈنڈوں کے سرے دو ہلکی ڈوریوں سے مربوط ہیں اور یہ پورا نظام ایک ڈنڈے کے وسطی نقطے سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں یا تو ڈنڈے متوازی ہوتے ہیں یا ڈوریاں متوازی ہوتی ہیں۔ (۱۱۲)

۵۔ دو ڈنڈے ا ب، ج د ایک چکنے میز پر پڑے ہیں اور دو تنی ہوئی ڈوریوں ا ج، ب د سے باہم ملحق ہیں۔ اگر یہ نظام ان قوتوں سے جو ڈنڈوں کے وسطی نقطوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں رکھا گیا ہو تو ثابت کرو کہ اگر ڈوریاں متوازی نہیں ہیں تو

(ا) ڈنڈے متوازی ہونے چاہئیں،

(ب) تناؤ ڈوریوں کے متناسب ہونے چاہئیں۔

۶۔ ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ع، وتروں ا ج، ب د کا نقطہ تقاطع ہے۔ ثابت کرو کہ ا، ب، ج، د پر کی متوازی قوتیں ۷، ۵، ۱۶، ۴ حسب ذیل دوسری متوازی قوتوں کے مماثل ہیں: ج د کے

وسطی نقطے پر ۸، ب ج کے وسطی نقطے پر ۱۰، اور ع پر ۱۴

۷ ـ ایک ٹھوس مکعب زاویہ عہ کے ایک کھُردرے مائل مستوی پر رکھا گیا ہے، اِس کے قاعدے کے دو کنارے خطوط میلان اعظم پر ہیں ـ رگڑ کا زاویہ صہ ہے ـ ثابت کرو کہ اگر عہ > ۴۵° تو مکعب فوراً اوندھا گر سے گا لیکن اگر صہ < عہ < ۴۵° تو مستوی پر نیچے پھسلے گا ـ اگر عہ، صہ یا ۴۵° میں سے کسی سے کم ہو تو وہ رگڑ معلوم کرو جو عمل میں آتی ہے ـ

۸ ـ طول ۲ ل اور وزن و کا ایک یکساں ڈنڈا ایک چکنی کھونٹی پر لٹکا ہوا ہے، کھونٹی پر اس کا فاصلہ انتصابی دیوار سے ف (< ل) ہے اور اُس کی سمت افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے ـ اِس کا نچلا سِرا دیوار پر دباؤ ڈالے ہے اور اوپر کا سِرا ایک انتصابی ڈوری کے ذریعہ تھاما گیا ہے ـ ڈوری کا تناؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ معدوم ہو گا اگر

$$\text{طہ} = \text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ل}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

۹ ـ دو مساوی یکساں کُرے جن میں سے ہر ایک کا وزن و اور نصف قطر ا ہے ایک چکنے نیم کروی پیالے میں جس کا نصف قطر ب ہے پڑے ہوئے ہیں ـ اِن دو کروں کے درمیان دباؤ معلوم کرو اور نیز ہر کرہ کا دباؤ پیالے پر دریافت کرو ـ

۱۰ ـ ایک یکساں ڈنڈے کے سِرے چکنے مائل مستویوں پر ہیں جن کے میلان افق سے عہ اور بہ ہیں ـ افق کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو ـ

۱۱ ـ مثال ۱۰ میں ڈنڈے کے وزن کے مساوی ایک وزن ڈنڈے سے پیوست کیا گیا ہے ـ اِس وزن کو کس نقطہ پر لگانا چاہیئے کہ ڈنڈا افقاً ساکن رہ سکے ـ

۱۲ ـ وزن و کا ایک یکساں دائری حلقہ ہے جس پر وزن و کے ایک منکے کو پیوست کیا گیا ہے ـ حلقہ ایک کھُردری کھونٹی پر لٹک رہا ہے ـ ثابت کرو کہ اگر جب صہ > $\frac{\text{و}}{\text{و} + \text{و}}$ تو حلقہ بغیر پھسلے ساکن رہ سکتا ہے خواہ اس کا کوئی نقطہ

کھونٹی پر ٹکے جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے —

۱۳— ایک مخمس ا ب ج د ع، پانچ مساوی یکساں وزنی ڈنڈوں کو سِروں پر چکنے قبضوں کے ذریعہ جوڑ کر بنایا گیا ہے۔ یہ مخمس ایک انتصابی مُستوی میں تشاکلاً سہارا گیا ہے اِس طور پر کہ ا سب سے اوپر ہے اور اب، اع دو چکنی کھونٹیوں کو مس کرتے ہیں جو ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مخمس منتظم ہو تو کھونٹیاں، اب اور اع میں سے ہر ایک کو نسبت

۱ + جب $\frac{1}{10}$ π : ۳ جب $\frac{1}{10}$ π

میں تقسیم کرنی چاہئیں —

۱۴— طول ن کا ایک یکساں شہتیر نصف قطر ر کے ایک نیم کروی پیالے (۱۱۳ ز
کی اُفقی کور کے سہارے پڑا ہے اور اِس کا نچلا سِرا پیالے کی چکنی مقعر سطح پر ٹِکا ہوا ہے۔ انتصابی کے ساتھ اِس کا میلان معلوم کرو —

۱۵— ایک پیالہ گردشی مکافی نما کی شکل کا ہے جس کو اِس طرح رکھا گیا ہے کہ اِس کا محور انتصابی ہے۔ ایک یکساں ڈنڈا ماسکے پر کی ایک میخ پر ٹِکا ہوا ہے اور اِس کا نچلا سِرا اندرونی سطح پر ہے۔ دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ انتصابی کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو —

۱۶— وزن و کا ایک یکساں شہتیر ایک انتصابی دیوار پر اور ایک افقی مُستوی پر جس کے ساتھ وہ زاویہ عہ بناتا ہے ٹِکا ہوا ہے، دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ شہتیر کے نچلے سِرے کو ایک ڈوری کے ذریعہ دیوار کے پائین سے باندھا گیا ہے۔ رسی کا تناؤ معلوم کرو —

۱۷— ایک سیدھے یکساں وزنی ڈنڈے کا ایک سِرا ایک کھُردُرے اُفقی مُستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرے سِرے کو ایک رسی کے ذریعہ ایک ثابت نقطے سے ملحق کیا گیا ہے۔ اگر ڈوری، ڈنڈے اور افقی مُستوی کے کل تعامل کے میلان سمت انتصابی کے ساتھ علی الترتیب طہ، فہ، پہ ہوں تو ثابت کرو کہ

مم طہ ± ۲ مم فہ − مم پہ = ۰

۱۸ ــ ایک ہی مادی شئے کے لیکن مختلف طول کے دو یکساں ڈنڈے ا ب، ب ج آزادانہ طور پر ب پر جوڑے گئے ہیں اور ایک انتصابی دیوار پر نقطوں ا اور ج پر ثبت کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب پر کے تعامل کی سمت زاویہ ا ب ج کی تنصیف کرتی ہے۔

۱۹ ــ وزن و کے ایک یکساں منتظم مسدسی تختہ ا ب ج د ع ف کو تین کھونٹیوں پر جو کونوں ا، ب پر اور د ع کے وسطی نقطہ پر واقع ہیں افقی محل میں سہارا گیا ہے۔ کھونٹیوں پر دباؤ معلوم کرو۔

۲۰ ــ دو کرے جن کے نصف قطر ا، ب اور وزن و، وَ ہیں علی الترتیب طول ل، لَ کی ڈوریوں کے ذریعہ چھت کی ایک ہی کنڈی سے آزادانہ لٹکائے گئے ہیں۔ اگر لَ > ل + ۲ ا تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو پہلی ڈوری انتصابی کے ساتھ بناتی ہے حسب ذیل ہے؛

$$\text{جب}^{-1} \frac{\text{وَ ا}}{(\text{و} + \text{وَ})(\text{ا} + \text{ل})}$$

۲۱ ــ ایک یکساں ڈنڈا طول ل، لَ کی دو ڈوریوں کے ذریعے جو اس کے سروں سے اور دو کنڈیوں سے بندھی ہیں لٹکتا ہے۔ کنڈیاں ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں۔ اگر ڈوریاں ایک دوسرے کو عبور کریں اور اُفق کے ساتھ علی الترتیب زاویے عہ، عَہ بنائیں تو ثابت کرو کہ جب ڈنڈا توازن میں ہوتا ہے تو

$$\text{جب}(\text{عہ} + \text{عَہ})(\text{لَ جم عَہ} - \text{ل جم عہ}) = \text{ا جب}(\text{عہ} - \text{عَہ})$$

۲۲ ــ طول ۲ ب کا ایک یکساں تختہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک کھردرے افقی مستوی پر ہے اور تختہ نصف قطر ا کے ایک چکنے ثابت اسطوانہ کو جو مستوی پر پڑا ہے مس کرتا ہے اور مستوی کے ساتھ زاویہ ۲ عہ بناتا ہے۔ رگڑ کی قدر صہ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ممکن ہے اگر

$$\text{ا جب صہ} > \text{ب مس عہ جم ۲ عہ جب}(\text{۲ عہ} + \text{صہ})$$

۲۳ ــ دو مساوی اور مشابہ متساوی الساقین فانے جن میں سے ہر ایک کا

ن و اور انتصابی زاویہ ۲ عہ ہے پہلو بہ پہلو رکھے گئے ہیں، اِن کے قاعدے افقی میز پر ہیں اور وہ میز کو وہ ایک کنارے پر عین مس کرتے ہیں۔ وزن و اور نصف قطر ر کا ایک چکنا کرہ اُن کے درمیان سہارا ہے اور وہ ہر ایک کے ایک رُخ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے لیے یہ ضروری ہے کہ

$$مہ > \frac{و م عہ}{۲ و + و}، \quad ر < ۲ ا جب عہ مس عہ \left(۱ + \frac{و}{و}\right)$$

یہاں مہ رگڑ کی قدر کو تعبیر کرتا ہے اور ۲ ا خانے کے قاعدے کا طول ہے۔

۲۴ — وزن و کا ایک مستطیلی تختہ ایک ثابت کھردرے کندے پر جس کی شکل ایک افقی مستدیر اسطوانے کی ہے آڑا پڑا ہوا ہے۔ تعادل کی حالت میں افقی کے ساتھ یہ تختہ جو زاویہ بناتا ہے وہ عہ تک بڑھ جاتا ہے جبکہ اس کے نیچے کے اور اوپر کے سروں پر علی الترتیب وزن و اور وَ رکھے جاتے ہیں اور یہ زاویہ بہ تک گھٹ جاتا ہے جب کہ اِن وزنوں کا باہمی تبادلہ کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ تختہ کا میلان افق کے ساتھ جبکہ اس پر کوئی وزن نہ ہو حسب ذیل ہے:

$$\frac{وَ(و + وَ + و)(وَعہ - و بہ)}{و(و + وَ - وَ)(و - وَ)}$$

یہاں وَ وہ وزن ہے جس کو اوپر کے سرے پر رکھنے سے تختہ افقاً متوازن ہوتا ہے۔

۲۵ — ایک زنجیر ۲ ن بالکل مشابہ کڑیوں سے بنی ہے اور متصلہ کڑیوں کے درمیان تماس کامل چکنے ہیں — سروں پر کی دو کڑیاں ایک افقی تار میں پھسل سکتی ہیں لیکن یہاں تماس کھردرے ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے ثابت کرو کہ توازن کے انتہائی محل میں اوپر کی کڑیوں میں سے کسی ایک کا میلان انتصابی کے ساتھ حسب ذیل ہے

$$مس^{-۱} \frac{۲ ن مہ}{۲ ن - ۱}$$

۲۶ — نصف قطر ر کے دو مساوی دائری قرص جن کے کنارے چکنے ہیں

اپنے چپٹے رخوں پر دو چکنے انتصابی مستویوں کے درمیانی کونے میں رکھے گئے ہیں۔ یہ مستوی زاویہ ۲ عہ پر ایک دوسرے سے مائل ہیں اور قرص ایک دوسرے کو اس خط پر مس کرتے ہیں جو اس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ بڑے سے بڑا قرص جو ان کے درمیان بغیر ان کو ہٹائے بٹھایا جا سکتا ہے وہ ہے جس کا نصف قطر ر (قط عہ - ۱) ہے۔

۲۷ — مثال سابق کے نتیجے میں کیا ترمیم کرنی ہوگی اگر تمام تماس کھردرے ہوں اور ہر تماس پر رگڑ کا زاویہ صہ ہو۔

۲۸ — دو یکساں سیڑھیاں ایک سرے پر جوڑی گئی ہیں، اور یہ دوہری سیڑھی ایک کھردرے افقی مستوی پر اپنے دوسرے سروں پر کھڑی ہے۔ ایک شخص جس کا وزن ایک سیڑھی کے وزن کے مساوی ہے ایک سیڑھی پر چڑھتا ہے ثابت کرو کہ دوسری سیڑھی پہلے پھسلے گی۔

اگر وہ پھسلنے لگے جبکہ شخص فاصلہ لا تک چڑھ چکا ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کی قد (ا + لا) / (۲ا + لا) ہے جہاں ا ہر سیڑھی کا طول ہے اور عہ وہ زاویہ ہے جو ہر سیڑھی انتصابی سے بناتی ہے۔

(۱۱۵) ۲۹ — ایک غیر وزنی سیڑھی، وزن و کے ایک چکنے مکعب کے سہارے چکنی زمین پر کھڑی ہے اور سیڑھی کا پایہ مکعب کے زیر ترین کناروں میں سے ایک کے وسطی نقطہ کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ بندھا ہے۔ وزن و کا ایک شخص سیڑھی پر چڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سیڑھی مکعب کے سرے سے باہر نکلی ہوئی ہو تو مکعب الٹ جائیگا قبل اس کے کہ شخص مکعب کے سرے پر پہنچے الّا انکہ

و > ۲ و جم عہ (جب عہ - جم عہ)

جہاں افق کے ساتھ سیڑھی کا زاویہ میلان عہ ہے۔

۳۰ — چار مساوی کرے ایک چکنے کروی پیالے کی تہہ میں پڑے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، کروں کے مرکز ایک افقی مستوی میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دوسرا مساوی کرہ ان پر رکھا جائے تو نیچے کے کرے جدا ہونگے

اگر پیالے کا نصف قطر ایک کرہ کے نصف قطر کے $(2\sqrt{13}+1)$ گُنے سے بڑا ہو۔

۳۱ — تین مساوی کُرے ایک چکنے افقی مُستوی پر ساکن ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، اِن کے مرکز ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں اور کُروں کو باہم ایک مہین ڈوری سے جو اِن کے گرد گذرتی ہے اور مرکزوں کے مُستوی میں ہے باندھا گیا ہے۔ اگر دوسرا مساوی کرہ اِن پر متشاکلاً رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ بقدر $\frac{1}{\sqrt{6}}$ و کے بڑھ جاتا ہے جہاں و اوپر کے کرہ کا وزن ہے۔

۳۲ — ایک قائم مستدیر مخروط جس کا انتصابی زاویہ ۲ عہ ہے اپنے قاعدہ کے سہارے ایک افقی کھردرے مُستوی پر ساکن ہے۔ اِس کے راس سے ایک ڈوری باندھ کر ڈوری کو افقی سمت میں بتدریج بڑھنے والی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ معلوم کرو کہ توازن اولاً کس طرح ٹوٹیگا۔

۳۳ — ایک وزنی ذرہ کو ایک کھردرے مائل مُستوی پر رکھا گیا ہے جس کا میلان رگڑ کے زاویہ کے ٹھیک مساوی ہے۔ ذرہ سے ایک تاگا باندھ کر تاگے کو مُستوی کے ایک سوراخ میں سے جو ذرہ کے نیچے ہے گذارا گیا ہے لیکن تاگا سوراخ میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تاگے کو سوراخ میں سے بتدریج کھینچا جائے تو ذرہ ایک خط مستقیم اور ایک نیم دائرہ علی التواتر مرتسم کرے گا۔

۳۴ — وزن و کا ایک یکساں مکعبی کُندہ ایک کھردرے مائل مُستوی پر اس طرح ساکن ہے کہ اِس کا ایک کنارہ افقی ہے۔ اور کُندے کے سہارے ایک کھردرا کرہ ہے جس کا وزن وَ ہے اور جس کا نصف قطر مکعب کے ایک کنارے سے کم ہے۔ مُستوی کے میلان کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے۔ وہ مختلف طریقے معلوم کرو جن میں توازن ٹوٹ سکتا ہے اور معلوم کرو کہ کسی معلومہ صورت میں کون سا طریقہ واقع ہوگا۔

۳۵ — ایک کھردرے یکساں ڈنڈے کو ایک افقی مُستوی پر رکھا گیا ہے اور اس کے طول کے نقاط تثلیث میں سے ایک نقطہ پر ایک افقی قوت

اِس کے طول کے عمود وار سمت میں عمل کرتی ہے ۔ معلوم کرو کہ کس نقطہ کے گرد ڈنڈا گھومنے لگیگا ۔

۳۶ ۔ ایک وزنی سلاخ ا ب کو طول ل کی دو مساوی ڈوریوں کے ذریعہ جو ابتداً متوازی ہیں لٹکایا گیا ہے ۔ وہ جفت معلوم کرو جس کو سلاخ پر لگانا ہوگا تاکہ سلاخ کو افقی مستوی میں زاویہ طہ میں سے گھما دینے کے بعد ساکن رکھا جا سکے ۔

۳۷ ۔ ایک دروازے کے قبضوں کا خط انتصابی سے زاویہ عہ پر مائل ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ جفت جب عہ جب طہ کے متناسب ہے جو دروازے کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہوتا ہے جو توازن کے محل سے زاویہ طہ پر مائل ہو ۔ (۱۱۶)

۳۸ ۔ ثابت کرو کہ ایک اُستوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کو دو مساوی قوتوں میں جو مرکزی محور سے مساوی طور پر مائل ہوں تحویل کیا جاسکتا ہے ۔

۳۹ ۔ ثابت کرو کہ دو قوتوں ف اور ق کا مرکزی محور اِن کے خطوطِ عمل کے درمیانی فاصلہ م کو قطع کرتا ہے اور اِس کو نسبت

ق (ق + ف جم طہ) : ف (ف + ق جم طہ)

میں تقسیم کرتا ہے جہاں طہ قوتوں کی سمتوں کا درمیانی زاویہ ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ صدر جفت کا معیار حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{م ف ق جب طہ}}{\sqrt{\text{ف}^2 + \text{ق}^2 + \text{۲ ف ق جم طہ}}}$$

۴۰ ۔ ثابت کرو کہ دو معلومہ پیچوں (ک، ھ) اور (ک، ھ) کے حاصل کا [illegible] پیچوں کے محوروں کے درمیانی عمودی فاصلہ ۲ م کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا فاصلہ وسطی نقطہ سے حسب ذیل ہے :

$$\frac{\text{(ک - ک) م + (ھ ک - ھ ک) جب طہ}}{\text{[illegible]}}$$

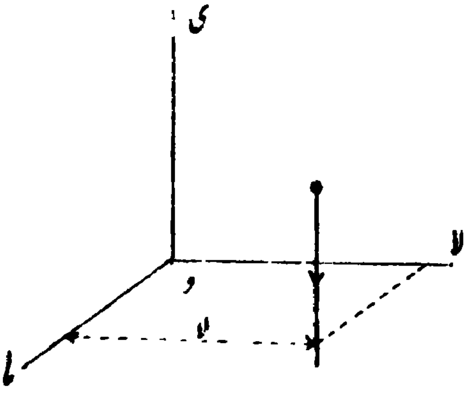
طہ [illegible] کے درمیان ہے

(۱۱۰)

چھٹا باب

مرکز ثقل

۸۵ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ کمیتوں کے ایک نظام پر جاذبہ ارض کا عمل متوازی قوتوں کے ایک نظام سے تعبیر ہو سکتا ہے' یہ قوتیں اُن قوتوں پر مشتمل ہوتی ہیں جو ہر ذرّے پہ ذرّے کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہیں' اور اِن کی سمت انتصاباً نیچے وار ہوتی ہے ۔ اُن قاعدوں کی بموجب جو باب ماسبق میں سمجھائے جا چکے ہیں اِن قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے ۔ اِس قوت کی مقدار تمام ترکیبی قوتوں کا مجموعہ ہے اور اِس لیے وہ جسم کا کُل وزن ہے' اور اِس قوت کی سمت ترکیبی قوتوں کے متوازی ہونے کی وجہ سے خود انتصاباً نیچے وار ہے ۔ اِس باب میں اِس قوت کے خطِ عمل کے محل کو معلوم کرنے کا مسئلہ زیرِ بحث رہیگا۔



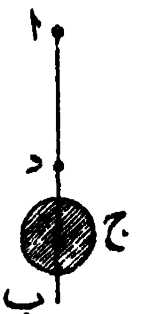
۸۶ — فرض کرو کہ ذروں کی کمیتیں ک، ک، ... ہیں ۔
... قائم محور لے گئے ...
... کرو کہ پہلے ذ ...

(یعنی وتروں کے نقطہ تقاطع پر)۔

۸۹ — اجسام کے کسی نظام کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے جبکہ اس کے حصوں میں سے ہر ایک کا مرکز ثقل معلوم ہو۔ کیونکہ ہر حصہ کے وزن کو ایک واحد قوت سمجھنے سے جو اس کے مرکز ثقل میں سے عمل کرتی ہے ہمیں عمل کرنے والی متوازی قوتوں کی ایک تعداد ملے گی اور ان متوازی قوتوں کو بیان کردہ قاعدوں کی بموجب مرکب کرنے سے حاصل کے خط عمل سے وہ خط معلوم ہوگا جس پر کل وزن عمل کرے گا۔ اس طرح اجسام کے کل نظام کا مرکز ثقل جداگانہ اجسام کے مراکز ثقل کا مرکز ہندسی ہوگا جبکہ ان مراکز ثقل کو جسموں کی کمیتوں کی بموجب وزنی سمجھا گیا ہو۔

۹۰ — مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک رقاص کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو طول ل اور وزن و کے ایک تار پر جس کے ساتھ وزن **و** کا ایک دائری شاقول لٹکا ہوا ہے مشتمل ہے۔ فرض کرو کہ شاقول کے دائرے کا مرکز تار کے سرے سے فاصلہ ا پر ہے۔

فرض کرو کہ تار ا ب ہے، شاقول کا مرکز ج ہے اور تار کا وسطی نقطہ د ہے۔ تار کا مرکز ثقل د پر ہوگا اور شاقول کا ج پر، اس لیے اس نظام کا
مرکز ثقل نقطوں د اور ج کے مرکز ہندسی پر ۱۲۰
ہوگا جبکہ ان نقطوں کو نسبت و : **و** میں وزنی بنایا گیا ہو۔ اس مرکز ثقل کو ث سے تعبیر کیا جائے تو ضابطہ



شکل (۶۵)

$$\text{لا} = \frac{\Sigma\, \text{ک}_1\, \text{لا}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}$$

سے جبکہ خط ا د ج ب کو محور لا اور ا کو مبدا فرض کیا جائے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا ث} = \frac{\mathbf{و} \times \text{ا ج} + \text{و} \times \text{ا د}}{\mathbf{و} + \text{و}}$$

$$= \frac{و_1 (ل - ا) + \frac{1}{2} و ل}{و_1 + و}$$

مثالیں

۱۔ ایک مربع کے تین کونوں میں سے ہر ایک پر ۳ پاؤنڈ کے وزن رکھے گئے ہیں اور چوتھے کونے پر ۵ پونڈ کا ایک وزن رکھا گیا ہے۔ مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۔ مقوے کے ایک مربع کے ایک کونے سے ۳ انچ کنارے کا ایک مربع کاٹ لیا گیا ہے۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو اگر اول الذکر مربع کا کنارا ۶ انچ ہو۔

۳۔ ۶ اونس وزن اور ۶ انچ طول کے ایک پتلے ڈنڈے کو ۶ اونس وزن کے ۶ انچ نصف قطر کے ایک دائرے پر اس طرح ثبت کیا گیا ہے کہ اس کے سرے دائرے کے محیط پر ہیں۔ کل کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۴۔ بائیسکل کے ایک پہیہ کا قطر ۲۶ انچ اور وزن ۳ پونڈ ہے۔ اس کے ہر آرے کا طول ۱۱ انچ ہے اور ہر آرا پہیہ کے مرکزی محور سے نصف انچ فاصلے ناف (Hub) سے نکلتا ہے۔ اگر ایک آرے کو پہیہ سے جدا کر لیا جائے تو پہیہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۵۔ ایک ہتوڑے کا دستہ لکڑی کا اسطوانہ ہے جس کا طول ۸ انچ، نصف قطر $\frac{3}{4}$ انچ، وزن ۸ اونس ہے۔ ہتوڑے کا سرا لوہے کا ایک سطوانہ ہے جس میں ایک سوراخ بنا ہوا ہے جس کے اندر دستہ ٹھیک بیٹھتا ہے ہتوڑے کے اس سرے کا طول ۳ انچ، نصف قطر $1\frac{1}{4}$ انچ اور وزن ۳ پونڈ ہے۔ مرکز ثقل کا تقریبی محل معلوم کرو۔

۶۔ ایک صندوق بغیر ڈھکن کے ایک انچ موٹی لکڑی سے بنایا گیا ہے اس کے اندرونی ابعاد ۱۲ × ۱۲ × ۱۲ انچ ہیں۔ اس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو۔

۷۔ طول ۲۸ انچ کے ایک یکساں پتلے ڈنڈے کو اس طریقہ سے خم دیا گیا ہے کہ ۱۲ انچ اور ۱۶ انچ کے دو حصے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ مرکز ثقل،

معلوم کرو ۔

۸ ۔ ایک یکسان تار کو ایک مثلث کی شکل میں خم دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ تار کا مرکز ثقل اس دائرے کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے جو اس مثلث کے اندر بنایا گیا ہو جو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بنتا ہے ۔

۹ ۔ ایکساں کثافت کے دیودار سے شکل T کا گنیا بنایا گیا ہے ، آڑے جزو کے ابعاد ۶ × ۲ × ½ انچ ہیں اور کھڑے جزو کے ابعاد ۸ × ½ ۱ × ⅛ انچ ۔ آڑے جزو کو اس طرح تراشا گیا ہے کہ اس کی نیچے کی سطح مستوی ہے ۔ کل نظام کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو ۔

۱۰ ۔ وزنوں و‌ا ، و‌ب ، و‌ج کے تین منکے ایک دائری تار میں پروئے گئے ہیں اور جب منکے دائرے کے نقطوں ا ، ب ، ج پر ہوتے ہیں تو کل نظام کا مرکز ثقل دائرہ کے مرکز و پر منطبق ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ (۱۲۱)

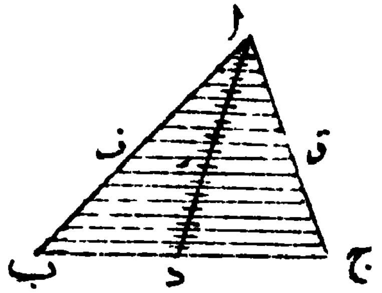
$$\frac{و_ا}{\text{جب ب و ج}} = \frac{و_ب}{\text{جب ج و ا}} = \frac{و_ج}{\text{جب ا و ب}}$$

پترے کا مرکز ثقل

۹۱ ۔ پترا پتلا اور مستوی ہوتا ہے اور اس کی موٹائی اور کثافت ایکساں ہوتی ہے مثلاً ایک مقوے کی چادر سے ہم کوئی شکل کاٹ لیں ۔ کسی پترے کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرنا اکثر اہم ہوتا ہے ۔

۹۲ ۔ مثلث کا مرکز ثقل ۔ فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلثی پترا ہے جس کے مرکز ثقل کے محل کو معلوم کرنا مطلوب ہے ۔ فرض کرو کہ مثلث کو قاعدہ ب ج کے متوازی خطوں سے لاانتہا تنگ پٹیوں کی ایک بہت بڑی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے ۔ فرض کرو کہ کوئی پٹی ف ق ہے ۔ چونکہ

بموجب فرض ہم اس پٹی کو لاانتہا
کم عرض اور موٹائی کی سمجھ سکتے ہیں
اس لیے ہم اس کو ایک پتلا
ایکساں ڈنڈا تصور کر سکتے ہیں۔
کسی پتلے ایکساں ڈنڈے کا مرکز ثقل
اس کے وسطی نقطہ پر ہوتا ہے،
اس لیے پٹی ف ق کے وزن کو
ر پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے
جو ف ق کا وسطی نقطہ ہے۔



شکل (٦٦)

دوسری پٹیوں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے۔ اس لیے پورے مثلث کے وزن کی بجائے ذروں کے ایک نظام کے اوزان جو ان پٹیوں کے وسطی نقطوں پر واقع ہوں رکھے جا سکتے ہیں۔

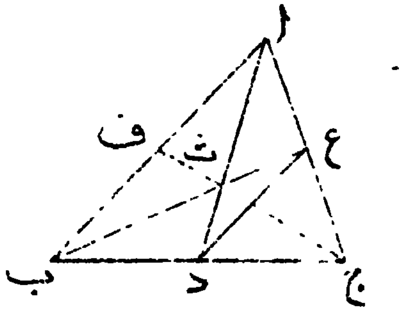
اب اگر قاعدہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہو تو تمام پٹیوں کے وسطی نقطے خط ا د میں واقع ہوتے ہیں۔ اس لیے مثلث کے وزن کی بجائے ذروں کی ایک تعداد کے اوزان ہیں جو سب کے سب خط ا د میں واقع ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پورے مثلث کے مرکز ثقل کو خط ا د میں واقع ہونا چاہئیے۔

(۱۲۲) اسی طرح ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مثلث کو ضلع ا ج کے متوازی پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اب یہ معلوم ہوگا کہ مثلث کے مرکز ثقل کو خط ب ع میں واقع ہونا چاہئیے جہاں ع، ضلع ا ج کا وسطی نقطہ ہے۔

ان دو نتیجوں سے مرکز ثقل کا محل پوری طرح متعین ہو جاتا ہے، چنانچہ اس کو خطوط ا د، ب ع کا نقطہ تقاطع ہونا چاہئیے۔

د ع کو ملاؤ۔ مثلثات د ج ع، ب ج ا مشابہ ہیں جن میں سے مثلث د ج ع، مثلث ب ج ا کے ابعاد کا عین نصف ہے۔

اِس لیے د ع، ا ب کے متوازی اور اس کا نصف ہونا چاہیئے۔
اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ د ث ع اور ا ث ب مشابہ مثلث ہیں جن میں سے مثلث د ث ع، مثلث ا ث ب کے ابعاد کا نصف ہے۔ اِس لیے ث د، ا ث کا نصف ہے۔



شکل (۶۷)

اِس طرح ث، ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔
اگر ہم ج کو ف سے ملائیں جو ا ب کا وسطی نقطہ ہے تو ہم اُسی طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں کہ ج ف، ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔ اِس لیے ج ف کو بھی نقطہ ث میں سے گذرنا چاہیئے۔
اِن تین خطوں ا د، ب ع، ج ف کو جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطوں سے ملاتے ہیں مثلث کے خطوط وسطی کہا جاتا ہے۔ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ یہ تین خطوط وسطی ایک ہی نقطہ ث میں ملتے ہیں اور یہ نقطہ مثلث کا مرکز ثقل ہے۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا ہے کہ مرکز ثقل ہر خط وسطی کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے یعنے وہ خطِ وسطی پہ قاعدے سے اپنے کل طول کے ایک ثلث فاصلے پر واقع ہے۔

۹۳ ـ کسی کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل ـ کسی مستقیم الاضلاع

کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل اِس کو مثلثوں میں تقسیم کرکے اور ہر مثلث کی بجائے اِس کے مرکز ثقل پہ ایک ذرہ رکھ کر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

۱ ـ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل تین مساوی ذروں کے مرکز ثقل پہ منطبق

ہوتا ہے جو اس کے راسوں پر رکھے گئے ہوں ۔

۲ ۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کا مرکز ثقل مرکز عمودی پر منطبق ہو تو مثلث متساوی الاضلاع ہے ۔

۳ ۔ مقوے کے ایک مربع کو ایک وتر پر اتنا موڑا گیا ہے کہ اس کے دو حصے علی القوائم ہیں ۔ اس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو ۔

۴ ۔ ایک مثلثی پترے کا ربع حصہ ایک خط سے جو قاعدے کے متوازی ہے کاٹ لیا گیا ہے ۔ بقیہ حصہ کا مرکز ثقل کہاں ہے ؟

۵ ۔ ایک پترے سے جس کی شکل متساوی الاضلاع مثلث کی ہے ایک (۱۲۳)
قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث کاٹ لیا گیا ہے جس کا قاعدہ وہی ہے جو ابتدائی مثلث کا ہے ۔ شکل ۷ کے بقیہ حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو ۔

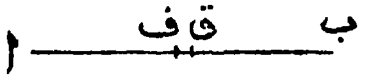
۶ ۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کا مرکز ثقل اس کے ایک وتر پر واقع ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ وتر دوسرے وتر کی تنصیف کرتا ہے ۔

مرکز ثقل کو عمل تکمل سے معلوم کرنا

۹۴ ۔ متغیر کثافت کے ایک ڈنڈے کا مرکز ثقل ۔

فرض کرو کہ ا ب ایک ڈنڈا ہے جس کا وزن فی اکائی طول نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتا ہے ۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ پر اس کا وزن فی اکائی طول ثہ ہے ۔

فرض کرو کہ ف ، ق دو متصلہ نقطے ہیں جن کے فاصلے نقطہ ا سے علی الترتیب لا اور لا + فرلا ہیں ۔ اب طول ف ق ، فرلا ہے اور اس کی کمیت ثہ فرلا ہے



شکل (۶۸)

جہاں ثہ سے اس نقطہ پر کی کمیت فی اکائی طول تعبیر ہوتی ہے ۔ جب فرلا کو لاانتہا چھوٹا بنایا جاتا ہے تو نقطہ ا سے ف ق کے مرکز ثقل کا فاصلہ لا لیا جا سکتا ہے ۔ پس

اگر لاَ سے وہ فاصلہ تعبیر ہو جو ا سے پورے ڈنڈے کے مرکز ثقل کا ہے تو

$$\text{لاَ} = \frac{\Sigma\,(\text{ک لا})}{\Sigma\,\text{ک}}$$

جہاں ک کسی عنصر کی مثلاً ف ق کی کمیت ہے اور حاصل جمع ان تمام ذروں کے لیے معلوم کیا گیا ہے جن سے ڈنڈا بنا ہے۔ ثہ فرلا رکھنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{لاَ} = \frac{\Sigma\,(\text{ثہ لا فرلا})}{\Sigma\,(\text{ثہ فرلا})}$$

یا تکملی احصاء کی ترقیم میں

$$\text{لاَ} = \frac{\int \text{ثہ لا فرلا}}{\int \text{ثہ فرلا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۸)$$

جہاں تکمل ہر صورت میں پورے ڈنڈے پر لیا جاتا ہے۔ متغیر ثہ، لا کا ایک تفاعل ہوگا اور تکمل کی تکمیل نہیں ہو سکتی جب تک کہ اس تفاعل کی ٹھیک شکل معلوم نہ ہو۔

۹۵ — ایک خاص مثال لو اور فرض کرو کہ کثافت ایک سرے سے دوسرے سرے تک ایکساں طور پر بڑھتی ہے۔ فرض کرو کہ ا پر کثافت صفر ہے اور ب پر ث۔ اگر ڈنڈے کا طول ل ہو تو ا سے فاصلہ لا پر کثافت $\text{ث}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)$ ہوگی۔ اس لیے ہمیں ضابطہ (۲۸) میں لکھنا چاہئے (۱۲۴)

$$\text{ثہ} = \text{ث}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)$$

اور اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{\int ش\left(\frac{لا}{ا}\right) لا\, فرلا}{\int ش\left(\frac{لا}{ا}\right) فرلا}$$

یہاں تکمل لا = ۰ سے لا = ا تک ہے۔ نسب نما اور شمار کنندہ کو $\frac{ش}{ا}$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{\int_{۰}^{ا} لا^{۲}\, فرلا}{\int_{۰}^{ا} لا\, فرلا} = \frac{\frac{۱}{۳} ا^{۳}}{\frac{۱}{۲} ا^{۲}} = \frac{۲}{۳} ا$$

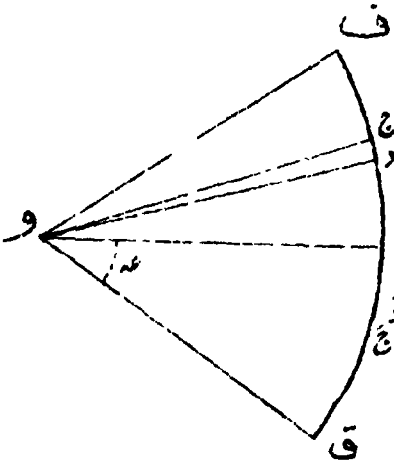
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز ثقل ڈنڈے پر ابتدائی سرے سے اسکے طول کے دو ثلث فاصلے پر واقع ہے۔

۹۶ — ہم اس نتیجے کو مثلث کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔ حسب دفعہ ۹۲ ہم مثلث کو متوازی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر پٹی کی بجائے اس کے وسطی نقطہ پر ایک ذرہ رکھتے ہیں ہر ذرہ کا وزن اس پٹی کے وزن کے مساوی ہونا چاہیئے جس کی جگہ پر اس کو رکھا گیا ہے اور وہ پٹی کے عرض اور طول کے متناسب ہونا چاہیئے۔ اگر کسی ذرہ کا فاصلہ ا سے خط وسطی اد پر پیمائش کردہ لا ہو تو پٹی کا عرض فرلا کے متناسب ہے جو وہ طول ہے جو خط وسطی پر منقطع ہوتا ہے، اور پٹی کا طول لا کے متناسب ہے جو ضلع ا سے فاصلہ ہے۔ اس طرح ش فرلا وصرف لا فرلا کے متناسب ہونا چاہیئے اور جیسا کہ ہم ابھی معلوم کر چکے ہیں (۱۲۵) اس سے حسب ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{۲}{۳} ا$$

جہاں اِ خط وسطی کا طول ہے ۔ یہ ٹھیک وہی نتیجہ ہے جو پہلے حاصل ہوا تھا ۔

۹۷ ۔ دائری قوس کا مرکز ثقل ۔ اِسی طریقہ کو ایک تار کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں جو ایک دائری قوس ف ق کی شکل میں خمایا گیا ہے استعمال کیا جا سکتا ہے ۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور قوس کا وسطی نقطہ ا ہے اور فرض کرو کہ پورا قوس سے محاذی مرکز پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے ۔ تار کے نصف حصے ف ا کے ایک چھوٹے عنصر ج د پر غور کرو ۔ فرض کرو کہ زاویہ د و ا طہ ہے اور زاویہ ج و ا طہ + فرطہ ہے اور اسلئے اِس عنصر کے محاذی مرکز پر زاویہ فرطہ بنتا ہے ۔ اگر دائرہ کا نصف قطر اِ ہو تو اِس عنصر کا طول اِ فرطہ ہے، اِس لئے اگر تار کی کمیت فی اکائی طول و ہو تو اِس عنصر کی کمیت و اِ فرطہ ہوگی ۔ یہ اور اِس کے مشابہ عنصر جَ دَ جو تار



شکل (۶۹)

کے دوسرے نصف حصے میں ہے مِلکر مساوی ذروں کا ایک زوج بناتے ہیں جن کا فاصلہ مرکزی خط و ا سے مساوی ہے ۔ اِن کی بجائے کمیت ۲ و اِ فرطہ کا ایک واحد ذرہ اِن کے مرکز ثقل پر رکھا جا سکتا ہے ۔ یہ مرکز ثقل خط و ا میں اُس نقطہ پر ہے جس پر اِن دو عنصروں کو ملانیوالا خط و ا کو قطع کرتا ہے ۔ اِس لیے اِس مرکز ثقل کا فاصلہ و سے اِ جم طہ ہے ۔ اِس کو لا سے اور کمیت ۲ و اِ فرطہ کو ک سے تعبیر کرنے سے پورے تار کے مرکز ثقل کا فاصلہ (و سے) لا حسب ذیل مساوات سے

ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\,(\text{ک لا})}{\Sigma\,(\text{ک})}$$

$$= \frac{\int \text{ا جم طہ} (\text{۲ و ا ذ طہ})}{\int \text{۲ و ا ذ طہ}}$$

جہاں تکمل طہ = ۰ سے طہ = عہ تک ہے۔ مختصر کرنے سے (۱۲۶)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{ا} \int_{\text{طہ}=0}^{\text{طہ}=\text{عہ}} \text{جم طہ ذ طہ}}{\int_{\text{طہ}=0}^{\text{طہ}=\text{عہ}} \text{ذ طہ}}$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ}}{\text{عہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۹)$$

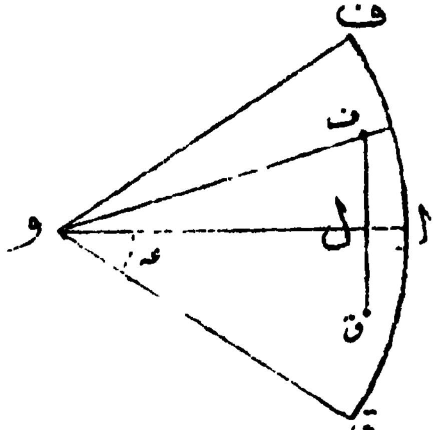
اس سے مرکز ثقل کا محل معلوم ہوتا ہے۔

جب عہ بہت چھوٹا ہو تو جب عہ اور عہ مساوی ہوتے ہیں اور اس لیے عہ کی بہت چھوٹی قیمتوں کے لیے ضابطہ (۲۹) $\bar{\text{لا}} = \text{ا}$ میں تحویل ہوتا ہے جیسا کہ ہونا چاہئے۔ اس سے صرف یہ واضح ہوتا ہے کہ قوس کا انحنا جیسے جیسے گھٹتا ہے مرکز ثقل قوس کے وسطی نقطے کے قریب اور قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ بالآخر جب عہ = ۰ تو قوس ایک سیدھا ڈنڈا بن جاتی ہے اور مرکز ثقل ٹھیک اس کے وسطی نقطہ پر حاصل ہوتا ہے۔ اس قوس کے لیے جو ایک نیم دائرے میں خیال کی گئی ہو ہم $\text{عہ} = \frac{\pi}{2}$ لیتے ہیں چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{ا جب}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{۲ ا}}{\pi} = \text{۰٫۶۳۶۶ ا}$$

۹۸ — دائری قوس ف ق کا مرکز ثقل تکملی احصاء کے استعمال کے بغیر ایک دلچسپ طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ قوس اف کا مرکز ثقل اُس نصف قطر میں واقع ہونا چاہیے جو زاویہ اوف کی تنصیف کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ یہ مرکز ثقل ف ہے اور فرض کرو کہ قوس اق کا مرکز ثقل ق ہے ۔ اب پوری قوس ف ق کا مرکز ثقل ف ق کا نقطہ وسطیٰ ل ہونا چاہیئے ۔



شکل (۷۰)

اب چونکہ زاویہ ف و ل = ۱/۲ عہ
اس لیے

و ل = و ف جم ۱/۲ عہ

(۱۲۷) اس رشتہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)
= جم عہ/۲ × (قوس عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اسی طرح

(قوس عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)
= جم عہ/۴ × (قوس عہ/۲ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اور علیٰ ہذا القیاس ۔ اس طریقہ پر عمل جاری رکھ کر اور اندراج کر کے ہم حاصل کرتے ہیں

(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

= جم عہ/۲ × جم عہ/۴ × جم عہ/۸ ...... جم عہ/۲^(ن+۱)
× (قوس عہ/۲^ن کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اگر ہم ن کو بہت بڑا لیں تو عہ/۲^ن کی قیمت صفر ہوتی ہے ۔ اس لئے قوس عہ/۲^ن کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے ا کے مساوی ہوجاتا ہے جو دائرہ کا

نصف قطر ہے۔ پس ن کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتا ہے
(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

$$= \text{ا جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۴}\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۸}\ \ldots\ldots\ \infty\ \text{تک}$$

اب

$$\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲} = \frac{\text{جب عہ}}{۲\ \text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}}$$

$$\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۴} = \frac{۲\ \text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}}{۴\ \text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۴}}\text{، وغیرہ}$$

اس لیے

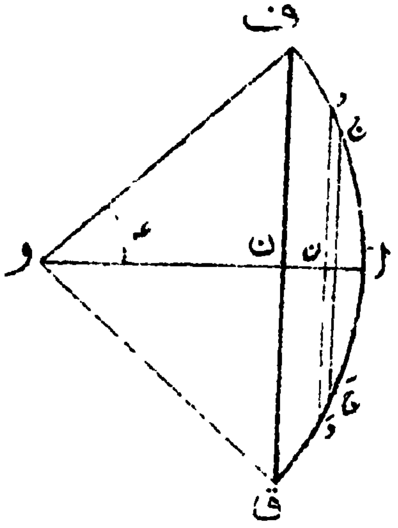
$$\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۴}\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۸}\ \ldots\ \text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}} = \frac{\text{جب عہ}}{۲^{\text{ن}}\ \text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}}$$

ن کو لامتناہی بنانے سے جب $\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}$ کی قیمت $\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}$ کے مماثل ہو جاتی ہے،
اِس لیے $۲^{\text{ن}}$ جب $\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}$، عہ کے مماثل ہو جاتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۴}\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۸}\ \ldots\ldots\ \infty\ \text{تک} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$$

اِس لئے قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے ا $\frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$ ہے جو مفصلاً نتیجہ کے مطابق ہے۔

۹۹ — قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل ۔ فرض کرو کہ ہم ایک دائرہ کے (۱۲۹)
قطعہ ف ا ق ن کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو وتر ف ن ق سے جس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے کٹتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پورے قطعہ کو اِس وتر کے متوازی پتلی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور فرض کرو کہ شکل ۷۱ میں نمونے کی ایک پٹی ج جَ د دَ ہے جو وتروں ج جَ اور د دَ سے محدود ہے فرض کرو کہ زاویہ ج و ا، ط ہے اور زاویہ د و ا، ط + فرط ہے۔ اب پٹی کا



شکل (۷۱)

عرض ج د جب طہ یا ا جب طہ فرطہ ہے اور اس کا طول ۲ ج ن یا ۲ ا جب عہ ہے ۔ اس لئے رقبہ ۲ ا۲ جب۲ طہ فرطہ ہے ۔ اس کی کمیت پوری کی پوری ن پر مرتکز سمجھی جا سکتی ہے جہاں ن کا فاصلہ مرکز و سے ا جم طہ ہے۔ اس طرح اگر پورے قطعہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ و سے لاَ ہو تو

لاَ = ∫ (ا جم طہ) (۲ ا۲ جب۲ طہ فرطہ) / ∫ (۲ ا۲ جب۲ طہ فرطہ)

جہاں تکمل کو طہ = ۰ سے طہ = عہ تک لینا چاہئے ۔ مختصر کرنے سے

لاَ = ا ∫۰^عہ جب۲ طہ جم طہ فرطہ / ∫۰^عہ جب۲ طہ فرطہ

= ا (۱/۳ جب۳ عہ) / (۱/۲ (عہ − جب عہ جم عہ))

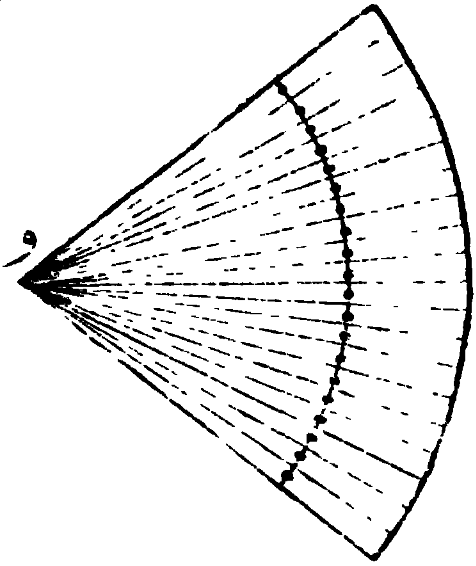
= ۲/۳ ا جب۳ عہ / (عہ − جب عہ جم عہ)

عہ = π/۲ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک نیم دائرہ کا مرکز ثقل مرکز سے (۲۹)
فاصلہ ۴/۳π ا پر ہوتا ہے ۔

۱۰۰ ـــ قطاع دائرہ کا مرکز ثقل ۔

قطاع دائرہ کے مرکز ثقل کو اس طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ قطاع دائرہ کو ایک مثلث اور ایک قطعہ دائرہ سے بنا ہوا سمجھا جائے۔

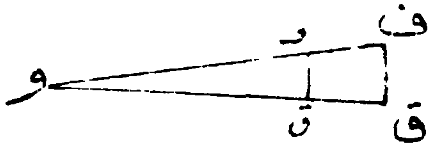
اب چونکہ مثلث کا مرکز ثقل اور قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل معلوم کئے جا سکتے ہیں اس لئے پوری شکل کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے۔



شکل (۷۲)

اِس سے سادہ طریقہ حسب ذیل ہے۔ ہم قطاع دائرہ کو نصف قطروں کے ایک سلسلہ کے ذریعہ بہت تنگ مثلثوں کی ایک بڑی تعداد میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ ہر مثلث کے وزن کی بجائے اس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھا جا سکتا ہے جس کا وزن مثلث کے وزن کے مساوی ہو۔ اب انتہا میں جبکہ مثلث صغیر عرض کے ہو جاتے ہیں ہر ایک کا مرکز ثقل اس کے خط وسطی پر دائرہ کے مرکز سے $\frac{2}{3}$ ا فاصلہ پر ہوگا جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے تمام ذرے $\frac{2}{3}$ ا نصف قطر کے ایک دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

کسی ذرہ کا وزن اُس مثلث و ف ق کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے جس کی بجائے اُس کو رکھا گیا ہے۔ اس لیے اس کو مثلث کے قاعدہ ف ق کے متناسب ہونا چاہئے اور پھر یہ ف ق کے متناسب ہے جو نصف قطر $\frac{2}{3}$ ا کے دائرہ کا ایک ٹکڑا ہے جو مثلث کے اندر ہے۔ اس طرح اُس ذرہ کا وزن جس کو اس دائرہ کے چھوٹے عنصر ق میں رکھتا ہے طول ف ق کے متناسب ہے۔ انتہا لینے اور مثلثوں کی تعداد کو لا متناہی بنانے سے



شکل (۷۳)

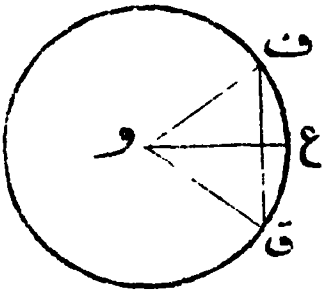
ہم معلوم کرتے ہیں کہ ذروں کی اس لڑی کی بجائے ایکساں کثافت کا ایک تار
(۱۳۰) رکھا جا سکتا ہے ۔ ایسے تار کا مرکز ثقل پہلے معلوم کیا جا چکا ہے ۔ اگر
تار کا زاویہ ۲ عہ ہو تو مرکز ثقل اس نصف قطر پر جو تار کے وسطی نقطہ میں سے
گذرتا ہے مرکز سے فاصلہ ۲/۳ ا (جب عہ)/عہ پر واقع ہے ۔

اس طرح نصف قطر ا، اور زاویہ ۲ عہ کے ابتدائی قطاع دائرہ کا مرکز ثقل
قطاع دائرہ کے مرکزی محور پر مرکز سے فاصلہ ۲/۳ ا (جب عہ)/عہ پر واقع ہے ۔

۱۰۱ ۔ کروی ٹوپی کا مرکز ثقل ۔ وہ ٹکڑا جس کو ایک کروی خول
سے ایک مستوی کے ذریعہ کاٹ لیا جائے کروی ٹوپی کہلاتا ہے ۔

کروی ٹوپی کا مرکز ثقل جس کو ایک ایکساں کروی خول سے کاٹ لیا گیا ہو
ان طریقوں سے جو قبل ازیں سمجھائے جا چکے ہیں بہت آسانی سے معلوم
کیا جا سکتا ہے ۔

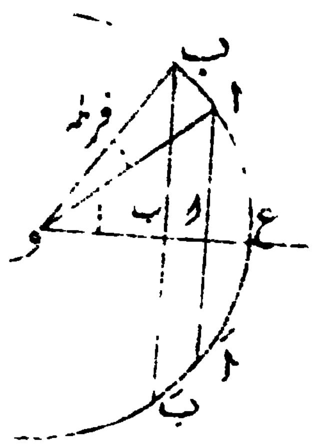
فرض کرو کہ ف ق کروی ٹوپی ہے اور و اس کرہ کا مرکز ہے جس سے یہ ٹوپی کاٹی گئی ہے ۔ فرض کرو کہ و ع وہ نصف قطر ہے جو مستوی ف ق پر جس سے ٹوپی محدود ہے عمود ہے اور فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ا ہے ۔



شکل (۴۷)

کوئی مستوی جو ف ق کے متوازی ہے کرہ کو ایک دائرہ میں جس کا
مرکز و ع پر واقع ہو گا قطع کریگا ۔ اس لیے ف ق کے متوازی مستویوں
کی ایک بڑی تعداد لینے سے ہم کروی ٹوپی کو تنگ دائری حلقوں میں تقسیم
کر سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا مرکز و ع پر واقع ہے ۔ فرض کرو کہ ہم

ایک واحد حلقہ پر جو سُتویوں ا د اَ ب ب بَ سے منقطع ہوا ہے غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ زاویے ا و ع، ب و ع علی الترتیب طہ اور طہ + فرطہ کے مساوی ہیں اس لیے حلقہ کے محاذی مرکز پر زاویہ فرطہ بنتا ہے۔ حلقہ کا عرض اب، ا فرطہ ہے۔ اس کے محیط کو انتہا میں دائرہ ا د اَ کے محیط کے مساوی فرض کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ اَ د = ا جب طہ اس لیے یہ محیط = ۲ π ا جب طہ



شکل (۷۵)

اس لیے زیر بحث حلقہ کو طول ۲ π ا جب طہ اور عرض ا فرطہ کی ایک (۱۳۱)
تنگ پٹی سمجھا جا سکتا ہے۔ اس لیے اس کا رقبہ ۲ π اَ جب طہ فرطہ ہے۔

جب، فرطہ کو بہت چھوٹا بنایا جاتا ہے تو قوس ب ا کو طول ا فرطہ کا ایک خط مستقیم خیال کیا جا سکتا ہے جو و ع کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ - طہ بناتا ہے۔ اس طرح او ع پر ب ا کے ظل ب ا کا طول ا فرطہ جم($\frac{\pi}{2}$ - طہ) یا ا جب طہ فرطہ ہے۔ حلقہ ب ا کا رقبہ اب حسب ذیل حاصل ہوتا ہے

۲ π اَ جب طہ فرطہ

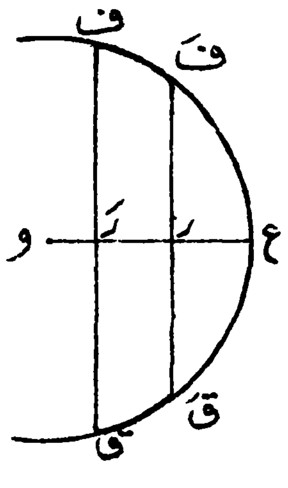
یا ۲ π ا × ب ا

اس لیے حلقہ کی کمیت وہی ہے جو ڈنڈے و ع کے عنصر ب ا کی ہے بشرطیکہ یہ ڈنڈا ایکساں کثافت کا ہو اور اس کی کمیت فی اکائی طول خول کے رقبہ ۲ π ا کی کمیت کے مساوی ہو۔ اس حلقہ کا مرکز ثقل جس پر ہم غور کر رہے ہیں صریحاً محور و ع پر واقع ہے، اس لئے کروی ٹوپی کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں اس حلقہ کی بجائے اس ڈنڈے کے عنصر ب ا کو رکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح ہر چھوٹے حلقہ کی بجائے ڈنڈے کا متناظر عنصر رکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح پوری ٹوپی کی بجائے ڈنڈے کے طول رع کو رکھا جا سکتا ہے (شکل ۷۴) جو حدی مستوی ف ق اور کرہ کے درمیان قطع ہوتا ہے۔ چونکہ ڈنڈا یکساں ہے ڈنڈے کے حصہ رع کا مرکز ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہے۔ اس لیے یہ نقطہ کروی ٹوپی کا مرکز ثقل ہے۔

۱۰۲ ۔ ایک پیٹی کا مرکز ثقل جو ایک کروی خول سے دو متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹی گئی ہو

اسی طریقہ سے ہم اس پیٹی کا مرکز ثقل معلوم کر سکتے ہیں جو ایک یکساں کروی خول سے دو متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹ لی گئی ہو۔ شکل ۷۶ میں فرض کرو کہ ف ق، فَ قَ دو مستوی ہیں۔ اب ہم ف ق کے متوازی مستویوں سے پیٹی کو تنگ حلقوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ ہر حلقہ کی بجائے حسب سابق ایک ایکساں ڈنڈے کے متناظر عنصر کو محور وع پر رکھا جا سکتا ہے اور اس لیے پوری پیٹی کی بجائے اس ڈنڈے کے حصہ ررَ کو رکھا جا سکتا ہے جو وہ حصہ ہے جو دو مستویوں ف ق اور فَ قَ کے درمیان منقطع ہوتا ہے۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل، ررَ کا وسطی نقطہ ہے۔



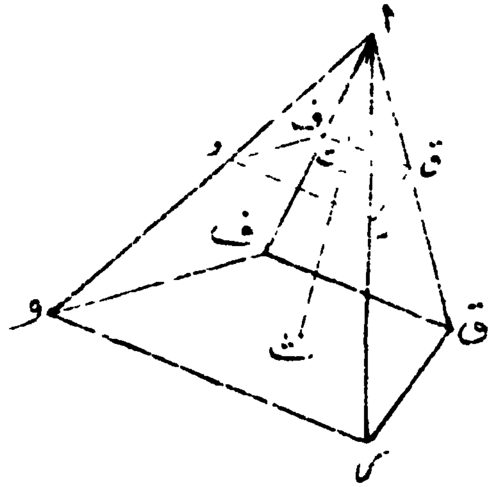
شکل (۷۶)

ایک ٹھوس جسم کا مرکز ثقل (۱۳۲)

۱۰۳ ۔ مستوی قاعدے کے ایک مخروط مضلع کا مرکز ثقل۔

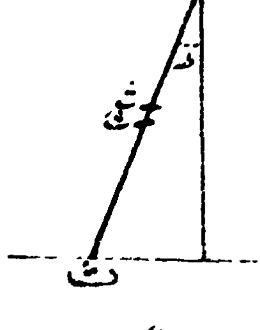
فرض کرو کہ ایک مخروط مضلع کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کا قاعدہ و ف ق ر کوئی مستوی شکل ہے اور اس کا راس ا ہے۔ ہم کسی متجانس مخروط مضلع کے مرکز ثقل کو معلوم کرنے کے لیے اس کو اسکے قاعدے کے متوازی مستویوں کے ایک سلسلے کے ذریعہ پتلے طبقوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایسا کوئی متوازی طبقہ و' ف' ق' ر' ہے، اس طبقہ کے متعلق یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ لا انتہا پتلا پترا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ایکساں پترے کا مرکز ثقل جو قاعدہ و ف ق ر پر منطبق ہوتا ہے ث ہے اور فرض کرو کہ ا ث، پترے و' ف' ق' ر' سے ث' پر ملتا ہے۔



شکل (۷۷)

اب متشابہ اشکال کے علم ہندسہ سے یہ ظاہر ہے کہ پترے و' ف' ق' ر' میں ث' ایک ایسا محل اختیار کرتا ہے جو ٹھیک طور پر اس محل کے متناظر ہے جو پترے و ف ق ر میں نقطہ ث کا ہے۔ اس لیے پترے و' ف' ق' ر' کا مرکز ثقل ث' ہے اور اس لیے اس پترے کی کمیت کی بجائے ث' پر ایک واحد ذرہ کی کمیت رکھی جا سکتی ہے۔



شکل (۷۸)

اسی طرح سے مخروط مضلع کو جتنے پتروں میں تقسیم کیا گیا ہے ان میں سے ہر ایک کی بجائے ایک واحد ذرہ اُس نقطہ پر رکھا جا سکتا ہے جس پر یہ پترا خط ا ث کو قطع کرتا ہے۔ اس طرح پورے

مخروط مضلع کی بجائے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ذروں کا ایک سلسلہ خط ا ث پر رکھا گیا ہے ۔ یہ ذرے متغیر کثافت کا ایک ڈنڈا بناتے ہیں اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اس ڈنڈے کے مرکز ثقل پر منطبق ہو گا ۔

اب ڈنڈے کا مرکز ثقل اُس طریقہ سے جس کی صراحت دفعہ ۹۴ میں کی جا چکی ہے معلوم کیا جا سکتا ہے ۔ اس پترے پر غور کرو جو متصلہ متوازی
پتروں کے درمیان واقع ہے جبکہ یہ پترے خط ا ث کو علی الترتیب ث ثَ (۱۳۳)
پر قطع کرتے ہیں ۔ فرض کرو کہ ا ث = لا، اور ا ثَ = لا + فرلا، چنانچہ یہ پترا خط ا ث پر طول فرلا قطع کرتا ہے ۔

فرض کرو کہ ا ث اور اس عمود کے درمیان جو ا سے پترے کے قاعدے پر کھینچا گیا ہے زاویہ طہ بنتا ہے ۔ اس لیے پترے کی موٹائی

$$= \text{ث ثَ جم طہ} = \text{فرلا جم طہ}$$

اگر مخروط مضلع کے قاعدہ کا رقبہ س ہو تو زیر بحث پترے کا رقبہ

$$= \frac{\text{لا}^2}{\text{ا ث}^2}\,\text{س}$$

کیونکہ مختلف پتروں کے رقبے اُن کے خطی العاد کے مربعوں کے متناسب ہیں ۔ اس لیے زیر غور پترے کا حجم

$$= \frac{\text{لا}^2}{\text{ا ث}^2}\,\text{س فرلا جم طہ}$$

اگر اس پترے کی بجائے ایک ذرہ رکھا جائے جو ڈنڈے ا ث کے طول فرلا پر ہو تو ڈنڈے کی کثافت ثہ ہونی چاہیے

$$\text{ثہ} = \text{لا}^2\,\frac{\text{س جم طہ}}{\text{ا ث}^2}$$

اس طرح ڈنڈا ا ث ایسی کثافت کا ہونا چاہیے جو سرے (ا) سے فاصلہ (لا) کے مربع کے متناسب ہے ۔

اب دفعہ ۹۴ کے ضابطہ کی رو سے اس ڈنڈے کے مرکز ثقل کا

فاصلہ (لآ) نقطہ ا سے حسب ذیل ہے:

$$\text{لآ} = \frac{\int_{0}^{\text{ث}} \text{ش لا فرلا}}{\int_{0}^{\text{ث}} \text{ش فرلا}}$$

$$= \frac{\int_{0}^{\text{ث}} \text{لا}^{3}\,\text{فرلا}}{\int_{0}^{\text{ث}} \text{لا}^{2}\,\text{فرلا}}$$

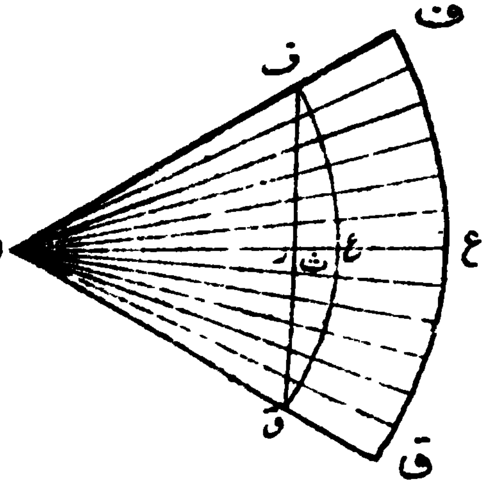
$$= \frac{\frac{1}{4}\,\text{اث}^{4}}{\frac{1}{3}\,\text{اث}^{3}}$$

$$= \frac{3}{4}\,\text{اث}$$

اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اث میں نقطہ ا سے اث کے (۱۳۴)
طول کے تین چوتھائی فاصلہ پر ہے۔

۱۰۴ — ایک کرہ کے قطاع کا مرکز ثقل

اب ہم ایک کرہ کے قطاع کا مرکز ثقل معلوم کر سکتے ہیں یعنے اُس حجم کا جو ایک ٹھوس کرہ میں سے قائم مستدیر مخروط سے جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہو قطع کر لیا گیا ہو۔ اس مقصد کے لیے ہم قطاع کے قاعدہ ف ق کے رقبہ کو بہت چھوٹے چھوٹے عنصروں میں تقسیم کرتے ہیں اور اس طرح رقبہ کے ان عنصروں کو قاعدے مان کر اور ان کو مشترک راس و سے ملا کر قطاع کے حجم کو بہت چھوٹی عمودی تراش کے متعدد مخروط مضلع میں تقسیم کرتے ہیں۔ یہ سب مخروط مضلع ایک ہی ارتفاع کے ہیں اور اس لیے اُن کی کمیتیں ان کے قاعدوں کے متناسب ہیں۔ ہر مخروط مضلع کا مرکز ثقل، و سے اُس فاصلہ کے تین چوتھائی پر واقع ہے جو و اور اس مخروط مضلع کے قاعدہ کے درمیان ہے اور اس لیے و سے ایک ایسے فاصلہ پر واقع ہے جو کرہ کے نصف قطر کے تین چوتھائی کے برابر ہے۔ پس اگر ہم ایک اور



شکل (۷۹)

کرہ بنائیں جس کا مرکز و ہو اور جس کا قطر ابتدائی کرہ کے نصف قطر کا تین چوتھائی ہو تو ہر چھوٹے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اس نئے کرہ کی سطح پر واقع ہوگا۔ اب ہر مخروط مضلع کی بجائے اس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھا جا سکتا ہے اور اس لیے کل کروی قطاع کی بجائے ذروں کا ایک سلسلہ رکھا جا سکتا ہے جو اس نئے کرہ پر واقع ہوں گے اور ان سے کروی ٹوپی ف ع ق بنے گی (دیکھو دفعہ ۹،

ہر مخروط مضلع کی کمیت قاعدے کے متناسب ہے اور نیز کروی خول ف ع ق کے اس حصہ کے متناسب ہے جو مخروط مضلع سے منقطع ہوتا ہے۔ اس لیے کروی خول ف ع ق جسکو اصلی حجم کی بجائے لینا ہے یکساں کثافت کا ہونا چاہیئے۔

اب کرہ کے قطاع و ف ق کی بجائے یکساں کروی خول ف ق (۱۳۵)
ہے اور اس کروی خول کا مرکز ثقل ث معلوم ہے جو شکل (۷۹) میں
رع کا وسطی نقطہ ہے۔ اس لئے یہ نقطہ ث مطلوبہ مرکز ثقل ہے۔

اگر مخروط کا انتصابی زاویہ جس سے قطاع محدود ہے ۲ ع ہو
اور کرہ کا نصف قطر ا ہو تو

وع = ۳/۲ ا ، ور = ۳/۴ ا جم ع

اس لیے

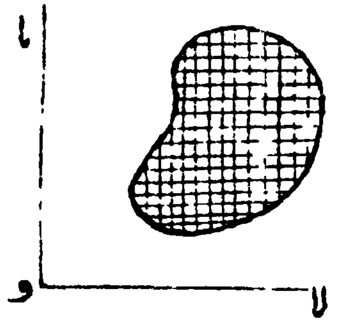
وث = ۳/۸ ا (۱ + جم ع)

مخصوص صورت میں اگر ع = $\frac{\pi}{2}$ تو قطاع نیم کرہ ہو
اور وث = ۳/۸ ا

اس طرح نیم کرہ کا مرکز ثقل اُس نصف قطر پر جو اس کے قاعدہ پر عمود ہے مرکز سے نصف قطر کے ۳/۸ فاصلہ پر واقع ہوتا ہے۔

اُن رقبوں اور حجموں کے مرکز ثقل جو راست تکمل سے حاصل ہوں

۱۰۵ — پترے کا مرکز ثقل۔ کسی شکل کے پترے کا مرکز ثقل تکمل کے ذریعہ معلوم کرنے میں ہم پترے کے مستوی میں محوروں **ولا**، **وما** کو کوئی سہولت بخش حیثیت لیتے ہیں اور یہ خیال کرتے ہیں کہ پترا خطوں کے دو سلسلوں سے جن میں سے ایک محور **ولا** کے متوازی اور دوسرا محور **وما** کے متوازی ہے چھوٹے عناصر میں منقسم ہے۔



شکل (۸۰)

اُن چھوٹے مستطیلی عنصر پر غور کرو جس میں لا کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو **وما** کے متوازی ہیں لا اور لا + فرلا ہیں اور ما کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو **ولا** کے متوازی ہیں ما اور ما + فرما ہیں۔

اس عنصر کا رقبہ فرلا فرما ہے اور اس لئے اگر اس نقطہ پر پترے کے فی اکائی رقبہ کی کمیت ثہ ہو تو اس عنصر کی کمیت ثہ فرلا فرما ہوگی۔ مزید بریں جب فرلا، فرما کو لا انتہا چھوٹا بنایا جاتا ہے تو انتہا میں اس کمیت کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔ اسلیے پترے کی کل کمیت کو متعدد ذروں کی کمیتیں سمجھا جا سکتا ہے۔

دفعہ ۸۶ میں ہم نے ذروں کے مرکز ثقل کے لیے حسب ذیل ضابطے حاصل کئے تھے: (۱۳۶)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\ \text{ک لا}}{\Sigma\ \text{ک}}\ ،\quad \bar{\text{ما}} = \frac{\Sigma\ \text{ک ما}}{\Sigma\ \text{ک}}$$

موجودہ صورت میں یہ ضابطے ہو جاتے ہیں

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\iint \text{ثہ لا فرلا فرما}}{\iint \text{ثہ فرلا فرما}} \text{ ، } \bar{\text{ما}} = \frac{\iint \text{ثہ ما فرلا فرما}}{\iint \text{ثہ فرلا فرما}} \quad \ldots\ldots(۳۰)$$

علامت جمع Σ کی بجائے تکمل کی علامتیں ہیں اور تکمل کو پتر ے کے پورے رقبہ پر لینا ہوگا۔

اگر پترا یکساں ہے تو ثہ کی قیمت مستقل ہے اور اس لیے

$$\iint \text{ثہ لا فرلا فرما} = \text{ثہ} \iint \text{لا فرلا فرما}$$

اور علیٰ ہذا القیاس ۔ اس لئے مندرجہ بالا ضابطوں کو ثہ پر تقسیم کرنے سے یہ ضابطے حسب ذیل ضابطوں میں تحویل ہوتے ہیں :

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\iint \text{لا فرلا فرما}}{\iint \text{فرلا فرما}} \text{ ، } \bar{\text{ما}} = \frac{\iint \text{ما فرلا فرما}}{\iint \text{فرلا فرما}}$$

۱۰۶ ۔ ٹھوس جسم کا مرکز ثقل ۔ کسی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں ہم جسم کو مستویوں کے تین نظاموں کے ذریعہ جو محددوں کے تین مستویوں کے متوازی ہوں چھوٹے ٹھوس عناصر میں تقسیم کرتے ہیں تب کسی چھوٹے عنصر کا حجم فرلا فرما فری ہوگا۔ پس دفعہ ۸۶ کے ضابطوں سے جسم کے مرکز ثقل کے محدد حسب ذیل شکل میں حاصل ہوتے ہیں :

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\iiint \text{ثہ لا فرلا فرما فری}}{\iiint \text{ثہ فرلا فرما فری}} \text{ ، } \bar{\text{ما}} = \frac{\iiint \text{ثہ ما فرلا فرما فری}}{\iiint \text{ثہ فرلا فرما فری}} \text{ ، }$$

$$\bar{\text{ی}} = \frac{\iiint \text{ثہ ی فرلا فرما فری}}{\iiint \text{ثہ فرلا فرما فری}} \text{ ، } \quad \ldots\ldots\ldots(۳۱)$$

اگر جسم متجانس ہے تو ثہ مستقل ہے اور ضوابط ہو جاتے ہیں (۱۳۷)

لاَ = ی ی ی لا فرلا فرما فری / ی ی ی فرلا فرما فری ، ماَ = ی ی ی ما فرلا فرما فری / ی ی ی فرلا فرما فری ، وغیرہ

۱۰۰ — قطبی محددوں کا استعمال — تکمیل کے ذریعہ مرکز ثقل معلوم

کرنے میں محددوں کا کوئی اور نظام استعمال کیا جا سکتا ہے۔ کارٹیزی محددوں کے علاوہ جو محدد اس مقصد کے لیے زیادہ مفید ہیں وہ صرف قطبی محدد ہیں۔

کسی پتر ے کے مرکز ثقل کو قطبی محددوں میں یہ فرض کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ کارٹیزی محددوں لا، ما اور قطبی محددوں ر، طہ میں حسب ذیل ضوابط موجود ہیں:

لا = ر جم طہ ، ما = ر جب طہ

پس اِن اندراجات سے ضوابط (۳۰) ہو جاتے ہیں

رجم طہَ = ی ی ثہ (رجم طہ) (ر فر ر فر طہ) / ی ی ثہ (ر فر ر فر طہ)

= ی ی ثہ ر۲ جم طہ فر ر فر طہ / ی ی ثہ ر فر ر فر طہ ،

رجب طہَ = ی ی ثہ (رجب طہ) (ر فر ر فر طہ) / ی ی ثہ (ر فر ر فر طہ)

= ی ی ثہ ر۲ جب طہ فر ر فر طہ / ی ی ثہ ر فر ر فر طہ

جن میں $\overline{\text{ر}}$، $\overline{\text{طہ}}$، مرکز ثقل کے قطبی محدد ہیں۔ اِن مساواتوں کی متناظر طرفوں کو تقسیم کرنے سے مساوات

$$\text{مس } \overline{\text{طہ}} = \frac{\iint \text{ثہ ر}^{2}\text{جب طہ فرر فرطہ}}{\iint \text{ثہ ر}^{2}\text{جم طہ فرر فرطہ}}$$

حاصل کیجا سکتی ہے جس سے صرف محدد $\overline{\text{طہ}}$ معلوم ہو سکتا ہے۔

اسی طرح ہم کسی ٹھوس جسم کے مرکز ثقل کو قطبی محددوں میں یہ فرض کر کے معلوم کر سکتے ہیں کہ کارٹیزی محددوں لا، ما، ی اور قطبی محددوں ر، طہ، فہ میں حسب ذیل روابط موجود ہیں:

$$\text{لا} = \text{رجب طہ جم فہ}،\quad \text{ما} = \text{رجب طہ جب فہ}،\quad \text{ی} = \text{رجم طہ}$$

اِس استحالہ کو عمل میں لانے سے ضوابط (۳۱) میں سے پہلا ضابطہ ہو جاتا ہے

$$\overline{\text{ر}}\text{جب }\overline{\text{طہ}}\text{ جم }\overline{\text{فہ}} = \frac{\iiint \text{ثہ (رجب طہ جم فہ)(ر}^{2}\text{جب طہ فرر فرطہ فرفہ)}}{\iiint \text{ثہ (ر}^{2}\text{جب طہ فرر فرطہ فرفہ)}}$$

$$= \frac{\iiint \text{ثہ ر}^{3}\text{جب}^{2}\text{طہ جم فہ فرر فرطہ فرفہ}}{\iiint \text{ثہ ر}^{2}\text{جب طہ فرر فرطہ فرفہ}} \quad \ldots\ldots (۳۲)$$

اسی طرح باقی دو ضابطے ہو جاتے ہیں:

$$\overline{\text{ر}}\text{جب }\overline{\text{طہ}}\text{ جب }\overline{\text{فہ}} = \frac{\iiint \text{ثہ ر}^{3}\text{جب}^{2}\text{طہ جب فہ فرر فرطہ فرفہ}}{\iiint \text{ثہ ر}^{2}\text{جب طہ فرر فرطہ فرفہ}}، \quad \ldots\ldots (۳۳)$$

$$\overline{\text{ر}}\text{جم }\overline{\text{طہ}} = \frac{\iiint \text{ثہ ر}^{3}\text{جب طہ جم طہ فرر فرطہ فرفہ}}{\iiint \text{ثہ ر}^{2}\text{جب طہ فرر فرطہ فرفہ}} \quad \ldots\ldots (۳۴)$$

۱۰۵۸ ـــ ٹھیک اسی کے مشابہ طریقہ سے محددوں کے کسی اور نظام میں مرکز ثقل کے محل کے محددوں کے لیے ضابطے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

کسی جسم کا مرکز ثقل معلوم کرنے کے لیے وہ طریقے کافی ہیں جنکی تفہیم اوپر کی گئی ہے، نیز ان طریقوں کو ملا کر بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس امر کی توضیح کے لیے ہم ایک ہی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل تین مختلف طریقوں سے معلوم کرینگے ۔

توضیحی مثال (۱۳۹)

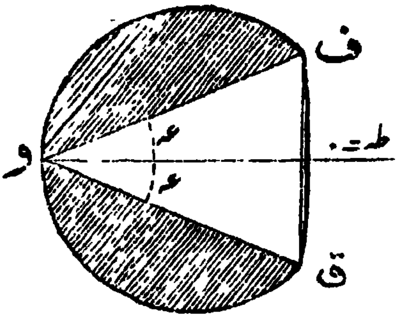
ایک قائم مستدیر مخروط و ف ق کو ایک ٹھوس متجانس کرہ سے کرید کر نکالا گیا ہے مخروط کا راس و، کرہ کی سطح پر اور راس کا محور کرہ کا ایک قطر تھا۔ مابقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

طریقہ (۱) ـ قطبی محدد ـــ فرض کرو کہ اول ہم قطبی محدد استعمال کرتے ہیں ۔ مخروط کے راس و کو مبداء قرار دو اور مخروط کے محور کو ابتدائی خط۔ اگر مخروط کا نیم انتصابی زاویہ عہ ہے تو مخروط کی مساوات طہ = عہ ہے۔ اگر کرہ کا نصف قطر ا ہے تو کرہ کی مساوات ر = ۲ ا جم طہ ہے۔ مرکز ثقل، تشاکل کی وجہ سے محور طہ = ۰ پر واقع ہونا چاہئے، اس لئے طَ = ۰ ۔ اور مساوات (۴۴) ہو جاتی ہے

$$\bar{ر} = \frac{\iiint \text{ثہ } ر^{۳} \text{ جب طہ جم طہ فرر فرطہ فرفہ}}{\iiint \text{ثہ } ر^{۲} \text{ جب طہ فرر فرطہ فرفہ}}$$

جسم کو متجانس فرض کیا گیا ہے، اس لئے ثہ مستقل ہے اور اس لئے اس کو شمار کنندے اور نسب نما دونوں میں تکمل کی علامت سے باہر رکھا جا سکتا ہے

فہ کے لئے تکمل کے حدود فہ = ۰
سے فہ = ۲ π تک ہیں اور اس لئے
ہر صورت میں اس تکمل کے عمل کی
تکمیل کی جا سکتی ہے ۔ تکمل کرکے
۲ π نہ پر تقسیم کرنے سے حاصل
ہوتا ہے



شکل (۸۱)

$$\text{ت} = \frac{\iint \text{ر}^{۳}\ \text{جب طہ جم طہ فر ر فر طہ}}{\iint \text{ر}^{۲}\ \text{جب طہ فر ر فر طہ}}$$

پھر ہم ر کے لحاظ سے تکمل کر سکتے ہیں جس کے لئے حدود ہیں ر = ۰ تا
ر = ۲ ا جم طہ چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \frac{\int \frac{۱}{۴}(\text{۲ ا جم طہ})^{۴}\ \text{جب طہ جم طہ فر طہ}}{\int \frac{۱}{۳}(\text{۲ ا جم طہ})^{۳}\ \text{جب طہ فر طہ}}$$

$$= \frac{۳}{۲}\text{ا}\ \frac{\int \text{جم}^{۵}\text{طہ جب طہ فر طہ}}{\int \text{جم}^{۳}\text{طہ جب طہ فر طہ}}$$

بالآخر طہ کے لئے تکمل کے حدود طہ = عہ تا طہ = $\frac{\pi}{۲}$ (کرہ کا مماس مستوی) ہیں ۔ پس چونکہ

$$\int_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۵}\text{طہ جب طہ فر طہ} = -\frac{۱}{۶}\left[\text{جم}^{۶}\text{طہ}\right]_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۶}\ \text{جم}^{۶}\text{عہ} ،$$

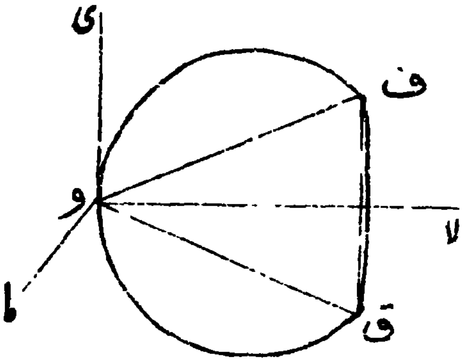
$$\int_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۳}\text{طہ جب طہ فر طہ} = -\frac{۱}{۴}\left[\text{جم}^{۴}\text{طہ}\right]_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۴}\ \text{جم}^{۴}\text{عہ}$$

(۱۴۰) اس لیے ان قیمتوں کو درج کرنے سے

$$\bar{\text{ر}} = \frac{۳}{۲}\,\text{ا}\,\frac{\frac{۱}{۶}\,\text{جم}^{۶}\,\text{عہ}}{\frac{۱}{۴}\,\text{جم}^{۴}\,\text{عہ}} = \text{ا جم}^{۲}\,\text{عہ}$$

اس طرح مرکز ثقل مخروط کے محور پر راس سے فاصلہ ا جم^{۲} عہ پر واقع ہے۔

طریقہ (۲) ۔ کارٹیزی محدد ۔ اب ہم کارٹیزی محددوں کو مرکز ثقل کا محل معلوم کرنے کے لیے استعمال کرینگے۔ و کو مبدا فرض کرو اور مخروط کے محور کو محور لا لو۔ اب مخروطہ کی مساوات ہے



شکل (۸۲)

$$\text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{لا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ}$$

اور کرہ کی مساوات ہے

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} - ۲\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$$

دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\iiint \text{لا}\,\text{فرلا}\,\text{فرما}\,\text{فری}}{\iiint \text{فرلا}\,\text{فرما}\,\text{فری}}$$

ہر تکملہ میں ہم اول ما اور ی کے لحاظ سے ایکساتھ تکمل کر سکتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں ہمیں ایک ہی تکملہ کی قیمت معلوم کرنی ہے یعنی $\iint$ فرما فری کی جہاں حدود حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:

$$\text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{لا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ}$$

اور

$$\text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = ۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^{۲}$$

یہ مسئلہ وہی ہے کہ ایک مستدیر انگوٹھی کا رقبہ معلوم کیا جائے جس کے اندرونی و بیرونی نصف قطر علی الترتیب لا مس عہ اور $\sqrt{۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^{۲}}$ ہیں۔ (یہ انگوٹھی بلاشبہ جسم کا وہ مقطوعہ ہے جو مستوی ما ی کے متوازی مستوی پر حاصل ہوتا ہے) ۔ اس انگوٹھی کا رقبہ ہے

π (۲ ا لا − لا۲) − π (لا۲ مس۲ عہ) = π (۲ ا لا − لا۲ قط۲ عہ)

اور مساوات کی بجائے یہ قیمت رکھنے سے ضابطہ ہو جاتا ہے

لا̄ = ∫ π لا (۲ ا لا − لا۲ قط۲ عہ) فرلا / ∫ π (۲ ا لا − لا۲ قط۲ عہ) فرلا

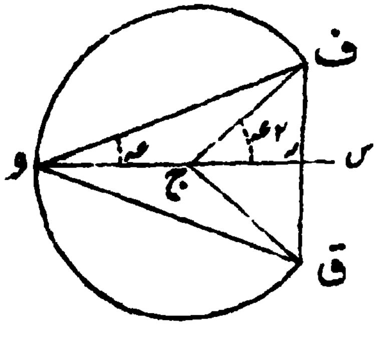
اب تکمل کے حدود ہیں مبداء لا = ۰ سے لا = ۲ ا جم۲ عہ تک جو مستوی ف ق پر لا کی قیمت ہے۔ تکملوں کی قیمتیں معلوم کرکے اِن حدود کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا̄ = [۲ ا π × ۱/۳ (۲ ا جم۲ عہ)۳ − π قط۲ عہ × ۱/۴ (۲ ا جم۲ عہ)۴] / [۳ ا π × ۱/۲ (۲ ا جم۲ عہ)۲ − π قط۲ عہ × ۱/۳ (۲ ا جم۲ عہ)۳]

= ا جم۲ عہ

جو وہی نتیجہ ہے جو طریقہ (۱) سے حاصل ہوا تھا۔

(۱۴۱) **طریقہ (۳) ہندسی طریقہ** ۔ مرکز ثقل کو اِس طرح بھی معلوم کیا جا سکتا ہے کہ دئے ہوئے حجم کو ایسے سادہ حجموں کے مجموعوں اور فرقوں میں تحویل کیا جائے جن کے مرکز ثقل معلوم ہوں۔



شکل (۸۳)

کل کرہ و ف س ق میں سے مخروط و ف ر ق اور کروی قطعہ ف ر ق س کو تفریق کرنے سے وہ حجم حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز ثقل معلوم کرنا ہے۔ اب کرہ کا مرکز ثقل اور مخروط کا مرکز ثقل معلوم ہے اور قطعہ ف ر ق س کا مرکز ثقل بہت آسانی سے اِس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ اس کو قطاع ج ف س ق اور مخروط

ج ف رق کا فرق سمجھا جائے ۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ابتدائی شکل

(کرہ و ف س ق) ۔ (مخروط و ف رق) ۔ (قطاع ج ف س ق)
+ (مخروط ج ف رق)

سے بنی ہے ۔

اِن کے حجم اور و ج پر ان کے مراکز ثقل کے فاصلے نقطہ و سے حسب ذیل ہیں :

شکل	حجم	مرکز ثقل کا فاصلہ و سے
+ کرہ	۴/۳ π ا³	ا
- مخروط و ف رق	- ۱/۳ (۲ ا جم² عہ)(π ا² جب² ۲ عہ)	۳/۴ (۲ ا جم² عہ)
- قطاع ج ف س ق	- ۲/۳ π ا³ (۱ - جم ۲ عہ)	ا + ۳/۸ ا (۱ + جم ۲ عہ)
+ مخروط ج ف رق	۱/۳ (ا جم ۲ عہ)(π ا² جب² ۲ عہ)	ا + ۳/۴ ا جم ۲ عہ

اِس جدول میں منفی علامت سے یہ مراد ہے کہ شکل کو جدا کرنا چاہئے یعنی اِس کے حجم کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہئے ۔

و سے کسی مرکز ثقل کے فاصلہ کو لا سے تعبیر کریں اور ضابطہ (دفعہ ۸۶)

لاَ = Σ ک لا / Σ ک

کو استعمال کریں تو پوری شکل کے مرکز ثقل کا فاصلہ و سے حسب ذیل حاصل ہوتا ہے :

لاَ = { ۴/۳ π ا⁴ - ۱/۴ (۲ ا جم² عہ)(π ا² جب² ۲ عہ) - ۲/۳ π ا³ (۱ - جم ۲ عہ) {۱ + ۳/۸ (۱ + جم ۲ عہ)}
+ ۱/۳ (ا جم ۲ عہ)(π ا² جب² ۲ عہ) ا (۱ + ۳/۴ جم ۲ عہ) }
÷ { ۴/۳ π ا³ - ۱/۳ (۲ ا جم² عہ)(π ا² جب² ۲ عہ) - ۲/۳ π ا³ (۱ - جم ۲ عہ)
+ ۱/۳ (ا جم ۲ عہ)(π ا² جب² ۲ عہ) }

＝ [۴/۳ π ا⁴ - ۱/۴ (۲ ا جم² عہ)(π ا² جب² ۲ عہ) - ۲/۳ π ا⁴ (۱ - جم ۲ عہ){۱ + ۳/۸ (۱ + جم ۲ عہ)} + ۱/۳ (ا جم ۲ عہ)(π ا² جب² ۲ عہ) ا (۱ + ۳/۴ جم ۲ عہ)] ÷ [۴/۳ π ا³ - ۱/۳ (۲ ا جم² عہ)(π ا² جب² ۲ عہ) - ۲/۳ π ا³ (۱ - جم ۲ عہ) + ۱/۳ (ا جم ۲ عہ)(π ا² جب² ۲ عہ)]

جس کو مختصر کیا جائے تو

$$\bar{x} = \frac{1}{2} ج^2 عه$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

عام مثالیں

(۱۴۲) ۱۔ ایک مستوی ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کو وتر ا ج سے تنصیف کیا گیا ہے اور یہ وتر، وتر ب د سے نسبت ا : ب، میں تقسیم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کا مرکز ثقل، ا ج میں واقع ہے اور اس کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں نسبت ۲ ا + ب : ۲ ب + ا ہے۔

۲۔ ایک یکساں تار کو ایک دائری قوس اور دو حدودی نصف قطروں کی شکل میں موڑا گیا ہے اور اس کل نظام کا مرکز ثقل مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ مس$^{-1}$ $(-\frac{4}{3})$ بنتا ہے۔

۳۔ ایک دائری میز کے تین پائے کور کے نیچے انتصاباً واقع ہیں اور ایک مثلث متساوی الاضلاع بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کل میز کے وزن سے کم وزن میز کو اُلٹ نہیں سکتا۔

۴۔ ایک مثلثی میز تین پایوں پر جو اس کے ضلعوں کے وسطی نقطوں پر ہیں سہارا ہوا ہے اور اس پر کسی محل میں ایک وزن و رکھا گیا ہے۔ یہ معلوم ہوا کہ ایک راس پر وزن ف رکھنے سے میز کا توازن عین ٹوٹتا ہے۔ اسی طرح دوسرے راسوں پر اوزان ق، ر رکھنے سے اس کے توازن میں عین خلل واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف + ق + ر، وزن و کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۵۔ ایک مثلثی پترے کے تین کونوں پر تین وزن کیلوں کے ذریعہ جوڑ دیے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، مثلث کے مقابل کے ضلع کے طول کے متناسب ہے اور تینوں کا باہم وزن پترے کے ابتدائی وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل نو نقطی دائرہ کے مرکز پر ہے۔

۶۔ ایک مثلثی پترے کو جس کا وزن و اور جس کے اضلاع ا، ب، ج ہیں

طول ل۱، ل۲، ل۳ کی ڈوریوں کے ذریعے جو اس کے راسوں سے بندھی ہیں ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ و ک ل۱، و ک ل۲، و ک ل۳ ہیں جہاں

$$\text{ک} = \left[۳ \left(\text{ل}_۱^۲ + \text{ل}_۲^۲ + \text{ل}_۳^۲ \right) - \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲ \right]^{-\frac{۱}{۲}}$$

۷ — ایک گھڑی کی سوئی کو ایک چٹخنی پر کو کر کس طرح تیار کیا جا سکتا ہے کہ وہ گھڑی کاری (watchwork) کے ذریعہ وقت بتلائے جبکہ ایک وزن گھڑی کی سوئی میں چھپا ہوا سوئی کے ساتھ اطراف گھومے۔

۸ — یکساں مادے سے بنا ہوا تکلہ کی شکل کا ایک جسم دو قائم مستدیر مخروطوں سے محدود ہے جن کے ارتفاع ۶ اور ۲ انچ ہیں اور جن کا قاعدہ مشترک ہے جو نصف قطر ایک انچ کا ایک دائرہ ہے۔ اس جسم کو ایک ڈوری کے ذریعہ جو مستدیر قاعدہ کی کور کے ایک نقطہ سے بندھی ہے لٹکایا گیا ہے۔ تکلہ کے محور کا میلان انتصابی کے ساتھ معلوم کرو جبکہ وہ آزادانہ لٹک رہا ہو۔

۹ — ایک پورا گنجفہ میز پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ ہر کارڈ اپنے نیچے کے کارڈ سے گنجفے کے طول کی سمت میں اتنا نکلا ہوا ہے کہ وہ عین گرنے کو ہے بلالحاظ اُن کارڈوں کے جو اس کے نیچے ہیں۔ ثابت کرو کہ متواتر کارڈوں کے سروں کے درمیانی فاصلے ایک سلسلہ موسیقیہ بناتے ہیں۔

۱۰ — ثابت کرو کہ ایک یکساں طور پر وزنی ڈوری کے کسی حصہ ف ق (۱۴۳)
کا مرکزِ ثقل، ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کے اوپر انتصاباً واقع ہوتا ہے جبکہ ڈوری آزادانہ لٹک رہی ہو۔

۱۱ — ایک کروی خول کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر ا، ب ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی سے اس کے مرکزِ ثقل کا فاصلہ حسب ذیل ہے

$$\frac{۳ \left(\text{ا} + \text{ب} \right) \left(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ \right)}{۸ \left(\text{ا}^۲ + \text{ا}\text{ب} + \text{ب}^۲ \right)}$$

۱۲ — ایک لنگر چھلے کو ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز اور محور میں سے

گذرتا ہے دو مساوی حصوں میں قطع کیا گیا ہے۔ کسی ایک نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۱۳ — ثابت کرو کہ رسّا کشی کے مقابلہ میں ایک شخص کو جو قوت (کھینچ) لگانی پڑتی ہے وہ اس کے وزن کا $\frac{ل}{ب}$ ہے جہاں ل، اُس خط کا افقی ظِل ہے جو اسکی ایڑیوں کو اس کے مرکز ثقل سے مِلاتا ہے اور ب، زمین کے اوپر رسّی کی بلندی ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ ایک گھوڑا جس کا وزن و پونڈ ہے زمین کے اوپر ارتفاع ف پر $\frac{و\,ل}{ب\,ف}$ پونڈ کی افقی کھینچ اِس طرح عائد کر سکتا ہے کہ اپنے مرکز ثقل کو اُس محل سے ل فٹ آگے ہٹا لے جبکہ وہ اپنے قدموں پر سیدھا کھڑا ہوا تھا۔

۱۵ — متغیر کثافت اور مادے کی ایک سلاخ کو ایک شخص اپنی دو انگشتہائے شہادت پر اِس طرح سہارے ہوئے ہے کہ سلاخ افقی محل میں ہے۔ شخص اپنی اِن انگلیوں کو ایک دوسرے کی جانب اُن کو ایک ہی افقی سُتوی میں رکھتے ہوئے حرکت دیتا ہے اور سلاخ کو ایک یا دونوں انگلیوں پر سے پھسلنے سے نہیں روکتا۔ ثابت کرو کہ جب اُس کی انگلیاں مل جاتی ہیں تو سلاخ کا مرکز ثقل اُن دو نقاط تماس کے وسط میں ہوتا ہے جن پر سلاخ اُس کی انگلیوں کو مس کرتی ہے۔

۱۶ — ایک نیم دائری قرص انتصابی سُتوی میں اِس طرح ساکن ہے کہ اس کا منحنی کنارہ ایک کھُردرے افقی سُتوی پر اور اتنے ہی کھُردرے ایک انتصابی سُتوی پر ٹِکا ہوا ہے، رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ کم سے کم زاویہ جو احاطہ کرنے والا قطر انتصابی کے ساتھ بنا سکتا ہے حسب ذیل ہے:

$$جم^{-1}\frac{مہ+مہ^2}{1+مہ^2}\times\frac{3\pi}{4}$$

۱۷ — نصف قطر ا اور وزن و کا ایک نیم کرہ ایک چکنے میز پر اِس طرح رکھا ہوا ہے کہ اس کی منحنی سطح میز پر ہے اور طول ل (ل < ا) کی ایک ڈوری اِس کی کور کے ایک نقطہ اور میز کے ایک نقطہ سے بندھی ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ ہے

$$\frac{۳}{۸}\,و\,\frac{ا - ل}{\sqrt{۲ا(ل - ل^{۲})}}$$

۱۸ — وزن و کا ایک مثلثی پترا تین انتصابی ڈوریوں سے جو اس کے راسوں سے بندھی ہیں اس طرح سہارا گیا ہے کہ مثلث کا مستوی افقی ہے۔ وزن و کا ایک ذرہ مثلث کے مرکز عمودی پر رکھا گیا۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{ت_{۱}}{۱+۲\, مم\, ب\, مم\, ج} = \frac{ت_{۲}}{۱+۲\, مم\, ج\, مم\, ا} = \frac{ت_{۳}}{۱+۲\, مم\, ا\, مم\, ب} = \frac{و}{۲}$$

۱۹ — ایک پترے کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک مکافی اور اس کے محور پر کے ایک عمود وار خط سے محدود ہے۔ (۱۴۴)

۲۰ — اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس مکافی نما سے ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور پر عمود ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۱ — اُس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک قطع ناقص کے دو نیم قطروں کے درمیان محدود ہے۔

۲۲ — اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس ناقص نما سے ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۳ — ایک ناقص نما خول کے نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو متشابہ ہم مرکز اور ہم محور ناقص نماؤں سے اور مرکز میں سے گذرنے والے ایک مستوی سے محدود ہے۔

۲۴ — ایک قائم مستدیر مخروط کو جس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے دو مساوی حصوں میں ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور میں سے گذرتا ہے تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی ایک حصہ کا مرکز ثقل محور سے $\frac{ر}{\pi}$ فاصلہ پر واقع ہے۔

۲۵ — ایک پترا نیم کعبی مکافی $لا^{۳} = ا\, ما^{۲}$، محور لا، اور معین لا = ا سے محدود ہے۔ اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۶ — منحنی

ر = ا جب ۳ طہ

کے ایک سادہ حلقہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۷ — ایک کرہ کے ایک ثمن کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۸ — نصف قطر ب کے ایک نیم کرہ میں نصف قطر ا کا ایک اسطوانی سوراخ آر پار اس طرح بنایا گیا ہے کہ وہ نصف قطر جو نیم کرہ کے قاعدہ پر عمود ہے سوراخ کا مرکزی خط بھی ہے۔ شکل کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۹ — اس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو دائروں

$$لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ ، لا^۲ + ما^۲ = ۲ ا ب$$

سے محدود ہے۔

۳۰ — ایک عدسہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو متجانس شیشے سے بنا ہوا ہے اور جس کی کروی سطحوں کے نصف قطر ر، س ہیں اور جس کی موٹائی مرکز پر م ہے اور کنارے پر صفر۔

(۱۴۵)

ساتواں باب

کام

۱۰۹ - کام کی پیمائش - کام کی مختلف قسمیں ہیں لیکن علم حیل میں جس کام سے ہمیں واسطہ رہے گا وہ صرف وہ کام ہے جو اجسام کو جن پر قوتیں عمل کرتی ہوں حرکت دینے میں انجام پاتا ہے۔ ایسے کام کو حیلی کام کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ حیلی کام ہوتا ہے جب کبھی کوئی جسم اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے مقابلہ میں حرکت کرتا ہے مثلاً وزن اٹھاتے میں، کھردری سطح پر کوئی وزنی شئے گھسیٹنے میں یا لچکدار ڈوری تاننے میں۔ پہلی صورت میں کام قوت جاذبہ کے خلاف انجام پاتا ہے، دوسری صورت میں اس رگڑ کی قوت کے خلاف جو متحرک شئے پر کھردری سطح لگاتی ہے، اور تیسری صورت میں ڈوری کے تناؤ کے خلاف۔

کئے ہوئے کام کی مقدار کا تخمینہ کرنے میں صریحاً دو چیزوں کو محسوب کرنا ہوگا یعنے اُس قوت کی مقدار کو جو جسم پر عمل کرتی ہے اور اُس فاصلہ کو جو قوت کے خلاف جسم نے طے کیا ہے۔ کام کی مقدار صریحاً قوت کے راست متناسب ہوگی۔ ۲۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک معلومہ بلندی تک اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اُس کام کا دُگنا ہوگا جو ۱۰۰ پونڈ کے ایک وزن کو اُسی بلندی تک اٹھانے میں مطلوب ہوگا۔ نیز کام اُس فاصلے کے بھی متناسب ہوگا جو طے ہوا ہے۔ کسی وزن کو ۲ فٹ تک

اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اُس کام کا دگنا ہوگا جو اُسی وزن کو ایک فٹ تک اٹھانے میں مطلوب ہوگا۔ اس لئے کئے ہوئے کام کی مقدار، قوت اور فاصلہ کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

ایک پونڈ کے وزن کو ایک فٹ ارتفاع تک اٹھانے میں جو کام ہوتا ہے اُس کی مقدار کو ایک فٹ پونڈ کہتے ہیں۔

اوپر کے بیان سے یہ ظاہر ہے کہ و پونڈ کے وزن کو ف فٹ بلندی تک اٹھانے میں کئے ہوئے کام کی مقدار و ف فٹ پونڈ ہے۔ نیز کسی جسم کو ف پونڈ کی ایک قوت کے خلاف س فٹ تک حرکت دینے میں کیا ہوا کام ف س فٹ پونڈ ہے اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

ایک جسم کو ایک ایکساں قوت کے خلاف کسی فاصلہ تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ قوت اور فاصلہ کا حاصل ضرب ہے۔ (۱۴۶)

مثلاً فرض کرو کہ ایک ریل گاڑی کو ایک ہموار راستہ پر کھینچنے میں جو قوت مطلوب ہوتی ہے وہ ۱۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ تب اس گاڑی کو ۱۰۰ میل کے فاصلہ تک کھینچنے میں جو کام ہوگا وہ

= ۱۰۰ × ۵۲۸۰ × ۱۰۰۰ فٹ پونڈ

۱۱۰۔ کام کرنے کی شرح۔ کام کو اکثر ایک مقررہ وقت میں انجام دینا ہوتا ہے اور اِس لیے اکثر اس کی ضرورت ہوتی ہے کہ وہ شرح معلوم کی جائے جس سے کام ہو رہا ہے۔ کام کرنے کی وہ شرح جس میں ۳۳۰۰۰ فٹ پونڈ کا کام فی منٹ ہوتا ہے **ایک اَسپی طاقت** کہلاتی ہے۔

اَسپی طاقت کو بالعموم ۱۔ط (H.P) سے تعبیر کیا جائے گا۔

اِس اکائی کو واٹ (Watt) نے جاری کیا تھا کیونکہ یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک معمولی گھوڑے کے کام کرنے کی شرح ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوا ہے کہ بہت کم گھوڑے مسلسل ایک اَسپی طاقت کے ساتھ کسی مدت تک کام کر سکتے ہیں

ہارس پاور کا حساب لگانے کے لیے ذیل میں ایک مثال دیجاتی ہے:

فرض کرو کہ اس انجن کی اسپی طاقت مطلوب ہے جو ایک ٹرین کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے کھینچتا ہے جبکہ رگڑ کی مزاحمت ۱۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار = ۴۴ فٹ فی ثانیہ، اس لئے وہ کام جو فی ثانیہ ہوا = ۴۴ × ۱۰۰۰ فٹ پونڈ۔ لیکن چونکہ ایک اسپی طاقت = ۵۵۰ فٹ پونڈ فی ثانیہ اس لئے مطلوبہ اسپی طاقت

$$= \frac{۴۴ \times ۱۰۰۰}{۵۵۰} = ۸۰ \text{ اسپی طاقت}$$

اس سے وہ اسپی طاقت ملتی ہے جو ٹرین کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے کھینچنے میں مطلوب ہے اگر رفتار مستقل نہ ہو تو ہم دیکھیں گے کہ اسپی طاقت مختلف ہوگی کیونکہ کام کا کچھ حصہ حرکت کا اسراع پیدا کرنے میں صرف ہوگا لیکن موجودہ صورت میں ہم اپنی توجہ صرف یکساں رفتار کی حرکت پر محدود رکھتے ہیں۔

کام کی مطلق اکائی

۱۱۱ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوت کی عملی اکائی کمیت کا وزن ہے اور اس اکائی کے علاوہ ایک اور اکائی بھی ہے جس کو مطلق اکائی کہتے ہیں اور جسکی تعریف یہ ہے کہ یہ وہ قوت ہے جو اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔ چونکہ عملی اکائی اکائی کمیت میں اسراع ج پیدا کرتی ہے (۱۴۷) جہاں ج اسراع بوجہ جاذبہ ارض ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عملی اکائی مطلق اکائی کی ج گنی ہے۔

برطانوی عملی اکائیوں میں اکائی قوت، پونڈ وزن ہے۔ مطلق اکائیوں میں متناظر اکائی پونڈل کے طور پر مشہور ہے۔ یہ وہ قوت ہے جو ایک پونڈ کی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔

کام کی عملی اکائی جیسا کہ ہم بیان کر چکے ہیں وہ کام ہے جو ایک پونڈ کی

کمیت کو ایک فٹ تک اٹھانے سے انجام پاتا ہے یعنی ایک پونڈ کے وزن کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں۔ کام کی ایک مطلق اکائی بھی ہے جس کی تعریف یہ کی جاتی ہے کہ یہ وہ کام ہے جو ایک پونڈل کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں ہوتا ہے۔ اس اکائی کو **فٹ پونڈل** کہتے ہیں۔ اب چونکہ ایک پونڈ وزن 'ج' پونڈل کے مساوی ہے اس لئے صریحاً حسب ذیل ربط حاصل ہوتا ہے

ایک فٹ پونڈ = ج فٹ پونڈل

مثالیں

۱۔ ایک ایسی طاقت کا ایک گھوڑا ایک ٹن وزنی گاڑی کو کس رفتار سے کھینچ سکتا ہے اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ رگڑ ایک ایسی افقی قوت پیدا کرتی ہے جو گاڑی کے وزن کا ۱/۴ ہے۔

۲۔ اگر ایک جسم کو جس پر ف پونڈل کی ایک مزاحم قوت عمل کرتی ہے اس مزاحمت کے خلاف رفتار و سے حرکت میں لایا جائے تو کتنی ایسی طاقت مطلوب ہوگی۔

۳۔ ۷ ایسی طاقت کا ایک بھاپ بیلن (Roller) جس کا وزن ایک ٹن ہے کس شرح سے ایک راستہ پر لڑھکے گا اگر مزاحمت بوجہ رگڑ بیلن کے وزن کے مساوی ہے۔

۴۔ ایک گھونگا جس کا وزن ۱/۲ اونس ہے ۶ فٹ بلند دیوار پر ۴ گھنٹوں میں چڑھتا ہے۔ کس ایسی طاقت سے وہ کام کرتا ہے۔

۵۔ اینٹوں کے ایک ڈھیر کو جس کا وزن ۵ ٹن ہے ایک مکان کی چھت پر پہنچانا ہے جس کی بلندی ۵۰ فٹ ہے۔ دس مزدور لگائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک ۱/۱۲ ایسی طاقت کی اوسط شرح سے کام کرتا ہے۔ اس کام میں کتنا وقت لگیگا۔

۶۔ ایک انجن کے فشارے کا رقبہ ا مربع فٹ اور ضرب ل فٹ ہے اور انجن ن گردشیں فی منٹ کرتا ہے۔ اگر فشارہ پر عمل کرنے والا دباؤ فی اکائی

رقبہ ف پونڈ وزن فی مربع فٹ ہو تو ثابت کرو کہ انجن جس اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے وہ

$$\frac{\text{ف ل ا ن}}{۳۳۰۰۰}$$

ہے۔

۷۔ ایک حرّاکہ (Locomotive) کا دائری فشارہ ۷ انچ قطر کا ہے اور اس کی ضرب ۲۶ انچ ہے۔ وہ ۲۵۰ گردشیں فی منٹ کرتا ہے اور دباؤ ۲۲۵ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے۔ اس کی اسپی طاقت معلوم کرو۔

۸۔ اگر ایک جہاز کو جس کا طول ۱۵۰ فٹ ہے ۹ بحری میل کی رفتار سے چلانے کے لیے ۲۰۰ اسپی طاقت مطلوب ہو تو ثابت کرو کہ ایک مشابہ جہاز کو جو متشابہاً غرق ہے اور ۶۰۰ فٹ لمبا ہے ۱۸ بحری میل کی رفتار سے چلانے کے لیے ۲۵۶۰۰ اسپی طاقت مطلوب ہوگی جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت، تر سطح کے اور رفتار کے مربع کے متناسب ہے۔ نیز ثابت کرو کہ مافیہ جہاز کے ہر ٹن کے لیے کوئلے کی قیمت دونوں جہازوں میں ایک ہی ہوگی۔ (۱۴۸)

۹۔ ۱۵۰ اسپی طاقت ایک دُھرے سے دوسرے دُھرے پر ایک پٹے کے ذریعہ منتقل ہوتی ہے جو دُھروں کے دو پہیوں پر ۲۷۰۰ فٹ فی منٹ کی خطی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ پٹے کی دو جانبوں پر تناؤ کا فرق معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک حرّاکہ میں فی اسپی طاقت گھنٹہ (Horse-power-hour) $\frac{1}{2}$۱ پونڈ کوئلہ خرچ ہوتا ہے۔ ایک ٹرین کو جس کا مجموعی وزن ۱۰۰۰ ٹن ہے ہموار راستہ پر ۵۰ میل تک کھینچنے میں کتنا کوئلہ مطلوب ہوگا جبکہ راستہ کی مزاحمت بوجہ رگڑ ۱۲ پونڈ وزن فی ٹن ہو۔

۱۱۔ ۲۲۰۰۰ اسپی طاقت کا ایک جہاز چھ دنوں میں ۳۲۰۰ میل طے کرتا ہے۔ جہاز کی حرکت پر مزاحمت معلوم کرو۔

متغیر قوت کے خلاف کام

۱۱۲ ۔ اگر ایک جسم کو ایک قوت کے خلاف جس کی شدت مستقل نہ ہو

بلکہ متحرک جسم کے راستہ پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہو متحرک کیا جائے تو ہم ایسی صورت میں انجام پذیر کام کے لیے ضابطہ ف س استعمال نہیں کر سکتے۔

کام کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم اس پورے خط کو جس پر حرکت واقع ہوتی ہے لاانتہا صغیر چھوٹے ٹکڑوں کی لاانتناہی تعداد میں تقسیم کرتے ہیں، ان میں سے ہر ٹکڑا اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ حرکت میں جو قوت مزاحم ہے اس کو کسی ایک ٹکڑے پر اثناء حرکت میں مستقل مقدار کا فرض کیا جا سکے۔

اگر کسی جزو کا طول فرس ہو جس کا فاصلہ ابتدائی نقطہ سے س ہے اور اگر قوت کی شدت جو اس چھوٹے جزو فرس میں حرکت کی مزاحم ہے ف ہو تو اس جزو کو طے کرنے میں کام کی مقدار ف فرس ہوگی۔ اسلئے تمام اجزاء میں کیے ہوئے کام کی مقداروں کا مجموعہ یعنی کل کام جو ہوا

$$\int ف\ فرس$$

ہے۔

لچکدار ڈوری کو تنانے میں کام

۱۱۳ — اس ضابطہ کے استعمال کی مثال کے لیے فرض کرو کہ ہم وہ کام معلوم کرتے ہیں جو ایک لچکدار ڈوری کو تنانے میں انجام پاتا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل ہے اور اس کی لچک کی قدر لہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

(۱۴۹) جب ڈوری کا طول کھنچکر لا ہو جاتا ہے تو اس کا تناؤ ف، دفعہ ۳۹ کے ضابطہ کی رو سے حسب ذیل ہے:

$$ت = لہ \frac{لا - ل}{ل}$$

ڈوری کو اور مزید طول فرلا تک تنانے میں — یعنی طول لا سے طول لا + فرلا تک — کیا ہوا کام

$$= ت\ فرلا$$

$$= \frac{ل_\circ}{ل} (لا - ل) فرلا$$

تکمل سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ ڈوری کو طول ا سے طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$= \int_{لا=ا}^{لا=ب} \frac{ل_\circ}{ل} (لا - ل) فرلا$$

$$= \frac{ل_\circ}{۲ل} \left\{ (ب - ل)^۲ - (ا - ل)^۲ \right\}$$

$$= \frac{ل_\circ}{۲ل} (ب + ا - ۲ل)(ب - ا)$$

وسیع شدہ طول ب - ا ہے اور $\frac{ل_\circ}{۲ل}$ (ب + ا - ۲ل) وہ تناؤ ہے جبکہ توسیع کا نصف مکمل ہو چکتا ہے یعنی جبکہ لا = $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب)

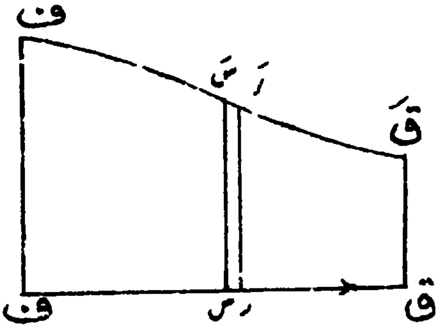
پس معلوم ہوا کہ

کسی لچکدار ڈوری کو کسی طول ا سے (جو ڈوری کے طبعی طول سے بڑا ہو) طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ تناؤ طول $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب) پر × (ب - ا) کے مساوی ہے۔

اگر تناؤ کو پونڈوزن میں اور توسیع (ب - ا) کو فٹوں میں پیمائش کیا جائے تو صریحاً اس حاصل ضرب سے کام کی وہ مقدار حاصل ہوگی جو فٹ پونڈوں میں پیمائش کی گئی ہے۔ اگر تناؤ کو پونڈلوں میں اور (ب - ا) کو فٹوں میں پیمائش کیا جائے تو حاصل ضرب سے فٹ پونڈلوں میں کام کی مقدار حاصل ہوگی۔

کام کو رقبہ کے ذریعہ تعبیر کرنا (۱۵۰)

۱۱۴ ۔ فرض کرو کہ ف ق اُس راستہ کو تعبیر کرتا ہے جو ایک متحرک جسم مرتسم کرتا ہے اور فرض کرو کہ ہم ف ق کے ہر نقطہ پر مُعین کھینچتے ہیں جو کسی پیمانہ پر (جو ہم چاہیں) اُس قوت کو تعبیر کرتے ہیں جو اُس نقطہ پر جسم کی حرکت میں مزاحم ہے ۔ فرض کرو کہ ایسے کوئی دو متصلہ نقطے س، ر ہیں اور ان نقطوں پر کے معین س سَ، ر رَ ہیں ۔



شکل (۸۴)

اب چھوٹی پٹی س سَ رَ ر کے رقبہ کو انتہا میں س ر × س سَ کے مساوی فرض کیا جا سکتا ہے ۔ اس پیمانہ پر جس پر ہم قوتوں کو تعبیر کر رہے ہیں یہ حاصل ضرب
= فاصلہ س ر × وہ قوت جو جسم کی حرکت از س تا ر میں مزاحم ہے

دوسرے الفاظ میں چھوٹے رقبہ س سَ رَ ر سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو جسم کو س سے ر تک حرکت دینے میں ہوا ہے ۔

ایسے چھوٹے رقبوں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل رقبہ ف فَ قَ ق سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو ف تا ق حرکت میں انجام پایا ہے ۔

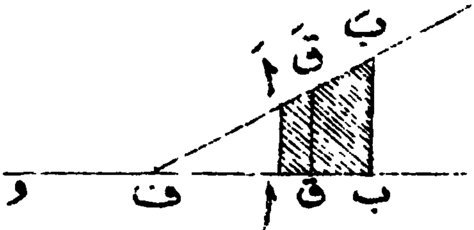
۱۱۵ ۔ اس طریقہ سے وہ کام بہت ہی آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے جو ایک لچکدار ڈوری کو تاننے میں انجام پاتا ہے اور جس کی ہم دفعہ ۱۱۳ میں تخمین کر چکے ہیں ۔ فرض کرو کہ و ف ڈوری کا طبعی طول ہے ۔ فرض کرو کہ ڈوری کے سرے و کو خوب مضبوط پکڑ لیا گیا ہے اور یہ کہ ڈوری کو جب تنایا جاتا ہے تو اس کا دوسرا سرا ف خط و ف پر حرکت کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ وہ کام مطلوب ہے جو ڈوری کو

طول و ا سے طول و ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے۔

فرض کرو کہ خط و ف ا ب کا کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ مُعین ق قَ کھینچا گیا ہے جو اُس تناؤ کو تعبیر کرتا ہے جبکہ ڈوری کا طول و ق ہے۔

ق کے مختلف محلوں کے لئے معین ق قَ کا ارتفاع مختلف ہوگا۔

اب چونکہ کلیہ ہک کی رُو سے تناؤ توسیع کے متناسب ہوتا ہے اسلئے



شکل (۸۵)

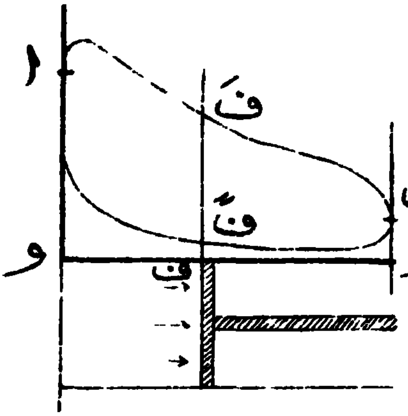
مُعین ق قَ کا ارتفاع (جو تناؤ کو تعبیر کرتا ہے) ہمیشہ ف ق (توسیع) کے ساتھ ایک ہی نسبت رکھے گا۔ اِس لئے قَ ہمیشہ ف میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر ہوگا۔ اگر ا اَ اور ب بَ وہ مُعین ہوں جو علی الترتیب ا اور ب پر کے تناؤں کو تعبیر کرتے ہیں تو یہ خط نقطوں اَ، بَ میں سے گذرے گا۔ اب وہ کام جو ڈوری کو ا سے ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے دفعہ ۱۱۴ کی بموجب رقبہ ا اَ بَ ب سے تعبیر ہوتا ہے (دیکھو شکل ۸۵)

اِس شکل کا رقبہ صریحًا ا ب کو اُس مُعین سے ضرب دینے سے حاصل (۱۵۱)
ہوتا ہے جو ا ب کے نقطہ وسطی پر قائم کیا گیا ہو۔ یہ مُعین ڈوری کے اُس تناؤ کو تعبیر کرتا ہے جبکہ اس کا طول $\frac{1}{2}$(و ا + و ب) ہو یعنی ہمیں دفعہ ۱۱۳ کا نتیجہ ہی حاصل ہوتا ہے جو حسب ذیل ہے:

(کیا ہوا کام) = (توسیع کی وسعت (ا ب)) × (توسیع کی نصف منزل پر تناؤ)

۱۱۶ — مظہار نقشہ — کام کی اُس ترسیمی تعبیر سے جسکو دفعہ ۱۱۴ میں سمجھایا گیا ہے عملی انجینیرنگ میں استفادہ کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ و وَ وہ فاصلہ ہے جو ایک فشارہ، اسطوانہ میں طے کرتا ہے۔ جب فشارہ کسی محل ف میں ہو تو فرض کرو کہ فشارہ پر عمل کرنے والے دباؤ کی پیمائش

کی گئی ہے اور فرض کرو کہ اس دباؤ کو تعبیر کرنے کے لیے کسی پیمانہ پر ایک خط ف فَ، وَوَ کے علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ جب فشارہ طول وَوَ پر حرکت کرتا ہے اور پھر طول وَ و پر واپس ہوتا ہے تو نقطہ فَ ایک بند منحنی ا فَ ب فَ ا مرتسم کرتا ہے جس کو فشارہ کی حرکت کا مظہار نقشہ کہتے ہیں۔



شکل (۸۶)

فشارہ کی آگے کی حرکت میں بھاپ نے اُس پر جو کام کیا ہے وہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں رقبہ ا فَ ب وَ ف وا سے تعبیر ہوتا ہے جو منحنی ا فَ ب اور محور و وَ سے محدود ہے۔ یہ کام فشارہ کو اس کے ڈنڈے کی ڈھکیل کے خلاف آگے حرکت دینے میں صرف ہوا ہے۔ اسی طرح فشارہ کی پیچھے کی حرکت میں یعنی حرکت واپسیں میں بھاپ نے اس پر جو کام کیا ہے وہ رقبہ ب وَف و ا فً ب سے تعبیر ہوتا ہے جو منحنی ب فً ا اور محور و وَ سے محدود ہے، اس رقبہ کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہئے کیونکہ فشارہ اب اس پر عمل کرنے والے دباؤ کے خلاف حرکت کر رہا ہے۔

پس کُل کام جو فشارہ پر ہوا ان دو رقبوں کے فرق سے تعبیر ہوتا ہے اور یہ وہ رقبہ ہے جو خود مظہار نقشہ کا ہے۔ اس لیے وہ شرح معلوم کرنے کے لیے جس پر انجن کام کر رہا ہے صرف اس امر کی ضرورت ہے کہ مظہار نقشہ کا رقبہ اور گردشوں کی تعداد فی اکائی وقت معلوم کی جائے۔

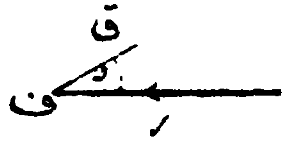
کام اُس قوت کے خلاف جو سمت حرکت کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے (۱۵۲)

۱۱۷۔ ہم نے ابتک اُن صورتوں پر بحث کی ہے جن میں قوت ایسی سمت میں

عمل کرتی ہے جو اُس سمت کے ٹھیک مخالف ہے جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ لیکن ہمیں اُس کام کا بھی حساب لگانا پڑے گا جو انجام پاتا ہے جبکہ حرکت قوت کی سمت کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے۔

جب جسم کو قوت کی سمت کے علی القوائم متحرک کیا جاتا ہے تو صریحاً کیا ہوا کام صفر ہے مثلاً کسی وزن کو ایک افقی سطح پر پھرانے میں جاذبۂ ارض کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا۔

اب ہم وہ کام معلوم کرینگے جو انجام پاتا ہے جبکہ کسی جسم کو ایک ایسی سمت میں متحرک کیا جاتا ہے جو اس پر عمل کرنے والی قوت کی سمت سے کوئی زاویہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک جسم کو ف سے ق تک جو اِس کے راستہ کا ایک چھوٹا حصہ فرس ہے حرکت دی گئی ہے جبکہ اِس پر ایک قوت ر عمل کرتی ہے جس کا خط عمل، ق ف سے زاویہ فہ بناتا ہے۔ ر کو دو اجزائے ترکیبی ر جم فہ، ر جب فہ میں تحلیل کرو جن میں سے پہلا ق ف پر اور دوسرا ق ف کے عمود وار عمل کرے۔



شکل (۸۷)

ر کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ وہی ہے جو ہوتا اگر یہ دو قوتیں ر جم فہ اور ر جب فہ ایک ساتھ جسم پر عمل کرتیں۔ اول الذکر قوت کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ ر جم فہ فرس ہے اور موخر الذکر کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ صفر ہے۔ اس لئے کل کام جو انجام پایا ہے ر جم فہ فرس ہے۔

۱۱۸ — فرض کرو کہ ر کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، ے ہیں اور فرض کرو کہ راستہ کے عنصر ف ق کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں۔ ر کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام

لا/ر ، ما/ر ، ے/ر

ہیں اور چونکہ یہ خط عمل، ف ق سے زاویہ ۲۱ ـ فہ بناتا ہے اسلئے

$$\text{جم}(\pi - \text{فہ}) = \text{ل}\frac{\text{لا}}{\text{ر}} + \text{م}\frac{\text{ما}}{\text{ر}} + \text{ن}\frac{\text{ے}}{\text{ر}}$$

پس ر فرس جم فہ = ۔ فرس (ل لا + م ما + ن ے)
= ۔ (لا فرلا + ما فرما + ے فری)

جہاں فرلا، فرما، فری، محوروں پر فرس کے ظل ہیں ۔ اس سے اُس کام کے لئے جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے ایک تحلیلی جملہ حاصل ہوتا ہے ۔ تکمل کے ذریعہ ہم وہ کام معلوم کر سکتے ہیں جو کسی حرکت میں ہوا ہے ۔

۱۱۹ ۔ جاذبہ کے خلاف اجسام کے ایک نظام کو اٹھانے میں کام ۔ (۱۵۳)

اگر کمیت ک کے ایک ذرہ کو ایک راستہ پر جو انتصابی (اوپر وار) سے زاویہ فہ بنائے فاصلہ فرس تک حرکت دی جائے تو کیا ہوا کام ک ج جم فہ فرس ہے چونکہ وہ فاصلہ جس میں سے ذرہ کو اُٹھایا گیا ہے فرس جم فہ ہے اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کام جو ہوا وہ جسم کے وزن (ک ج) اور اُس ارتفاع کا حاصل ضرب ہے جس میں سے ذرہ کو اٹھایا گیا ہے ۔

ذرہ کو کسی راستہ پر سے لیجانے اور راستہ کے متواتر عناصر پر جو کام ہوا ہے اِن کی مقداروں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوتا ہے وہ ذرہ کے وزن اور اُس کُل انتصابی فاصلہ کا حاصل ضرب ہوتا ہے جس میں سے ذرہ کو اُٹھایا گیا ہے ۔

۱۲۰ ۔ فرض کرو کہ ہم کمیتوں ک_1، ک_2، ک_3 ۔ ۔ ۔ ۔ کے متعدد ذروں کو حرکت دیتے ہیں ۔ فرض کرو کہ حرکت سے قبل زمین کے اوپر اِن کے ارتفاع ف_1، ف_2، ف_3 ۔ ۔ ۔ ۔ ہیں اور حرکت کے ختم پر اِن کے ارتفاع فَ_1، فَ_2، فَ_3 ۔ ۔ ۔ ہیں ۔ پہلے ذرہ پر جاذبہ ارض کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ $\text{ک}_1 \text{ج} (\text{فَ}_1 - \text{ف}_1)$ ہے، ایسی تمام مقداروں کو جمع کرنے سے جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوا ہے وہ

$$= \text{ک}_1\text{ج}(\text{فَ}_1 - \text{ف}_1) + \text{ک}_2\text{ج}(\text{فَ}_2 - \text{ف}_2) + \ldots$$

$$= \text{ج}\left(\Sigma\, \text{ک}_1\text{فَ}_1 - \Sigma\, \text{ک}_1\text{ف}_1\right) \quad \ldots\ldots (۳۵)$$

فرض کرو کہ ذروں کی مجموعی کمیت ک سے تعبیر ہوتی ہے۔ اور فرض کرو کہ تمام ذروں کے مرکز ثقل کا ارتفاع حرکت سے قبل ف اور حرکت کے بعد فَ ہے۔ اب دفعہ ۸۶ کے ضابطہ کی رُو سے

$$ف = \frac{\Sigma ک_{۱} ف_{۱}}{\Sigma ک_{۱}} = \frac{\Sigma ک_{۱} ف_{۱}}{ک}$$

اس لئے $\Sigma ک_{۱} ف_{۱} = ک ف$

اور اسی طرح $\Sigma ک_{۱} فَ_{۱} = ک فَ$

اس لئے کُل کام بموجب جملہ (۳۵)

$$= ج (ک فَ - ک ف)$$

$$= ک ج (فَ - ف)$$

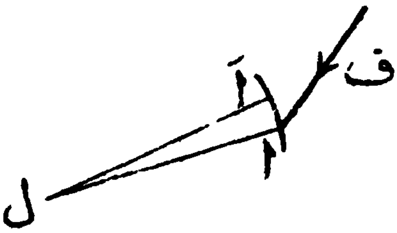
اِس طرح جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوا وہ ذروں کے مجموعی وزن (۱۵۴) اور اُس انتصابی ارتفاع کا حاصل ضرب ہے جس میں سے ذروں کے مرکز ثقل کو اُٹھایا گیا ہے۔

کام جو ایک جفت کے خلاف انجام پائے

۱۲۱۔ مسئلہ۔ اگر ایک اُستوار جسم کو جس پر قوتوں کا ایک نظام عمل کرتا ہے کسی محور کے گرد زاویہ صہ میں سے چھوٹی گردش دیجائے تو کام جو کیا گیا وہ گ صہ ہے جہاں گ اِس محور کے گرد اُن قوتوں کا معیار ہے جو حرکت میں مزاحم ہیں۔

فرض کرو کہ گردش کا محور وہ خط ہے جو صفحے کے مستوی پر عمود ہے اور اِس سے نقطہ ا پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ نمونہ کی ایک قوت ف ہے جو جسم کے ذرہ ا پر عمل کرتی ہے۔ گردش کے بعد فرض کرو کہ ا کا محل اَ

ہو جاتا ہے اور اس لئے زاویہ
ال اَ، صہ کے مساوی ہے
کیونکہ یہ وہ زاویہ ہے جس میں سے
جسم کو گردش دی گئی ہے۔
اثنائے گردش میں قوت
ف کا نقطہ عمل ا سے اَ تک
حرکت کرتا ہے اور اس لئے جو کام
ہوا وہ



شکل (۸۸)

= ف × ا اَ × جم فہ

جہاں فہ، ف اور ا اَ کا درمیانی زاویہ ہے،

= ا اَ × ف کا جزو ترکیبی سمت ا اَ پر

= صہ × ل ا × ف کا جزو ترکیبی سمت ا اَ پر

= صہ × ف کا معیار گردش کے محور کے گرد

اگر استوار جسم پہ متعدد قوتیں عمل کریں جن کے نقاط عمل جسم کے مختلف ذرات ہوں تو عمل جمع سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ کل کام جو ہوا وہ

= صہ × گردش کے محور کے گرد ان تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ

= گ صہ، جہاں گ گردش کے محور کے گرد تمام قوتوں کا معیار ہے۔

مثالیں (۱۵۵)

۱۔ ایک شخص جس کا وزن ۱۴۰ پونڈ ہے ایک پہاڑی راستہ پر چڑھتا ہے جس کا میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے۔ اگر اس کے چڑھنے کی شرح ایک میل فی گھنٹہ ہو تو معلوم کرو کہ اس کو اپنا وزن اٹھانے میں کتنی اسپی طاقت سے کام کرنا پڑ رہا ہے۔

۲۔ ایک انجن، ۱۰۰۰ ٹن وزنی ٹرین کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی شرح سے ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۲۰۰ میں ۱ ہے کھینچ رہا ہے۔ مزاحمت بوجہ رگڑ ٹرین کے وزن کا $\frac{1}{200}$ ہے۔ معلوم کرو کہ کس اسپی طاقت سے انجن کام کر رہا ہے۔

۳ — ایک آٹوموبیل ، ایک ٹن وزنی ، ایک پہاڑ پر جس کا میلان ۶۰ میں ۱ ہے ۸ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑھتی ہے ۔ مزاحمت بوجہ رگڑ کو گاڑی کے وزن کا $\frac{1}{50}$ لیکر معلوم کرو کہ وہ کس شرح سے پہاڑ کے نیچے اتر سکتی ہے ' یہ فرض کرو کہ اسپی طاقت جو انجن میں پیدا ہوتی ہے وہی رہتی ہے ۔

۴ — پتھروں کے ایک بوجھ کو جس کا وزن ۱۸ ٹن ہے ایک ناؤ سے ایک گھاٹ پر جو ناؤ کے اوپر ۳۰ فٹ بلند ہے حمالوں (Cranes) کے ذریعہ اتارا گیا ہے ' جہاں حمالوں کو ایک انجن چلاتا ہے ۔ اگر اتارنے میں تین گھنٹے صرف ہوں تو وہ اوسط اسپی طاقت معلوم کرو جس سے انجن کام کر رہا ہے ۔

۵ — یہ فرض کر کے کہ ایک آدمی چلتے وقت ہر قدم پر اپنے مرکز ثقل کو ایک انچ انتصابی فاصلہ میں سے اوپر اٹھاتا ہے معلوم کرو کہ وہ کتنی اسپی طاقت سے کام کرتا ہے اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چلے اور اس کا قدم ۳۲ انچ اور اس کا وزن ۱۶۸ پونڈ ہو ۔

۶ — ایک سیکل سوار اور اس کی مشین کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہے اور وہ ایک چڑھائی پر جو ۸۰ میں ۱ ہے ۱۵ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑھتا ہے ۔ اس کی سیکل کی گیرائی ۷۲ انچ ہے اور کرنیکوں کا طول ۷ انچ ہے ۔ رکاب پر اس کے پاؤں کا اوسط انتصابی دباؤ معلوم کرو ' یہ فرض کرو کہ یہ دباؤ صرف رکاب کی نیچے وار حرکت میں موجود رہتا ہے ۔

۷ — ایک جہاز کے انجن ۵۰۰۰ اسپی طاقت کے ہیں اور جب انجن پوری طاقت سے کام کرتے ہیں تو انجن ۷۵ گردشیں فی منٹ کرتا ہے ۔ جفت معلوم کرو جو دُھرے کے ذریعہ منتقل ہوتا ہے ۔

۸ — جب ایک جسم دوسرے پر لڑھکتا ہے تو ایک جفت پیدا ہوتا ہے جو حرکت کی مزاحمت کرتا ہے ' یہ جفت اس جفت کے مساوی ہوتا ہے جو طول ل کے ایک بازو کے سرے پر عمادی تعامل پیدا کرتا ہے جہاں ل کو لڑھکنی رگڑ کی قدر کہتے ہیں ۔

اگر ریل کا ایک ڈبہ نصف قطر ا کے پہیہ پر چلے تو ثابت کرو کہ اسکی حرکت میں لڑھکنی رگڑ سے جو مزاحمت پیدا ہوگی وہ اس کے وزن کا $\frac{ل}{ا}$ گنی ہے ۔

موہوم کام کا اصول

۱۲۲ — چھوٹے ہٹاؤ سے فی الحال وہ حرکت مراد ہوگی جس میں ایک نظام کا ہر ذرہ اپنی ابتدائی مقام سے اتنے فاصلہ تک حرکت کرے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو ایک متغیر مقدار تصور کیا جا سکے اور اس کا مربع نظر انداز ہو سکے۔ اگر نظام قوتوں کے زیر عمل ہے تو کسی چھوٹے ہٹاؤ کی تکمیل میں کام انجام پائیگا۔ اب چونکہ ہٹاؤ کو ایک چھوٹی مقدار فرض کیا گیا ہے اس لیے جو کام ہوگا وہ بھی ایک چھوٹی مقدار کا ہوگا۔

اگر کوئی ذرہ توازن میں ہے تو حاصل قوت جو اس پر عمل کرتی ہے معدوم ہوتی ہے اور اس لیے ذرہ کے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے وہ ہٹاؤ کے مقابلتاً اعلی تر رتبہ کا ہونے کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے۔ اگر کوئی استوار جسم یا استوار اجسام یا ذروں کا کوئی نظام توازن میں ہے اور اگر اس میں کوئی چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو چونکہ ہر ذرہ پر کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے اس لیے کل کام صفر ہے۔ (۱۵۶)

۱۲۳ — کسی نظام کے ذروں پر عمل کرنے والی قوتوں کو حسب دفعہ ۵ دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے:

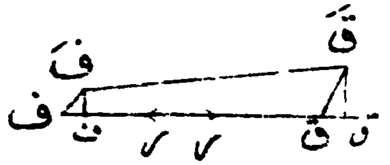
(ا) وہ قوتیں جو اجسام پر بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں،

(ب) ان اعمال اور تعاملات کے زوج جو اجسام کے ذروں کے درمیان یا ایک دوسرے کو مس کرنے والے دو اجسام کے درمیان عمل کرتے ہیں۔

کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کو محسوب کرنے میں ہمیں اس کام کو شمار کرنا چاہیئے جو دونوں جماعتوں کی قوتوں کے خلاف انجام پاتا ہے لیکن ہم دیکھیں گے کہ دوسری جماعت کی قوتوں سے جو ارکام پیدا ہوتی ہیں انہیں سے بیشتر ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں۔

۱۲۴ — فرض کرو کہ اول ہم قوتوں کے اس زوج پر غور کرتے ہیں جو ایک استوار جسم کے دو ذروں ف، ق کے درمیان عمل اور تعامل سے پیدا ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ

ہر قوت کی مقدار ر ہے اور اس کی سمت ق ف یا ف ق ہے بموجب اِس کے کہ وہ ف یا ق پر عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ کا اثر یہ ہے کہ ف، ق علی الترتیب ف َ، ق َ تک حرکت کرتے ہیں اور فرض کرو کہ ف َ، ق َ سے ف ق پر عمود ف َ ف اور ق َ ق کھینچے گئے ہیں۔ اُس قوت ر کے خلاف جو ف پر عمل کرتی



شکل (۸۹)

ہے جو کام ہوا وہ ر × ف ف ہے اور اُس قوت ر کے خلاف جو ق پر عمل کرتی ہے جو کام ہوا وہ ر × ق ق ہے۔ اِس لئے کل کام جو ہوا وہ

= ر (ف ف ـ ق ق)

= ر (ف ق ـ ف ق)

= ر (ف ق ـ ف َ ق َ کا ظل ف ق پر)

اب چونکہ جسم اُستوار ہے طول ف َ ق َ، طول ف ق کے مساوی ہے اور چونکہ بموجب فرض ہٹاؤ چھوٹا ہے اِس لئے ف َ ق َ کا ظل ف ق پر

= ف َ ق َ، اِلّا رتبہ اول سے اعلیٰ تر رتبہ والی چھوٹی مقداروں کے

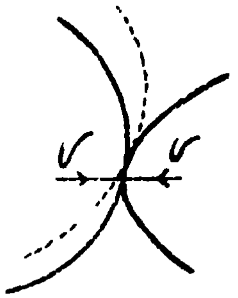
= ف ق

اِس لئے جو کام ہوا وہ صفر ہے۔

۱۲۵ — نیز وہ کام بھی صفر ہوتا ہے جو قوتوں کے اُس زوج کے خلاف انجام پاتا ہے جو دو چکنی سطحوں کے درمیان عمل اور تعامل پر مشتمل ہوتی ہیں۔ اول اُس صورت پر غور کرو جس میں ایک جسم ساکن ہے اور دوسرا اِس کی سطح پر پھسلتا ہے۔ ایسے ہٹاؤ میں اگر کوئی کام ہوا ہے تو وہ اِس تعامل کے خلاف ہے جو متحرک جسم پر عمل کرتا ہے۔ چونکہ قوت عماد پر عمل کرتی ہے

اور اس کے نقطۂ عمل کا مماس مستوی میں حرکت کرنا ضروری ہے یعنی عماد کے علی القوائم اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے۔

وہ عام سے عام حرکت جو ان دو سطحوں کے لئے ممکن ہے دو حرکتوں سے مرکب ہوتی ہے ایک اُس قسم کی حرکت جو ابھی بیان کی گئی اور دوسری وہ حرکت جس میں یہ دو سطحیں ایک اُستوار جسم کے طور پر حرکت کرتی ہیں ہم ابھی دیکھ چکے ہیں کہ ہٹاؤ کے پہلے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ صفر ہے۔ ہٹاؤ کے دوسرے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ حسب



شکل (۹۰)

دفعہ ۱۲۴ معدوم ہوتا ہے پس کل کام معدوم ہوتا ہے اور مطلوبہ نتیجہ ثابت ہے۔

۱۲۶ — نتائج بالا درست نہیں ہوں گے اگر سطحوں کے درمیان تماس کھردرا ہو۔ ایسی صورت میں جو کام ہوتا ہے وہ رگڑ کی قوتوں کی مقدار پر منحصر ہوتا ہے اور چونکہ ان قوتوں کی مقدار معلوم کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا پورے مسئلے کو حل کرنا اس لئے ایسی صورتوں میں موہوم کام کا طریقہ کوئی قدر نہیں رکھتا۔

۱۲۷ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوتوں کی ایک بڑی تعداد کو اُس کام کے محسوب کرنے میں جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے ترک کیا جا سکتا ہے اور موہوم کام کے اُصول میں جس میں یہ بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی نظام توازن میں ہو تو کسی چھوٹے ہٹاؤ میں کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہوتی ہے صرف اس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت ہے جو بیرونی قوتوں کے خلاف تکمیل پاتا ہے اور اس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں جو اُستوار اجسام کے اعمال اور تعاملات کے خلاف انجام پائے۔

۱۲۸ — **چرخیوں کے نظام** — موہوم کام کے اُصول کا ایک اہم

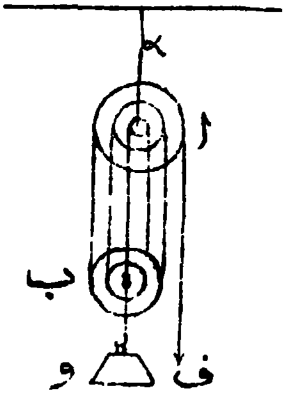
اطلاق حسب ذیل ہے: فرض کرو کہ چرخیوں اور نا امتداد پذیر رسیوں کی ایک ترتیب ہے جس میں رسیوں کے دو سرے آزاد ہیں۔ ان میں سے ایک سرا اس وزن سے بندھا ہے جس کو اٹھانا مقصود ہے اور دوسرے سرے پر طاقت لگائی جاتی ہے۔ فرض کرو کہ رسی کے ان دو آزاد سروں کو علی الترتیب (۱۵۸)
وزن سرا اور طاقت سرا کہا گیا ہے اور فرض کرو کہ چرخیوں اور رسیوں کا یہ نظام ایسا ہے کہ وزن سرے کو ایک انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینے کے لئے طاقت سرے کو ن انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینا پڑتا ہے۔ فرض کرو کہ وزن سرے سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور فرض کرو کہ یہ معلوم ہوا ہے کہ طاقت سرے پر قوت ف لگانے سے توازن پیدا ہوتا ہے۔

اب ہمارے پاس دو قوتیں ف اور و توازن میں ہیں ان میں رشتہ معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ ہم اس نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم وزن و کو فاصلہ فرس تک حرکت دیتے ہیں اب اگر رسی میں توسیع واقع نہ ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا چاہئے کہ طاقت سرے ف نے فاصلہ ن فرس طے کیا ہے۔ بیرونی قوت نے جو کام کیا ہے وہ صرف اس کام پر مشتمل ہے جو رسی کے طاقت سرے پر انجام پایا ہے اور یہ کام ف ن فرس کے مساوی ہے۔ جاذبہ کے خلاف وزن کو حرکت دینے میں جو کام ہوا ہے وہ و فرس ہے۔ یہ کام مختلف العلامت ہیں اگر ہم وزن اٹھائیں تو و فرس کو مثبت لینا چاہئے اور ف ن فرس کو منفی، اور اس کے بالعکس۔ اگر نظام ابتداً توازن میں تھا تو اس چھوٹے ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے جو کام مجموعی طور پر انجام دیا ہے وہ معدوم ہونا چاہئے، اس لئے توازن کی مساوات ہے

و فرس - ف ن فرس = ۰

اس لیے $ف = \frac{و}{ن}$

جس سے طاقت اور وزن کے درمیان رشتہ معلوم ہوتا ہے۔



شکل (۹۱)

اس تحقیق میں ہم نے رگڑ وغیرہ کو نظر انداز کیا ہے اور نیز متحرک رسیوں اور چرخیوں کے اوزان کو بھی نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

چرخیوں کے نظام کی ایک مثال کے طور پر اس ترتیب پر غور کرو جو شکل (۹۱) میں دکھائی گئی ہے۔ اس میں چرخیوں کے دو قالب ا اور ب ہیں۔ اول الذکر ثابت ہے اور دوسرا جس سے وزن و لٹکایا گیا ہے حرکت پذیر ہے۔ رسی، طاقت سرے سے نکلتی ہے اور قالب ا کی ایک چرخی پر سے گذرتی ہے اور پھر قالب ب کی ایک چرخی سے گذرتی ہے اور علیٰ ہذا جتنی بھی چرخیاں ہوں ان پر سے ہو کر گذرتی جاتی ہے اور آخر میں اس کے دوسرے سرے کو قالب ب سے باندھ دیا جاتا ہے۔ ف اور و کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف عدد ن معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ فرض کرو کہ رسی کے آزاد طاقت سرے کے علاوہ رسی کے انتصابی حصوں کی
(۱۵۹) تعداد س ہے۔ اب اگر ہم طاقت سرے کو اسقدر کھینچیں کہ وزن سرا ایک انچ اوپر اٹھے تو ان س حصوں میں سے ہر حصہ بقدر ایک انچ کے چھوٹا ہو جائے گا اور اس لیے طاقت سرا بقدر س انچ کے لمبا ہو گا۔ اس لیے ن = س اور اس صورت میں ف = $\frac{و}{س}$ ۔

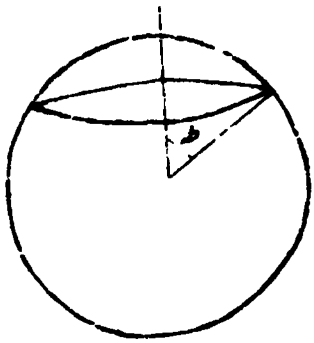
مثلاً نچلے قالب میں دو چرخیاں اور اوپر کے قالب میں تین چرخیاں ہوں تو ن کی قیمت ۵ ہو گی اور اس لیے طاقت کا ہر پونڈ وزن کے ۵ پونڈ سہاریگا چنانچہ کوئی شخص اگر طاقت سرے کو ۱۰۰ پونڈ کی قوت سے کھینچے تو وہ ۵۰۰ پونڈ کے وزن کو سہار سکے گا اور جوں ہی اس کی کھینچنے کی قوت ۱۰۰ پونڈ سے بڑھ جائیگی

وہ ۵۰۰ پونڈ کا وزن اٹھانے لگے گا۔

توضیحی امثلہ

ا۔ موہوم کام کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ فطری طول ل کی ایک بے سرا لچکدار ڈوری ہے جس کی لچک کا مقیاس لہ ہے اور جو نصف قطر ب کے ایک کرہ پر رکھی گئی ہے اور جاذبہ کے تحت تنا ؤ ت میں آزاد ہے۔

توازن کے محل میں توسیع کی مقدار بلا تبہ قوتوں کو تحلیل کرنے سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ لیکن سہ سے آسانی کے ساتھ موہوم کام کے طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ توازن میں ڈوری زاوی نصف قطر طہ کے ایک چھوٹے دائرہ پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے مس میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس سے ڈوری کا ہر عنصر کرہ کی سطح پر نیچے کی جانب ہٹتا ہے چنانچہ ڈوری اب زاوی نصف قطر طہ + فرطہ کا ایک نیا چھوٹا دائرہ بناتی ہے۔ ڈوری کا طول جبکہ وہ زاویہ طہ کا دائرہ بناتی تھی ۲π ب جیب طہ تھا اس میں اضافہ جبکہ طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو گیا فرطہ $\frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}}$(۲π ب جیب طہ) یا ۲π ب جم طہ فرطہ ہے۔ ڈوری کو اسقدر وسیع کرنے میں جو کام ہوا وہ ت × ۲π ب جم طہ فرطہ ہے



شکل (۹۲)

جہاں ت تناؤ ہے۔ کام، جاذبہ کی قوت کے خلاف (یا اس مخصوص صورت میں جاذبہ کی قوت کی سمت میں) بھی انجام پایا ہے۔ ڈوری کے مرکز ثقل کا ارتفاع جبکہ وہ زاویہ طہ کا دائرہ بناتی تھی ب جم طہ ہے اور طہ کے طہ + فرطہ میں بدل جانے سے مرکز ثقل کے ارتفاع میں - ب جیب طہ فرطہ کا اضافہ ہوتا ہے اور اس لیے جاذبہ کے خلاف کئے ہوئے کام کی مقدار - و ب جیب طہ فرطہ

ہے۔ اس طرح ہم نے چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پائے ہوئے کل کام کو محسوب کرلیا ہے ۔ موہوم کام کے اصول کی رو سے اِس کام کی مجموعی مقدار صفر ہونی چاہئے اور اسلیے

- و ب جب طہ فرطہ + ت × ۲π ب جم طہ فرطہ = ۰

یعنے ت = و / ۲π ۰ مس طہ

اور تناؤ ت کے جواب میں ڈوری کا طول ہے

ل (۱ + ت / لہ)

اس لیے ل (۱ + و / ۲π لہ مس طہ) = ۲π ب جب طہ

اس مساوات سے طہ حاصل ہوتا ہے۔

(۱۶۰) ۲۔ **سائیکل کی گیرائی** ۔ دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک سئیکل کی میکانیت پر موہوم کام کا اصول استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ کرنیک کا طول ا ہے اور فرض کرو کہ سائیکل کی گیرائی ب انچ ہے چنانچہ رکابوں (Pedals) کی ہر گردش سے سیکل اتنے آگے حرکت کرتی ہے جتنی وہ قطر ب انچ کے پہیہ کی ایک گردش میں حرکت کرتی۔ فرض کرو کہ ہمیں وہ دباؤ معلوم کرنا ہے جو سیکل سوار ایک رکاب پر ڈالتا ہے تاکہ سیکل رگڑ کی د پونڈ وزن کی مزاحم قوت کے خلاف حرکت کرسکے۔

فرض کرو کہ سیکل میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس میں کرنیک ایک صغیر زاویہ صہ میں سے گھومتے ہیں اور پہیے اور سیکل بھی اس کے ساتھ آگے حرکت کرتے ہیں۔ چونکہ گیرائی ب انچ ہے اِس لیے سیکل بہ حیثیت مجموعی ½ ب صہ انچ حرکت کرے گی اور رکاب کا طے شدہ فاصلہ خود سیکل کو حوالہ کا فریم لینے سے ا صہ ہوگا۔ فرض کرو کہ وہ قوت و پونڈ وزن ہی ہے جو رکاب لگائی جاتی ہے تاکہ سیکل عین حرکت کرنے کو ہو۔ اس لئے سیکل رکاب پر عمل

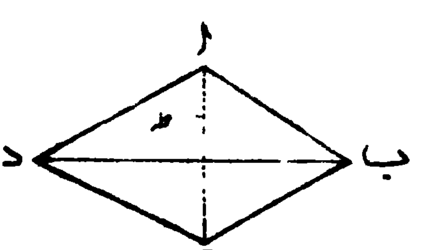
...نے والی اِس قوت اور و پونڈ کی مخالف قوت (جو رگڑ کی وجہ سے ہے) کے
...ے تحت توازن میں ہے۔ اِس لیے توازن کی مساوات ہے

$$\text{قَ} \times \text{ا صہ} - \text{و} \times \tfrac{1}{2}\, \text{ب صہ} = 0$$

اِس لئے مطلوبہ قوت ہے $\quad \text{قَ} = \dfrac{\text{ب}}{2\,\text{ا}}\,\text{و}$

اِس طرح یہ قوت سیکل کی گیرائی کے راست متناسب اور کرینک کے ...ول کے بالعکس متناسب ہے۔

۲۔ وزن و اور طول ا کے چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ ...ڑ کر ایک مُعین ا ب ج د بنایا گیا ہے۔ یہ قالب ایک ...قی میز پر اِستادہ ہے اِس طور پر کہ ج ا انتصابی ہے اور نقطوں ب ' د کو ایک ہلکی نا امتداد پذیر ڈوری سے جس کا طول ا ہے ...ایا گیا ہے تاکہ ڈنڈوں کی شکل برقرار رہے۔ اِس ڈوری کا ...ناؤ معلوم کرنا مقصود ہے۔



شکل (۹۴)

موہوم کام کے اصول سے ...ناؤ معلوم کرنے کے لیے بلا شُبہ ...یک ایسا چھوٹا ہٹاؤ معلوم ہونا چاہئے ...تناؤ کے خلاف کام انجام پائے ورنہ ...ناؤ مساواتوں میں بالکل شریک ہی نہ ہوگا۔ چونکہ ڈوری نا امتداد پذیر ...ہے اِس لئے فی الواقعی اِس کو وسیع کرنا ...ممکن ہے اور اِس لئے اِس کے تناؤ کے خلاف کام کا حاصل ہونا ممکن نہیں ہے۔ ...یکن ہم اِس کی نا امتداد پذیری کے باوجود اس کو وسیع شدہ خیال کر سکتے ہیں یا

ہم یہ کرسکتے ہیں کہ اس کی بجائے اسی طول اور اسی تناؤ کی ایک امتداد پذیر ڈوری رکھی ہوئی سمجھیں، صریحاً اس میں اور اول الذکر صورت میں کوئی فرق نہیں ہے۔

فرض کرو کہ قالب بں ایسا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے کہ ا، ج کی جانب نیچے وار انتصاباً حرکت کرتا ہے اور ج ساکن رہتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ ہٹاؤ ایسا ہے کہ زاویہ د ا ج، طہ سے طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ زاویہ طہ کے جواب میں ڈوری کا طول ل مساوات

ل = ۲ ا جب طہ

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو تفرق کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

فرل = ۲ ا جم طہ فرطہ

(۱۶۱) جس سے ل اور طہ کے اضافوں فرل، فرطہ کے درمیان ایک رشتہ ملتا ہے۔
اس ہٹاؤ میں ڈوری کے تناؤ (ت) کے خلاف جو کام ہوا وہ ت فرل ہے۔
کل شکل کے مرکز ثقل کا ارتفاع (ابتداً) ج کے اوپر ½ ا ج ہے یا ا جم طہ اور اس لئے حسب دفعہ ۱۲۰ جاذبہ کے خلاف جو کام ہوا وہ

۴ و فر (ا جم طہ)

ہے۔ اس لئے اس ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے مجموعی طور پر جو کام انجام دیا وہ

۴ و فر (ا جم طہ) + ت فرل

ہے یعنے فرل اور فر (ا جم طہ) کی قیمتیں درج کرنے سے کل کام جو ہوا وہ

-۴ و ا جب طہ فرطہ + ت × ۲ ا جم طہ فرطہ

ہے۔ توازن کے لئے اس کو معدوم ہونا چاہئے، اسلئے

ت = ۲ و مس طہ

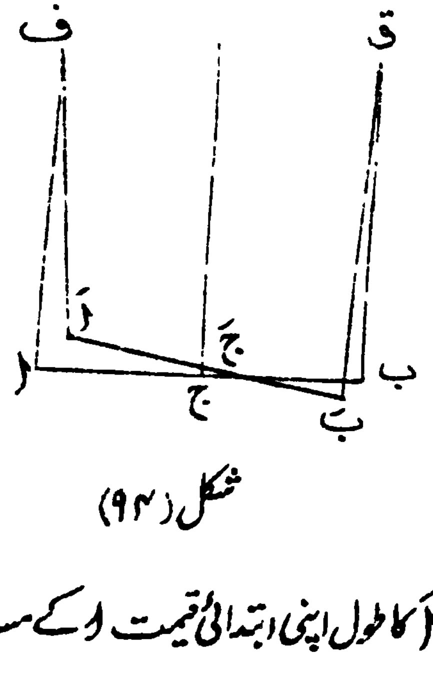
جو مطلوبہ تناؤ ہے۔

۴۔ طول ل اور وزن و کے ایک ڈنڈے کے سروں سے دو رسیاں جن میں سے ہر ایک کا طول ا ہے باندھی گئی ہیں اور ڈنڈے کو ان رسیوں کے ذریعہ دو نقطوں ف، ق سے جو ایک ہی

تفاع پر ہیں اور جن کے درمیان فاصلہ ل ہے لٹکایا گیا ہے
ہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈے کو ایسے محل میں رکھنے کے لئے
طلوب ہے جو اِس کے توازن کے محل سے زاویہ ط بنائے ۔

توازن کی حالت میں رسیاں انتصابی رہتی ہیں اور ڈنڈے کے سِرے
، ب، نقطوں ف، ق کے ٹھیک انتصاباً نیچے رہتے ہیں ۔

جب ڈنڈے کو اِس کے توازن کے محل سے گھمایا جاتا ہے تو ہم یہ خیال
رسکتے ہیں کہ اس کا وسطی نقطہ بتدریج
ں انتصابی خط پر چڑھتا ہے جو اسکے
بتدائی محل کے وسطی نقطہ میں سے
ذرتا ہے ۔ جب ڈنڈا کسی زاویہ ط
یں سے گھوم جائے تو فرض کرو کہ
یہ نقطہ جس بلندی تک چڑھا ہے وہ
لا ہے ۔



شکل (۹۴)

طول ف اَ کا ظِل انتصابی خط پر
ـ لا ہوگا اور ف اَ کا ظِل افقی خط پر اوَ
ے افقی ظِل کے مساوی ہونے کی وجہ
سے، صریحاً ل جب $\frac{\text{ط}}{2}$ ہوگا ۔

اب چونکہ ہٹی ہوئی رسی ف اَ کا طول اپنی ابتدائی قیمت ا کے مساوی
رہتا ہے اِس لئے

$$\text{اَ}^2 = (\text{ا} - \text{لا})^2 + \text{ل}^2\,\text{جب}^2\,\frac{\text{ط}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

اب وہ جفت معلوم کرنے کے لئے جو ڈنڈے کو زاویہ ط پر رکھتا ہے فرض
کرو کہ ڈنڈا اِس محل میں جفت گ کے زیر عمل ہے اور ایک چھوٹا ہٹاؤ
واقع ہوتا ہے جس میں ط بدل کر ط + فرط ہو جاتا ہے ۔ جفت کے خلاف
جو کام ہوا وہ حسب دفعہ ۱۲۱، ـ گ فرط کے مساوی ہے جہاں منفی علامت

اِس وجہ سے لی گئی ہے کہ جفت حرکت میں مزاحم ہونے کی بجائے اِس کی مدد کرتا ہے۔ جاذبہ کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ و فرلا ہے۔ اِس لئے توازن کی مساوات ہے

$$-\text{گ فرطہ} + \text{و فرلا} = 0$$

(۱) فرلا اور فرطہ کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات (۱) کو تفرق کر کے حاصل کرتے ہیں

$$-2(\text{ا} - \text{لا})\,\text{فرلا} + \text{ل}^2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{فرطہ} = 0$$

اِس لئے

$$\text{گ} = \text{و}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}}$$

$$= \frac{\text{و ل}^2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2}}{2(\text{ا} - \text{لا})}$$

$$= \frac{\text{و ل}^2\,\text{جب ط}}{4\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ل}^2\,\text{جب}^2\,\frac{\text{ط}}{2}}}$$

جس سے مطلوبہ جفت معلوم ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ حرکت پذیر قبضوں کے ذریعہ جوڑ کر ایک مربع ا ب ج د بنایا گیا ہے۔ نقطوں ا اور ج کو ایک لچکدار ڈوری سے جس کا طبعی طول مربع کے ایک وتر کے مساوی ہے اور جس کا مقیاس لہ ہے ملایا گیا ہے۔ نقطوں ب اور د پر کتنی قوتیں لگانی چاہئیں کہ ڈوری تن کر اپنے طول کا $1\frac{1}{2}$ گنا ہو جائے۔

۲۔ نصف قطر ا اور وزن و کے تین مساوی کُروں کو ایک نقطہ ف سے طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی لچکدار ڈوریوں کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ کُرے آزادانہ لٹک رہے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ف کے نیچے اِن کے مرکزوں کی گہرائی معلوم کرو۔

۳ — ایک جاپانی چھتری کی میکانیت جس سے چھتری کھلتی ہے ایسی ہے کہ
پھسلنے والے جزو کو وسطی لکڑی پر چڑھایا جاتا ہے تو چڑھاؤ کے ہر انچ کے جواب
چھتری کی ہر کاڑی ۵° کے زاویہ میں سے گردش کرتی ہے۔ اگر چھتری میں ۱۸
یاں ہوں جن میں سے ہر ایک کا وزن ½ اونس ہو اور ان کے مراکز ثقل سہارے
۱۰ انچ کے فاصلہ پر ہوں تو معلوم کرو کہ پھسلنے والے جزو کو کس قوت سے اوپر
نا چاہیئے کہ چھتری کھل جائے جبکہ وسطی لکڑی انتصابی رہے اور کاڑیاں اس کے
ہ ۳۰° کا زاویہ بنائیں۔

۴ — ایک گھڑی کی سوئیوں کو اوزان معادلہ کے ذریعہ متوازن کیا گیا ہے تاکہ
ی محل میں توازن کی حالت میں رہ سکیں۔ جب گھڑی میں وقت ۱۰ ار ۵ ہوتا ہے
ب پرندہ جس کا وزن و ہے منٹ کی سوئی پر اس کے ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ
رے سے ۲ فٹ ہے آکر لٹکتا ہے۔ گھنٹہ کی سوئی پر کتنی بڑی انتصابی دھکیل
ت سہارے سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر لگانی چاہیئے کہ توازن برقرار ہو۔

۵ — ایک گھڑی کو کوک دینے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ اس کام کے مساوی
جو ۲۰ پونڈ کے ایک وزن کو ۳ فٹ انتصاباً اوپر اٹھانے میں کرنا پڑتا ہے اور
ب دینے کے بعد گھڑی ۳۰ گھنٹوں تک چلتی ہے۔ گھڑی کا رقاص اور حرکت پ
ر رکھنے والا پرزہ جدا کر لئے گئے ہیں جس کی وجہ سے گھڑی کی سوئیاں بسرعت
گھومنے لگیں گی اگر انہیں مضبوط نہ پکڑ لیا جائے۔ منٹ کی سوئی پر کتنا بڑا جفت
ا چاہیئے کہ یہ وقوع پذیر نہ ہونے پائے۔

۶ — ریل کے دو ڈبوں کو جوڑنے کے لیے یہ انتظام ہے کہ ان کے درمیان ایک
ا ہوتا ہے جس کے مخالف سروں پر راست دستی اور چپ دستی پیچ کٹے ہوئے
تے ہیں اور ڈنڈا ڈبوں میں پیوست کردہ ڈھبریوں کے اندر گھوم سکتا ہے۔
ر پیچ کی گہرائی ایک انچ ہو اور ڈنڈے کو ۵۶ پونڈ کی ایک ایسی قوت سے
یا جائے جو ۱۵ انچ لمبے بیرم کے سرے پر پورے فائدہ کے ساتھ عمل میں
گئی ہے تو وہ قوت معلوم کرو جس سے ڈبے ایک دوسرے کی جانب
نچتے ہیں۔

توانائی بالقوہ

۱۲۹۔ یہ معلوم ہو چکا ہو گا کہ ہمیں کام کی دو قسموں سے واسطہ رہتا ہے۔ ایک قسم وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو جاذبہ ارض کے خلاف انجام پاتا ہے اور دوسری وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو ایک ٹرینا کو ہموار سڑک پر کھینچنے میں رگڑ کے خلاف ہوتا ہے۔ اِن دو قسموں کے درمیان اصلی فرق یہ ہے کہ قسم اول کا کام اجسام کے نظام سے خود ان اجسام سے جیلی کام لیکر واپس وصول کیا جا سکتا ہے لیکن دوسری قسم کا کام جب ایک دفعہ صرف ہو چکتا ہے تو پھر کبھی حاصل نہیں ہو سکتا۔ وزن اٹھانے میں کام صرف کرنے کی بجائے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہم کام کو بطور ذخیرہ جسم میں جمع کر رہے ہیں کیونکہ وزن کو اٹھانے میں جو کام انجام پایا ہے اس کو کسی وقت بھی وزن سے واپس وصول کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ اگر ہم وزن و کو فاصلہ ف میں سے اٹھائیں تو وزن پر جو کام ہوا ہے وہ و ف ہے، اب اگر اس کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہونے کے لئے چھوڑ دیں تو وہ ہمارے لئے جو کام کرے گا وہ و ف ہوگا، اس لئے وزن پر کل کام جو انجام پایا وہ صفر کے مساوی ہے۔

برخلاف اِس کے کسی کمیت کو رگڑ کی قوت ف کے خلاف فاصلہ س تک کھینچنے میں جو کام انجام پاتا ہے وہ ف س ہے۔ اِس کمیت کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس لانے کے لیے جو کام کرنا پڑتا ہے اُس کی مقدار بھی ف س ہے اور اس لئے کل کام جو انجام پایا ۲ ف س ہے۔ اِس سے اُس فرق کی توضیح ہوتی ہے جو کام کی اِن دو قسموں میں اور قوتوں کے اُن دو نظامات میں ہے جن کے خلاف کام انجام پاتا ہے۔

۱۳۰۔ **تعریف**۔ جب اجسام کے کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتیں اِس نوعیت کی ہوں کہ وہ کل کام (جبری طور پر محسوب کردہ

جو ہٹاؤں کے کسی سلسلے میں سے نظام کو اپنے ابتدائی تشکیل پر واپس لانے میں انجام پاتا ہے صفر ہو تو قوتوں کے ایسے نظام کو تحفظی نظام کہتے ہیں۔

چونکہ کام کا جبری مجموعہ صفر ہے اس لئے نظام کو کسی تشکیل پر لیجانے میں جو کام ہوتا ہے وہ اُس کام کے مساوی لیکن علامت میں مختلف ہوتا ہے جو نظام کو اپنی ابتدائی تشکیل پر واپس ہونے کے لیے چھوڑ دینے میں انجام پاتا ہے۔ اِس لئے کام گویا نظام میں بطور ذخیرہ جمع رہتا ہے یعنی ضائع نہیں ہوتا۔

(۱۶۴) تھوڑے سے غور سے معلوم ہو گا کہ قوتوں کا کوئی نظام تحفظی ہو گا اگر صرف وہ قوتیں جو ذیل میں درج ہیں ایک یا زیادہ عمل کر رہی ہوں :-

(ا) جاذبہ ارض،

(ب) تعاملات جن میں تماس کامل طور پر چکنا ہو،

(ج) ڈوریوں کے تناؤ خواہ ڈوریاں امتداد پذیر ہوں یا نا امتداد پذیر۔

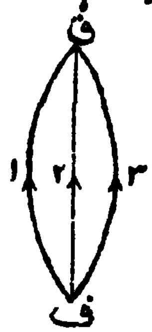
برخلاف اس کے اگر حسب ذیل نمونوں کی قوتیں ایک یا زیادہ عمل کر رہی ہوں (اِس طور پر کہ اِن کے خلاف کام انجام پائے) تو قوتوں کا نظام غیر تحفظی ہو گا :-

(ا) تعاملات جن میں تماس کھُردرا ہو،

(ب) ہوا کی مزاحمت۔

۱۳۱۔ مسئلہ۔ اگر اجسام کے ایک نظام پر تحفظی قوتیں عمل کریں اور اِن قوتوں کے خلاف اِس نظام کو ایک تشکیل ف سے دوسری تشکیل ق تک حرکت دی جائے تو نظام پر جو کام ہوتا ہے وہ اُن تشکیلوں پر منحصر نہیں ہوتا جن میں سے نظام

ف سے ق تک گذرنے میں حرکت کرتا ہے۔



شکل (۹۵)

اِس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ تشکیلوں کے ایک سلسلہ میں سے حرکت کرتے ہوئے ف تا ق گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ $ک_{۱}$ سے تعبیر کیا گیا ہے، کسی دوسرے سلسلے میں سے گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ $ک_{۲}$ سے تعبیر کیا گیا ہے اور کسی تیسرے سلسلہ میں سے گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ $ک_{۳}$ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اگر ہم ف سے ق تک پہلے سلسلہ کے ذریعہ گذریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلہ کے ذریعہ واپس ہوں تو کُل کام جو انجام پایا صفر ہے اور اِس لئے

$$ک_{۱} + ک_{۳} = ۰$$

نیز اسی طرح اگر ہم ف سے ق تک دوسرے سلسلہ کے ذریعہ گذریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلہ کے ذریعہ واپس ہوں تو

$$ک_{۲} + ک_{۳} = ۰$$

اِس لئے $ک_{۱} = ک_{۲}$ جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۳۲۔ تعریف۔ اگر کسی تشکیل ف کو معیار کے طور پر لیا جائے تو اجسام کے کسی نظام کو تشکیل ف سے تشکیل ق تک حرکت دینے میں جو کام انجام پاتا ہے اِس کو تشکیل ق کی توانائی بالقوہ کہتے ہیں۔

اِس لئے توانائی بالقوہ اُس کام کی پیمائش کرتی ہے جو نظام کو تشکیل (۱۴۵)
ق میں لا کر رکھنے میں جمع ہوا ہے۔

مسئلہ۔ کسی نظام کو تشکیل (۱) سے تحفظی قوتوں کے خلاف تشکیل (۲) تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ $ک_{۲} - ک_{۱}$ ہے جہاں $ک_{۱}$ تشکیل (۱) کی توانائی بالقوہ اور $ک_{۲}$ تشکیل (۲) کی توانائی بالقوہ ہے۔

کیونکہ اگر ف معیاری تشکیل ہے تو ف تا (۱) جو کام ہوا وہ $ک_{۱}$ ہے ف تا (۱) جمع (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ $ک_{۲}$ ہے، اس لئے (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ $ک_{۲} - ک_{۱}$ ہے

۲۳۱ مسئلہ۔ اگر اجسام کا ایک نظام، توانائی بالقوہ ک کی تشکیل میں ہو اور اگر کسی ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہوں تو ذرہ پر عمل کرنے والی حاصل قوت کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہوتے ہیں:

$$-\frac{جف\,ک}{جف\,لا}\;،\quad -\frac{جف\,ک}{جف\,ما}\;،\quad -\frac{جف\,ک}{جف\,ی}$$

اِس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس کی وجہ سے لا، ما، ی پر کا ذرہ محور لا کے متوازی فاصلہ فرلا تک حرکت کرتا ہے۔ اگر اِس ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو ہٹاؤ میں جو کام ہوا ہے وہ حسب دفعہ ۱۱۸، لا فرلا کے مساوی ہے۔ یہ کام توانائی بالقوہ کے اضافے کے مساوی بھی ہے یعنی $\frac{جف\,ک}{جف\,لا}$ فرلا کے، اِس لئے

$$لا\,فرلا = -\frac{جف\,ک}{جف\,لا}\,فرلا$$

اس لئے $لا = -\frac{جف\,ک}{جف\,لا}$ اور اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$ما = -\frac{جف\ ک}{جف\ ما} ،\ ی = -\frac{جف\ ک}{جف\ ی}$$

۱۳۴ – مسئلہ – اگر اجسام کا ایک نظام، توانائی بالقوہ ک کی تشکیل میں ہو اور اگر طہ وہ زاویہ ہو جس سے نظام کے ایک استوار جسم کا محل کسی خط کے گرد حاصل ہوتا ہے تو استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اِس خط کے گرد (جبکہ اُس کو مثبت شمار کیا گیا ہو اگر گردش کا میلان طہ کی بڑھتی ہوئی سمت میں ہے) حسب ذیل ہے:

$$-\frac{جف\ ک}{جف\ طہ}$$

(۱۶۶) کیونکہ فرض کرو کہ ہم جسم میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں جس کی وجہ سے زیرِ بحث جسم منتخبہ خط کے گرد مزید زاویہ فرطہ میں سے گھوم جاتا ہے اور اس لئے طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ توانائی بالقوہ کا اضافہ $\frac{جف\ ک}{جف\ طہ}$ فرطہ ہے اور کام جو انجام پایا وہ دفعہ ۱۲۱ کے مسئلہ کی رُو سے – گ فرطہ کے مساوی ہے جہاں گ، محور کے گرد اُن سب قوتوں کا معیار ہے جو جسم پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے

$$\frac{جف\ ک}{جف\ طہ}\ فرطہ = -\ گ\ فرطہ$$

اس لئے $$گ = -\frac{جف\ ک}{جف\ طہ}$$

جو مطلوبہ نتیجہ ہے –

۱۳۵ – مسئلہ – اگر اجسام کا کوئی نظام توازن کے محل میں ہے تو توانائی بالقوہ ک، یا تو اعظم ہوگی یا اقل –

توانائی بالقوہ اُن تمام ذروں کے محددوں کا تفاعل ہے جن سے اجسام کا نظام ترکیب یافتہ ہے۔ فرض کرو کہ اِن ذروں کے محدد حسب ذیل ہیں :

لا_1، ما_1، ی_1؛ لا_2، ما_2، ی_2؛ وغیرہ

اگر نظام توازن کی محل میں ہے تو ہر ذرہ توازن میں ہے اور اسلئے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی حسب دفعہ ۳۲ جداگانہ معدوم ہوتے ہیں۔ اس کے لئے حسب دفعہ ۱۳۳ شرط ہے

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1} = 0\text{،}\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1} = 0\text{،}\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1} = 0\text{؛}$$

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_2} = 0\text{، وغیرہ}$$

لیکن یہ ٹھیک وہی شرطیں ہیں جن کے پورا ہونے پر ک اعظم ہوتا ہے یا اقل۔

۱۲۶ — اِس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے۔

مسئلہ۔ اگر اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالقوہ کسی تشکیل میں اعظم یا اقل ہو تو یہ تشکیل توازن کی ہوگی۔

کیونکہ دفعہ گذشتہ کی ترقیم اختیار کی جائے اور اگر ک اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1} = 0\text{،}\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1} = 0\text{،}\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1} = 0$$

چونکہ $-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1}$، $-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1}$، $-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1}$، اُس قوت کے (۱۶۷)

اجزائے ترکیبی ہیں جو ذرہ (۱) پر عمل کرتی ہے اس لیے اوپر کی مساواتوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ذرہ توازن میں ہے۔ اسی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دوسرے ذرے بھی توازن میں ہیں چنانچہ مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۱۲۷ — اِن مسئلوں کی ایک خاص اہم صورت اُس وقت پیدا ہوتی ہے

جبکہ کسی ہٹاؤ میں کام انجام دینے والی قوتیں صرف اُن اجسام کے اوزان ہوں جن سے نظام ترکیب یافتہ ہے۔ اگر کُل نظام کی کمیت ک ہو اور کسی معیاری افقی مستوی کے اوپر اس کے مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہو تو توانائی بالقوہ حسب دفعہ ۱۳۱ لیے ک ج ف ہوگی اور وہ اعظم یا اقل ہوگی بموجب اس کے کہ ف اعظم یا اقل ہو۔ اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر اجسام کے کسی نظام میں وہ قوتیں جو ہٹاؤ میں کام انجام دیتی ہیں صرف جاذبہ کی قوتیں ہوں تو اس نظام کے توازن کی تشکیلات وہ ہوں گی جنمیں مرکز ثقل کا ارتفاع اعظم یا اقل ہوگا۔

مثالیں

۱۔ دو یکساں ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ل ہے سروں پر آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ ان کو نصف قطر ا کے ایک چکنے اسطوانے پر رکھا گیا ہے جس کا محور افقی ہے۔ وہ زاویہ معلوم کرو جو ڈنڈے افق سے بناتے ہیں جبکہ وہ توازن میں ہوں۔

۲۔ ایک ناقصی قرص کو اس طور پر وزنی بنایا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل اس کے مرکز اور اس کے محور اعظم کے ایک سرے کے درمیان وسط میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کا خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ سے بڑا ہو تو توازن کے چار محل ہوں گے جن میں قرص ایک افقی مستوی پر انتصاباً کھڑا ہوگا لیکن اگر خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ سے بڑا نہ ہو تو توازن کے صرف دو محل ہوں گے۔

۳۔ وزن و کا ایک ڈنڈا افقی ہے۔ اس کو مرکز ثقل تک ایک ثابت انتصابی پیچ سے جس کے گرد وہ گردش کرتا ہے، چھیدا گیا ہے۔ ایک گردش سے ڈنڈا بقدر $\frac{1}{2}$ انچ کے اوپر اٹھتا یا نیچے اترتا ہے۔ اگر رگڑ نہ ہو تو وہ جفت معلوم کرو جو اس کو ساکن رکھنے کے لیے مطلوب ہے۔

۴۔ وزن و کا ایک ڈاٹ مخروط مضلع کی شکل کا ہے جس کی عمودی تراش

مربع ہے۔ اِس کو ضلع ج کے ایک مربع سوراخ میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس محل میں اس کے راس کی گہرائی تماس کے مستوی کے نیچے گ ہے ۔ وہ جفت معلوم کرو جو اِس کو زاویہ ط میں سے گھما ہوا رکھنے کے لیے مطلوب ہے دراں حالیکہ اس کا محور انتصابی ہی رہے ۔

۵ ۔ ایک چکنے مکانی تار کو انتصابی محور کے ساتھ رکھا گیا ہے ۔ اس میں دو منکے پروئے گئے ہیں جن کو ایک ڈوری مربوط کرتی ہے جو ماسکہ پر کے ایک حلقہ میں سے گذرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن کے محلوں کی تعداد لامتناہی ہے ۔

۶ ۔ ایک چکنا پیالہ ناقص نما کی شکل کا ہے ۔ اِس کے نیم محور ا، ب ، ج ہیں اور ایک محور انتصابی ہے ۔ وہ جفت معلوم کرو جو طول ل کے ایک ڈنڈے کو پیالے کے اندر افقی محل میں رکھنے کے لیے جو توازن کے محل سے زاویہ ط بنائے مطلوب ہے ۔

توانائی بالحرکت

(۱۶۸)

۱۳۸ ۔ فرض کرو کہ ایک متحرک ذرہ پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کی سمت ذرہ کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے ۔ اِس قوت کا اثر حرکت کے دوسرے قانون کی بموجب یہ ہوگا کہ ذرہ کی رفتار میں ابطا پیدا ہوگا ۔ ذرہ کی رفتار گھٹتی جائے گی جب تک کہ قوت عمل کرے گی اور اگر قوت کافی وقت تک عمل کرنا جاری رکھے تو ذرہ کو آخرالامر ساکن ہو جانا چاہئے ۔

مثلاً ایک کیلے پر غور کرو جس کو ہتھوڑی سے ایک تختہ میں ٹھونکا جا رہا ہے ہتھوڑی اور کیلے کے درمیان تعامل ایک قوت ہے جس کی سمت ہتھوڑی کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے اور یہ قوت آخرالامر ہتھوڑی کو ساکن کر دیتی ہے ۔ نیز جب کسی ذرہ کو اوپر وار اُچھالا یا پھینکا جاتا ہے تو اس کا وزن کچھ وقفہ کے بعد اِس کو بالآخر ساکن کرتا ہے جس کے بعد وہ زمین پر واپس گرتا ہے ۔

اُس اثناء میں جس میں متحرک جسم قوت کے عمل سے ساکن ہو جاتا ہے قوت کا نقطۂ عمل جو متحرک جسم کے ساتھ حرکت کر چکا ہے کوئی فاصلہ طے کر چکا ہوگا

اِس لیے متحرک جسم نے کچھ کام کیا ہے ۔ پس ہم جسم کی حرکت کے تخیل پر پہنچتے ہیں جس میں کام کرنے کی قابلیت ہے ۔

مثلاً پچھلی مثالوں میں ہتھوڑی کی حرکت نے کیلے کو تختہ میں گاڑ دیا اور ذرہ کی حرکت نے جس کو ہوا میں اچھالا گیا تھا ذرہ کو زمین کی سطح کے اوپر کچھ بلندی تک اٹھایا ۔

۱۲۹ ۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ رفتار و سے حرکت کر رہا ہے اور اس کی حرکت میں ایک قوت ف (مطلق اکائیوں میں) مزاحم ہے جو ذرہ کی حرکت کی سمت کی مخالف سمت میں عمل کر رہی ہے ۔ فرض کرو کہ اِس قوت کے خلاف ذرہ نے فاصلہ فرس وقت فرت میں طے کیا ہے اور فرض کرو کہ اِس وقفہ میں اس کی رفتار و سے بدل کر و ۔ فرو ہو گئی ہے ۔ اب ذرہ اپنی حرکت کی سمت میں $\frac{فرو}{فرت}$ کا ایطاء رکھتا ہے یعنے $\frac{فرو}{فرت}$ کا اسراع اُس سمت میں جس میں قوت ف عمل کر رہی ہے، اِس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے

$$ف = ک \frac{فرو}{فرت}$$

(۱۶۹) اِس لیے ذرہ نے قوت ف کے خلاف فاصلہ فرس طے کرنے میں جو کام کیا ہے وہ حسب ذیل ہے :

$$ف\ فرس = ک \frac{فرو}{فرت}\ فرس$$

یا چونکہ $\frac{فرس}{فرت}$ وہی ہے جو ذرہ کی رفتار ہے اِسلیے

$$ف\ فرس = ک\ و\ فرو$$

تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ کا کل کام ساکن ہونے سے پیشتر حسب ذیل ہے :

$$\int ف\ فرس = \frac{1}{2} ک\ و^2 \quad .... (۳۶)$$

چونکہ قوت ف کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کیا گیا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے (دفعہ ۱۱۱) کہ کام $\frac{1}{2}$ ک و^2 کی پیمائش بھی مطلق اکائیوں میں ہوتی ہے اس لیے اس قوت کی مقدار خواہ کچھ ہی ہو جو ذرہ کی حرکت میں مزاحم ہے ذرہ نے ساکن ہونے سے پیشتر جو کام کیا ہے وہ وہی رہتا ہے یعنے $\frac{1}{2}$ ک و^2 کام کی مطلق اکائیاں۔

مقدار $\frac{1}{2}$ ک و^2 (مطلق اکائیوں میں پیمائش کردہ) کو متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت کہتے ہیں۔ یہ اس کام کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ ساکن ہونے سے پیشتر انجام دیسکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ وہ مزاحمت جو کیلے کو تختہ میں نصب کرنے میں پیش ہوتی ہے ۵۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے یعنی ۵۰۰۰ پونڈ کا وزن کیلے کو تختہ میں دبانے کے لئے مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ اس کو تختہ میں ہتھوڑی سے مار کر گھسایا جاتا ہے فرض کرو کہ ہتھوڑی کا سرا ۱۰ پونڈ وزنی ہے اور اس کی ہر ضرب کیلے پر ۵۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پڑتی ہے۔ فرض کرو کہ ہر ضرب پر کیلا تختہ میں فاصلہ س تک (فٹوں میں پیمائش کردہ) گھستا ہے۔ تب ہتھوڑی نے ہر ضرب پر جو کام انجام دیا ہے وہ اس کام کے مساوی ہے جو ۵۰۰۰ پونڈ وزن ۔ یا ۵۰۰۰ × ج پونڈل ۔ کی ایک قوت کو فاصلہ س میں سے حرکت دینے میں ہوتا ہے ۔ اس لیے یہ کام ۵۰۰۰ فٹ پونڈلوں کے مساوی ہے ۔ ہتھوڑی کی توانائی بالحرکت ہے

$$\frac{1}{2} \text{ ک و}^2 = \frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۵۰^2 = ۱۲۵۰۰،$$

مطلق فٹ پاؤنڈ ثانیہ اکائیوں میں ۔ اس لیے مساوات (۳۶) کی رُو سے

$$۵۰۰۰ \text{ ج س} = ۱۲۵۰۰$$

جس میں چونکہ اکائیاں فٹ پونڈ ثانیہ ہیں اس لیے ج = ۳۲ لیا جا سکتا ہے اور اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{س} = \frac{۲۵}{۳۲۰} \text{ فٹ} = \frac{۱۵}{۱۶} \text{ انچ}$$

۱۷۰ — مسئلہ۔ اگر قوتوں کے کسی نظام کے تحت ایک ذرہ حرکت کرے تو اِس کی حرکت کی اثنا میں توانائی بالحرکت کا اضافہ اُس کُل کام کے مساوی ہوتا ہے جو ذرہ پر بیرونی عوامل کرتے ہیں۔ (۱۷۰)

فرض کرو کہ ہم ایک محل ف سے دوسرے محل ق تک ذرہ کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ اِن نقطوں پر ذرہ کی رفتاریں علی الترتیب $و_{ف}$ اور $و_{ق}$ ہیں۔

فرض کرو کہ ہم اِس راستہ کے کسی عنصر فرس کا امتحان کرتے ہیں اور فرض کرو کہ اِس عنصر کے آغاز اور اختتام پر ذرہ کی رفتاریں و اور و + فرو ہیں۔ فرض کرو کہ ف وہ قوت یا قوت کا جزو ترکیبی ہے جو سمت فرس میں ذرہ پر عمل کرتی ہے جبکہ وہ اپنے راستہ کا عنصر فرس مرتسم کرتا ہے۔ اگر راستہ کے اِس وقفہ کے مرتسم کرنے میں وقت فرت صرف ہو تو اسراع $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ ہے اور چونکہ حرکت کی سمت میں عمل کرنے والی قوت ف ہے اِس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے

$$\text{ف} = \text{ک}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$$

اِس لیے حسب دفعہ ۱۳۹

$$\text{ف فرس} = \text{ک}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\,\text{فرس}$$

$$= \text{ک}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\,\text{فرو}$$

$$= \text{ک و فرو}$$

ف سے ق تک پورے راستہ پر تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{ف}^{ق} ف\, فرس = ک \int_{ف}^{ق} و\, فرو = \frac{1}{2} ک\, و_{ق}^{2} - \frac{1}{2} ک\, و_{ف}^{2} \quad \ldots (۳۷)$$

= توانائی بالحرکت میں اضافہ

اِس مساوات کی دائیں جانب کا جملہ اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو ذرہ پر ہوا ہے اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ ثابت ہو چکا۔

۱۴۱ — بیرونی قوتوں نے ذرہ پر جو کام کیا ہے اُس کو منفی علامت کے ساتھ اُس کام کے مساوی تصور کیا جا سکتا ہے جو ذرہ بیرونی قوتوں پر کرتا ہے کیونکہ اگر ف وہ قوت ہے جو ذرہ پر سمت فرس میں عمل کرتی ہے تو عمل اور تعامل کی مساویت سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ بیرونی عوامل پر ذرہ سے عمل کرنے والی قوت ـ ف ہے اور اس لیے ذرہ نے کل کام ـ ف فرس (۱۷۱ کیا ہے ـ اِس لیے مسئلہ کو حسب ذیل متبادل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے

قوتوں کے کسی نظام کے تحت ذرہ کی حرکت کی اثنا میں توانائی بالحرکت کی تخفیف اُس کل کام کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ بیرونی عوامل کے خلاف انجام دیتا ہے۔

۱۴۲ — اگر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی نظام ہو تو $-\int_{ف}^{ق}$ ف فرس کی یعنے بیرونی عوامل پر ذرہ کے کل کام کی قیمت حسب دفعہ ۱۳۲ $ک_{ق} - ک_{ف}$ کے مساوی ہے ـ پس مساوات (۳۷) ہو جاتی ہے

$$ک_{ق} - ک_{ف} + \frac{1}{2} ک \left(و_{ق}^{2} - و_{ف}^{2} \right) = ۰$$

یا
$$ک_{ق} + \frac{1}{2} ک\, و_{ق}^{2} = ک_{ف} + \frac{1}{2} ک\, و_{ف}^{2} \quad (۳۸)$$

اِس لیے ق پر توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ وہی ہے

جو ان کا ف پر ہے، اور اِس لیے مسئلہ ثابت ہے۔
توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کے مجموعہ کو ذرہ کی کُل توانائی کہتے ہیں۔

توانائی کا بقا

۱۴۳ ــ اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت صریحًا اس کے مختلف ذروں کی توانائیوں بالحرکت کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ نظام کی توانائی بالقوہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں اس کے ذروں کی توانائیوں بالقوہ کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

اِس لیے کسی نظام کی کل توانائی اِس کے مختلف ذروں کی کل توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ چونکہ ہر ذرہ کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نظام کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے۔

اِس واقعہ کو کہ کُل توانائی مستقل رہتی ہے **توانائی کا بقا** کہتے ہیں۔ اُس مساوات کو جو اِس امر کو ظاہر کرے کہ ایک لمحہ پر کی کل توانائی کسی دوسرے لمحہ پر کی کل توانائی کے مساوی ہے **توانائی کی مساوات** کہتے ہیں۔

۱۴۴ ــ مثلاً فرض کرو کہ منجنیق سے ایک پتھر پھینکا جاتا ہے۔

اولاً منجنیق کی لچکدار رسی کے تنانے میں کام انجام پاتا ہے اور یہ کام تنی ہوئی (۱۷۲: رسی کی توانائی بالقوہ کے طور پر جمع ہوتا ہے۔ جب منجنیق کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو رسی کا تناؤ پتھر پر عمل کرتا ہے اور پتھر اس تناؤ کے اسراع پیدا کرنے والے اثر کے تحت حرکت کرتا ہے اور رسی کا تناؤ گھٹتا ہے۔ اِس عمل کے اثناء میں پتھر توانائی بالحرکت حاصل کرتا جاتا ہے اور تنی ہوئی رسی توانائی بالقوہ کھوتی جاتی ہے۔ اوپر ثابت شدہ مسئلہ کی رو سے وہ توانائی بالحرکت جو پتھر حاصل کرتا ہے اُس توانائی بالقوہ کے عین مساوی ہے جو رسی کھوتی ہے۔

جب پتھر منجنیق سے نکلتا ہے تو رسی کی توانائی بالقوہ کا بیشتر حصہ پتھر کی توانائی بالحرکت میں مستحیل ہو جاتا ہے۔ اِس کے بعد پتھر کی حرکت کی اثناء میں توانائی کا ایک اور استحالہ

وقوع پذیر ہو سکتا ہے چنانچہ اگر پتھر اوپر وار حرکت کرتا ہے تو اِس کی توانائی بالقوہ بڑھتی ہے اور اِس لیے اِس کے جواب میں اس کی توانائی بالحرکت گھٹنی چاہیئے ۔ اِس کی چال سُست پڑنی چاہیئے ۔ برخلاف ازیں اگر پتھر نیچے وار حرکت کرتا ہے تو توانائی بالقوہ گھٹیگی اور اِس لیے اِس کی توانائی بالحرکت بڑھے گی ۔ اِس کی رفتار میں اضافہ ہوگا ۔

۱۴۵ ۔ توانائی کے بقا کے اصول سے ایک بہت اہم نتیجہ حسب ذیل حاصل ہوتا ہے :

مسئلہ ۔ اگر ایک ذرہ کسی چکنے منحنی پر پھسلے اور اِس پر سوائے جاذبہ اور منحنی کے تعامل کے کوئی اور قوتیں عمل نہ کریں اور اگر اِس کے راستہ کے دو نقطوں ف، ق پر رفتاریں ع، و ہوں تو

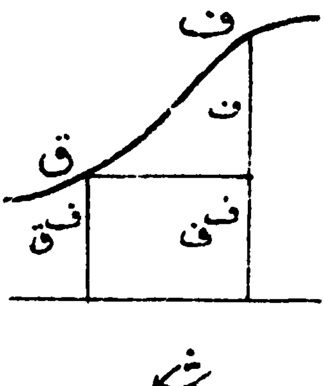
$$\text{و}^{۲} = \text{ع}^{۲} + ۲\,\text{ج}\,\text{ف} \quad \ldots\ldots \quad (۳۹)$$

جہاں ف کے نیچے ق کا انتصابی فاصلہ ف سے تعبیر کیا گیا ہے یعنی راستہ ف ق کا انتصابی ظل ف ہے ۔

فرض کرو کہ کسی افقی مستوی کے اوپر مثلاً زمین کی سطح کے اوپر ف اور ق کے ارتفاع $\text{ف}_{\text{ف}}$، $\text{ف}_{\text{ق}}$ ہیں ۔ جب ذرہ ف پر ہوتا ہے تو اس کی توانائی بالحرکت $\frac{۱}{۲}\text{ک ع}^{۲}$ اور توانائی بالقوہ $\text{ک ج ف}_{\text{ف}}$ ہے ۔ اِس لیے اس کی توانائی

$$\frac{۱}{۲}\text{ک ع}^{۲} + \text{ک ج ف}_{\text{ف}}$$

ہے ۔ اسی طرح ق پر اسکی کل توانائی



شکل (۹۶)

$$\tfrac{1}{2}\,\text{ک}\ \text{و}^{2} + \text{ک ج ف}_{\text{ق}}$$

ہے۔

اب چونکہ عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی ہے اسلیے کل توانائی غیر متغیر رہتی ہے۔ اِس لیے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{ک}\ \text{ع}^{2} + \text{ک ج ف}_{\text{ف}} = \tfrac{1}{2}\,\text{ک}\ \text{و}^{2} + \text{ک ج ف}_{\text{ق}}$$

اِس لیے $\text{و}^{2} - \text{ع}^{2} = ۲\,\text{ج}\,(\text{ف}_{\text{ف}} - \text{ف}_{\text{ق}}) = ۲\,\text{ج ف}$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۱۴۶ **۱۴۶** — دفعہ ۱۴۵ کا مسئلہ صریحاً درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اوپر وار حرکت کر رہا ہو، اِس صورت میں ف منفی ہوگا۔ اسی طرح یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اپنے راستہ کے کچھ حصہ میں اوپر چڑھے اور باقی حصہ میں نیچے اترے۔ مزید برین ذرہ قوتوں کے کسی بقائی نظام کے تحت حرکت کر سکتا ہے صرف اِس شرط کے ساتھ کہ کل توانائی بالقوہ ذرہ کے وزن سے پیدا ہونی چاہئے۔ اِس صورت میں بھی مسئلہ بالا درست رہتا ہے۔

مثلاً یہ مسئلہ درست ہے جبکہ ذرہ ایک ناامتداد پذیر رسی سے بندھا ہو یا خلاء میں آزادانہ حرکت کرے۔

اِس مسئلہ کا استعمال سمجھنے کیلئے فرض کرو کہ ایک سیکل سوار پندرہ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک پہاڑی کی چوٹی پر پہنچتا ہے جس کا ارتفاع ۶۰ فٹ ہے اور ساتھ ہی پہاڑی کے نیچے اترنے لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہاڑی کے دامن میں اس کی رفتار معلوم کرنا چاہتے ہیں اِس مفروضہ کی بناء پر کہ رگڑ، ہوا کی مزاحمت وغیرہ نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

پہاڑی کی چوٹی اور دامن کو نقاط ف اور ق (دیکھو مسئلہ بالا) لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} = ۶۰\ \text{فٹ}$$

$$\text{ع} = ۱۵\ \text{میل فی گھنٹہ} = ۲۲\ \text{فٹ فی ثانیہ}$$

س لیے فٹ ثانیہ اکائیاں استعمال کرنے سے

$$و^2 = و_0^2 + ۲ ج ف = ۲۲^2 + ۲ × ۳۲ × ۶۰$$

$$= ۴۳۲۴$$

اِس لیے و = ۶۶ فٹ فی ثانیہ تقریباً

= ۴۵ میل فی گھنٹہ

اِس طرح سیکل سوار کی رفتار جبکہ رگڑ یا ہوا کی مزاحمت نہ ہو ۴۵ میل فی گھنٹہ ہو گی ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک آٹو موبیل جو ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے ایک ڈھلوان پہاڑی کے پائیں پر پہنچتی ہے اور اُسی آن اس کے انجن کو بند کر دیا جاتا ہے ۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر گاڑی پہاڑی پر کتنے ارتفاع تک پہنچیگی (رگڑ وغیرہ نظر انداز کرو) ۔

۲ ۔ ایک مزدور اینٹوں کو ۱۰ فٹ ارتفاع پر ایک معمار کے پاس پہنچاتا ہے ۔ وہ ان کو اس طرح پھینکتا ہے کہ وہ ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے معمار کے پاس پہنچتی ہیں ۔ مزدور اپنے کام کو کس تناسب میں بچا سکتا ہے اگر وہ اینٹوں کو اس طرح پھینکے کہ وہ معمار کے پاس عین پہنچ سکیں ۔

۳ ۔ ۳ ٹن کمیت کی ایک توپ گاڑی ' افقی مستوی پر ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پیچھے دھکا دیتی ہے ۔ وہ یکساں دباؤ معلوم کرو جو اس کو ۳ فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دینے کے لیے اس پر لگانا پڑے گا ۔

۴ ۔ ۲۰۰۰ ٹن کے ایک جہاز کو جو ۳۰ فٹ فی منٹ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے جہازی رسی کے ذریعہ ۲ فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دیا گیا ہے ۔ معلوم کرو کہ رسی کو کتنی کھینچ برداشت کرنی پڑی ۔

(۱۷۴) ۵ ۔ ایک سیکل اور سیکل سوار ۲۰۰ پونڈ وزنی ہیں ۔ سیکل سوار ہموار سڑک پر ۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے سیکل چلاتا ہے اور اچانک بریک ڈالتا ہے جو ٹائر کو ایک ایسی قوت سے دباتا ہے جو ۵۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے ۔ اگر بریک

اور ٹائر کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{4}$ ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر سیکل کتنی دُور جائے گی۔

۶۔ مثال ماسبق میں سیکل کتنی دور جائے گی اگر سڑک ہموار ہونے کی بجائے ۲۰ میں ا ڈھلوان ہو۔

۷۔ ایک گولی کو ۱۰۰۰ فٹ ثانیہ کی رفتار سے فائر کرنے پر وہ لکڑی کے ایک کندے میں بارہ انچ گہرائی تک گھس جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُسے اُسی لکڑی کے دو انچ موٹے تختے میں سے فائر کیا جائے تو خروج پر اس کی رفتار تقریباً ۹۱۳ فٹ فی ثانیہ ہوگی۔ (مان لو کہ لکڑی کی مزاحمت گولی پر مستقل ہے)۔

۸۔ دو مساوی وزن ف اور ف ایک رسی کے ذریعہ جو دو چکنی چرخیوں ا اور ب پر سے گذرتی ہے سہارے گئے ہیں اور ایک وزن و (= $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ف) ا اور ب کے درمیان ڈوری کے وسطی نقطہ پر باندھا گیا ہے۔ ا اور ب ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ و اترنا جاری رکھے گا تاآنکہ و ا ب ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائے۔ اس کے بعد کیا واقع ہوگا؟

۹۔ طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی ایک ڈوری کو ایک ہی افقی خط میں کے دو نقطوں ا اور ب کے درمیان جن کا باہمی فاصلہ ف ہے لٹکایا گیا ہے اور اس کے وسطی نقطہ پر وزن و بندھا ہے۔ وزن و کو ا اور ب کے درمیان وسط میں پکڑ کر دفعتاً چھوڑ دیا گیا۔ معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ میں سے وہ گرے گا قبل اس کے کہ ڈوریاں اُسے ساکن کردیں۔

۱۰۔ ایک وزنی ذرہ طبعی طول ل کی ایک ڈوری سے لٹکتا ہے اور اس کو طول لَ تک تنا دیتا ہے، ڈوری کا دوسرا سرا ثابت ہے۔ ذرہ کو سہارے کے نقطہ کے نیچے طول ۲ لَ تک کھینچ کر چھوڑ دیا گیا۔ کتنے اوپر وہ چڑھے گا۔

۱۱۔ وہ اسپی طاقت معلوم کرو جو ایک دریا کی توانائی بالحرکت سے اُس مقام پر حاصل کی جاسکتی ہے جہاں اس کا عرض ۱۰۰ فٹ، اوسط گہرائی ۲۰ فٹ، اور اوسط رفتار $\frac{1}{2}$ ۲ میل فی گھنٹہ ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا

زن ۵ء ۶۲ پونڈ ہے) ۔

۱۲۔ اگر (مثال ماسبق) دریا ایک آبشار پر جس کی تہ دریا کی تہ سے ۵۰ فٹ نیچے ہے ختم ہو تو وہ اسپی طاقت معلوم کرو جو پانی سے حاصل کی جا سکتی ہے ۔

۱۳ ۔ ایک انجن (حرّاکہ) میں $\frac{1}{4}$ ۱ پونڈ کوئلہ فی اسپی طاقت ساعت جلتا ہے ا ذ بہ رگڑ ، وغیرہ پر غالب آنے میں جتنا کوئلہ خرچ ہوتا ہے اسکو چھوڑ کر معلوم کرو کہ تنا کوئلہ جلانا چاہئیے کہ ۳۰۰ ٹن وزنی ٹرین میں ۵۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار پیدا ہو سکے ۔

قائم اور غیر قائم توازن

۱۴۰ ۔ فرض کرو کہ ایک نظام توازن کے محل میں ساکن ہے اور وہ اس محل سے صرف ایک راستہ پر حرکت کرنے کے قابل ہے جس کی دو سمتوں میں سے کسی سمت میں وہ حرکت کر سکتا ہے ۔ اس قسم کے نظام کی مثالیں حسب ذیل ہیں : انجن جو پٹریوں پر کھڑا ہو ، دروازہ جو ایک قبضہ کے گرد گھوم سکتا ہو ، منکا جو ایک تار میں پھسلتا ہو ۔ نظام پر بقائی قوتوں کی کوئی تعداد عمل کر سکتی ہے لیکن ان قوتوں کے تحت نظام کو توازن کے محل میں ہونا چاہئیے (۱۷۵)

فرض کرو کہ توازن کا محل ف سے تعبیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ تشکیل ف میں نظام کی توانائی بالقوہ $ک_ف$ ہے ۔ فرض کرو کہ لا کوئی محدد ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نظام کی تشکیل ، ف سے کتنی دور حرکت کر چکی ہے ۔ مثلاً لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہو سکتا ہے جو انجن پٹریوں پر طے کر چکا ہے ، لا سے وہ زاویہ تعبیر ہو سکتا ہے جس میں سے دروازہ اپنے قبضوں کے گرد گھوم چکا ہے یا لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہو سکتا ہے جو منکا تار پر طے کر چکا ہے ۔ لا کی قیمت مثبت ہو گی جبکہ نظام ایک سمت میں حرکت کرے اور منفی ہو گی جبکہ وہ دوسری سمت میں حرکت کرے ۔

جب نظام اپنے توازن کی تشکیل ف سے حرکت کرتا ہے تو لا کی قیمت بدلے گی ۔ توانائی بالقوہ ک کی قیمت بھی بدلے گی اور چونکہ وہ صرف لا کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے جبکہ قوتیں بقائی ہوں اس لئے ہم

کہہ سکتے ہیں کہ ک، لا کا ایک تفاعل ہے۔
ایک مشہور مسئلہ کی بموجب ہم ک کو لا کی قوتوں میں شکل

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \text{لا}\left(\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}} + \ldots\ldots \quad (۴۰)$$

میں پھیلا سکتے ہیں جس میں زیر تحریر ف اس امر کو تعبیر کرتا ہے کہ اس مقدار کو تشکیل ف میں محسوب کرنا چاہئے جیسا کہ $\text{ک}_{\text{ن}}$ کی صورت میں فرض کیا جا چکا ہے۔ اب چونکہ تشکیل ف کو توازن کا محل فرض کیا گیا ہے اس لیے دفعہ ۱۲۵ کی رو سے

$$\left(\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ف}} = 0$$

اور اس لیے مساوات (۴۰) ہو جاتی ہے

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}} + \ldots\ldots\ldots \quad (۴۱)$$

اب ف سے قریب تشکیلات کے لیے، لا چھوٹا ہے اور اس لیے مساوات (۴۱) کی رقم $\frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ اگرچہ خود چھوٹی ہے تاہم لا^3، لا^4 وغیرہ والی ارقام کے مقابلہ میں جو اس کے بعد آتی ہیں بہت بڑی ہے۔ اس لیے
ف سے قریب تشکیلات کے لیے ہم ان آخری رقموں کو بالکل نظر انداز (۱۲۶)
کر سکتے ہیں اور اس لیے مساوات کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں:

$$\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}} = \frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}} \ldots\ldots\ldots \quad (۴۲)$$

اب $\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ کی قیمت مثبت ہو سکتی ہے یا منفی۔
اگر وہ مثبت ہے تو $\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}}$ مثبت ہے خواہ لا کی کچھ ہی قیمت ہو اور اس لیے ف سے قریب ہر تشکیل میں توانائی بالقوہ ک،

...شکیل ف کی توانائی بالقوہ سے بڑی ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں ...، ف پر اقل ہے۔

اسی طرح اگر $\left(\frac{جف^2ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ منفی ہے تو لا کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لیے ک-ک$_ف$ منفی ہے اور اس لیے ک، ف پر اعظم ہے۔

۱۴... اب فرض کرو کہ نظام کو ف سے قریب کسی محل میں ساکن ...ھا گیا ہے۔ یہ تشکیل توازن کی تشکیل نہیں ہے اور اس لیے نظام ساکن ...یں رہ سکتا۔ وہ سمت معلوم کرنے کے لیے جس میں وہ حرکت کرنے لگے گا ...یں صرف یہ دیکھنے کی ضرورت ہے کہ جب نظام حرکت کرتا ہے تو وہ ...انائی بالحرکت حاصل کرتا ہے اور چونکہ یہ توانائی حسب دفعہ ۱۴۳ اسکی ...انائی بالقوہ کے بدلے میں حاصل ہونی چاہیئے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ...ظام ایک ایسی سمت میں حرکت کرنے لگے گا کہ اس کی توانائی بالقوہ ...ٹے گی۔

مساوات (۴۲) پر نظر ڈالنے سے معلوم ہوگا کہ یہ سمت ف کی جانب ...ہے یا اس کے مخالف۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\left(\frac{جف^2ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ مثبت ہے تو ...ا کی قیمت گھٹنی چاہیئے۔ اور اس لیے حرکت ف کی جانب ہونی چاہیئے ...راہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اسی طرح اگر $\left(\frac{جف^2ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ منفی ہے تو $لا^2$ کی ...مت بڑھنی چاہیئے اور اس لیے حرکت ہمیشہ ف سے دور ہوگی۔

اس طرح معلوم ہو چکا کہ اگر نظام کو ف سے قریب کسی تشکیل میں ...ھا جائے تو یہ سوال کہ حرکت ف کی جانب ہوگی یا اس سے دور ...ں تشکیل پر منحصر نہیں ہے جس میں نظام کو رکھا گیا ہے بلکہ $\left(\frac{جف^2ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ کی ...لامت پر منحصر ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ف توازن کی تشکیل ہو اور اگر نظام کو ف سے خفیف طور پہ کسی قریبی تشکیل میں ہٹایا جائے تو (۱۴۸

(ا) اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف$ مثبت ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ اپنے توازن کے ابتدائی محل پر لوٹے گا،

(ب) اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف$ منفی ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ توازن کے محل سے اور دُور حرکت کرے گا۔

قسم اول کے توازن کو قائم توازن اور قسم دوم کے توازن کو غیر قائم توازن کہتے ہیں۔

ہم نتائج کو حسب ذیل جدول میں خلاصہ کے طور پر بیان کر سکتے ہیں:

$\left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف$ کی علامت	توانائی بالقوہ ک	توازن
+	اقل	قائم
−	اعظم	غیر قائم

۱۴۹ — مسئلہ۔ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادلاً واقع ہوتے ہیں۔

ہم مان سکتے ہیں کہ صرف محدود قوتوں سے بحث کی جارہی ہے اور اس لیے تفاعل ک ہمیشہ محدود ہوگا، وہ کبھی بھی قیمتوں ک = $\pm\infty$ میں سے گذر نہیں سکتا۔ یہ تفاعل مسلسل ہونا چاہئے کیونکہ بموجب فرض وہ کام جو نظام کو کسی تشکیل میں رکھنے میں انجام پاتا ہے محدود قیمت کا ہونا چاہئے

دراس لیے کسی دی ہوئی تشکیل کے لئے توانائی بالقوہ کی صرف ایک
ست ہونی چاہئے۔ نیز توانائی بالقوہ کے تفرقی سر محدود ہونے چاہئیں
ونکہ ان سے اُن قوتوں (دفعہ ۱۳۳) کی پیمائش ہوتی ہے جو کسی دی ہوئی
شکیل میں صرف محدود قیمتیں رکھ سکتی ہیں۔
پس اگر تفاعل ک کی ترسیم کھینچی جائے تو وہ ایسے
صوں پر مشتمل ہونی چاہیئے جنہیں ک متبادلاً بڑھتے اور گھٹے۔ ایک حصہ سے
میں ک بڑھتا ہے اُس حصہ میں جسمیں ک گھٹتا ہے داخل ہونیکے لیے ہمیں
یک ایسے نقطہ میں سے گذرنا چاہئے جس پر ک اعظم ہے۔ برخلاف ازیں
ن حصہ سے جس میں ک گھٹتا ہے اُس حصہ میں جس میں ک بڑھتا ہے
اخل ہونے کے لیے ایک ایسے نقطہ میں سے گذرنا پڑے گا جس پر
ب اقل ہے۔ اس لیے ک کی اعظم اور اقل قیمتیں متبادلاً وقوع پذیر (۱۰۸)
وتی ہیں یا دوسرے الفاظ میں قائم اور غیر قائم توازن کی تشکیلات متبادلاً
اقع ہوتی ہیں۔

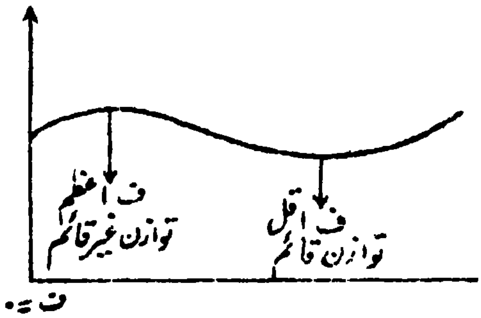
۱۵ا۔ توازن کی ان دو قسموں کی مثالیں اُن تمثیلات میں مل سکتی ہیں
دقبل ازیں بیان ہو چکی ہیں۔

۱۔ حرّاکہ جو پٹڑیوں پر حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ کسی
ل میں مرکزِ ثقل کا ارتفاع ف ہے اور فرض کرو کہ لا سے وہ فاصلے تعبیر ہوتے ہیں
وراستہ پر افقاً پیمائش کئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ انکی کل کمیت ث ہے۔
ب توانائی بالقوہ ث ج ف ہے۔ تشکیل لا = ۰ میں توازن کے لیے شرط ہے

$$\frac{د}{د لا} (ث ج ف) = ۰$$

ا $\frac{د ف}{د لا}$ = ۰۔ جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ف کو اعظم ہونا چاہئے یا اقل صفحہ ۵۵ کی

جدول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ف اقل ہے یعنی اگر مرکز ثقل اپنے زیریں ترین نقطہ پر ہے تو توازن قائم ہوگا۔ اس لیے اگر حراکہ کو اس محل سے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو وہ اس محل پر واپس لوٹ آئے گا۔ اگر ف اعظم ہو یعنی اگر مرکز ثقل اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔ حراکہ اب پہاڑی کے چوٹی پر ہوگا اور چوٹی کے کسی ایک جانب ہٹانے پر پہاڑی کے نیچے لڑھکتا جائے گا۔



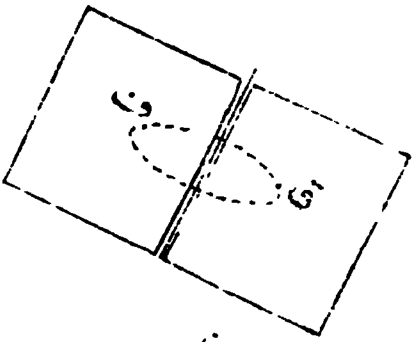
شکل (۹۷)

نوٹ ۔ اگر حراکہ کے متحرک اجزاء مناسب طور پر "متوازن" نہیں ہیں تو مرکز ثقل ممکن ہے ہمیشہ پٹریوں کے اوپر ایک ہی ارتفاع پر نہ رہے اور اس لیے ف کی اعظم اور اقل قیمتیں ضروری نہیں کہ ان نقطوں پر واقع ہوں جہاں راستہ کی بلندی اعظم یا اقل ہے۔ مثلاً توازن کا ایک محل وقوع پذیر ہو سکتا ہے جہاں راستہ ہموار نہ ہو یا غیر قائم توازن کا محل ایک ایسے نقطہ پر واقع ہو سکتا ہے جس پر راستہ اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو، ظاہر ہے کہ اس صورت میں پٹریوں کے اوپر مرکز ثقل کا ارتفاع اس نقطہ پر اقل ہے۔ اس لیے اگر انجن کو راستہ کے زیریں تر نقطہ تک خفیف طور پر ہٹایا جائے اور پھر آزاد چھوڑ دیا جائے تو وہ خود بلند ترین نقطہ تک واپس لوٹے گا۔ یہاں اصول وہی ہے جو میکانیکی کھلونوں میں استعمال کیا جاتا ہے کیونکہ جب ان کو کسی مائل مستوی کے پائین میں ساکن رکھا جاتا ہے تو وہ آزاد چھوڑنے پر مستوی کے اوپر لڑھکنا شروع کرتے ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادلاً واقع ہونے چاہئیں جیسا کہ ہم نے دفعہ ۱۴۹ میں ثابت کیا ہے۔

۲ ۔ دروازہ جو قبضوں پر گھومے ۔ یہاں بھی توانائی بالقوہ ث جذف ہے

جس میں ف کسی معیاری ہموار سطح کے اوپر دروازے کے مرکز ثقل کا ارتفاع ہے جب دروازہ اپنے قبضوں پر گھومتا ہے تو اس کا مرکز ثقل قبضوں کے خط کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اگر یہ خط کامل طور پر انتصابی ہو تو مرکز ثقل سے مرتسم شدہ دائرہ کلاً ایک افقی سطح میں واقع ہوتا ہے اور اس لیے دروازہ کا ہر محل توازن کا محل ہوتا ہے اور قائمیت یا غیر قائمیت کا سوال پیدا ہی نہیں ہوتا لیکن اگر قبضوں کا خط کامل طور پر انتصابی نہ ہو تو مذکورہ بالا دائرہ ایک مائل سطح میں واقع ہوگا۔ وہ نقطے جن پر مرکز ثقل کا ارتفاع معیاری افقی سطح کے اوپر اعظم یا اقل ہے تعداد میں دو ہیں:



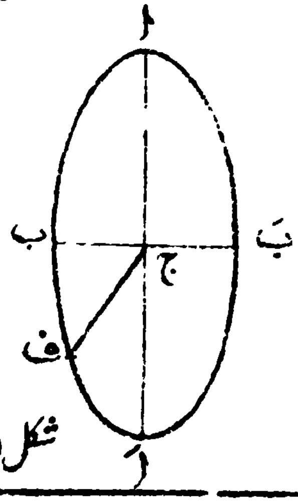
شکل (۹۸)

(۱) نقطہ ف جو دائرہ کا وہ بلند ترین نقطہ ہے جس پر توازن غیر قائم ہے۔

(۲) نقطہ ق جو دائرہ کا وہ زیر ترین نقطہ ہے جس پر توازن قائم ہے۔

۳۔ منکا جو تار پر پھسلے۔ ایک معیّن مسئلہ حاصل کرنے کے لیے

فرض کرو کہ منکا ف ایک ناقصی تار پر پھسلتا ہے جس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم ا اَ انتصابی ہے۔ فرض کرو کہ منکے پر صرف اس کا وزن اور اس تنی ہوئی ڈوری کا تناؤ عمل کرتے ہیں جس کا ایک سرا منکے سے اور دوسرا سرا ناقص کے مرکز سے بندھا ہے۔ فرض کرو کہ ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں اور فرض کرو کہ ڈوری کا طبیعی طول ل اور مقیاس لہ ہے جہاں ل، ب سے کم ہے اور اس لیے ڈوری ہمیشہ تنی ہوئی



شکل (۹۹)

رہتی ہے۔ فرض کرو کہ منکے کا وزن و ہے۔

پہلا کام کسی تشکیل میں توانائی بالقوہ کو محسوب کرنے کا ہے۔ فرض کرو
تشکیل کی تعیین ناقص پر کے اُس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ فہ سے ہوتی
جو منکا اختیار کرتا ہے۔ تب ناقص کے مرکز کے اوپر منکے کا ارتفاع ا جم فہ۔
اور اس لیے توانائی بالقوہ کا وہ حصہ جو تجاذبی قوتوں سے پیدا ہوتا ہے و ا جم
ڈوری کا طول ر مساوات

$$\text{ر}^2 = \text{ا}^2\ \text{جم}^2\ \text{فہ} + \text{ب}^2\ \text{جب}^2\ \text{فہ} \qquad ($$

سے حاصل ہوتا ہے۔ وہ کام جو ڈوری کو طول ل سے طول ر تک تنانے میں
پاتا ہے حسب دفعہ (۱۱۳)

$$\frac{\text{له}}{\text{۲ل}}\,(\text{ر} - \text{ل})^2$$

ہے۔ اِس کو توانائی بالقوہ کا وہ حصہ سمجھا جا سکتا ہے جو ڈوری کے تنانے
پیدا ہوتا ہے۔ اِس لیے کُل توانائی بالقوہ ہوگی

$$\text{ک} = \text{و ا جم فہ} + \frac{\text{له}}{\text{۲ل}}\,(\text{ر} - \text{ل})^2 \qquad (\text{۱}$$

اب توازن کے محل $\frac{\text{فرک}}{\text{فرفہ}} = ۰$ سے یا (۱۸۰)

$$\text{و ا جب فہ} - \frac{\text{له}}{\text{ل}}(\text{ر} - \text{ل})\frac{\text{فرر}}{\text{فرفہ}} = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اِس میں مساوات (۱) سے ر کی قیمت درج کی جائے

$$\text{و ا جب فہ} + \frac{\text{له}}{\text{ل}}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\ \text{جب فہ جم فہ} - \frac{\text{له}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\ \text{جب فہ جم فہ}}{\sqrt{\text{ا}^2\ \text{جم}^2\ \text{فہ} + \text{ب}^2\ \text{جب}^2\ \text{فہ}}} =$$

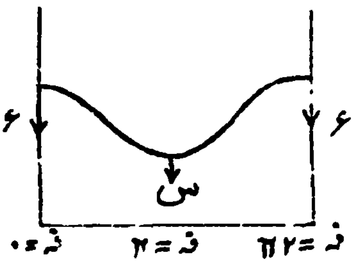
منطق بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اصلیں جب فہ = ۰ سے اور نیز

$$\left[\text{و ا} + \frac{\text{له}}{\text{ل}}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\ \text{جم فہ}\right]^2 (\text{ا}^2\ \text{جم}^2\ \text{فہ} + \text{ب}^2\ \text{جب}^2\ \text{فہ}) - \text{له}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^2\ \text{جم}^2\ \text{ف}$$

$$\text{یعنی}\left[\text{وا} + \frac{\text{له}}{\text{ل}}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم فہ}\right]^2\left[(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\right] - \text{له}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم}^2\,\text{فہ}\;\;(\text{ج})$$

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں آخری مساوات جم فہ میں چوتھے درجہ کی ہے۔

جب فہ = ۰ کی اصلیں فہ = ۰، π ہیں اور اس لیے ہمیشہ دو توازن کے محل ا، اَ پر ہیں جو محور اعظم کے سرے ہیں۔ مساوات (ج) چوتھے درجہ کی ہے اور اس لیے جم فہ میں اس کی حقیقی اصلوں کی تعداد ۰، ۲، یا ۴ ہو سکتی ہے۔ اِس مساوات کو ہم نے اُس مساوات کی طرفین کا مربع لیکر حاصل کیا ہے جو پوری ہونی چاہیئے تھی اور اس لیے ایسا کرنے سے ہم نے اصلی مساوات کی اصلوں کی تعداد کو دُگنا کر دیا ہے۔ اس لیے جم فہ کی اصلی مساوات صرف ۰، ۱ یا ۲ حقیقی اصلوں سے پوری ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں ا اور اَ کے درمیان دائرہ کی کسی ایک جانب زیادہ سے زیادہ توازن کے دو محل ہو سکتے ہیں۔



شکل (۱۰۰)

جم فہ کی اصلوں کی اصلی قیمتیں معلوم کرنا اور پھر ان اصلوں کے جواب میں $\frac{\text{ف}^2\text{ک}}{\text{ف لا}^2}$ کی قیمتوں کی علامتیں متعین کرنا ایک تکلیف دہ کام ہے۔ یہ سوال قائم اور غیر قائم تشکیلات کے عام نظریہ کو استعمال کرنے سے بہت سادہ ہو جاتا ہے۔

اگر ہم جملہ (ب) میں له = ۰ رکھیں تو اُس صورت میں جس میں له بمقابلہ و کے لاانتہا چھوٹا ہے حسب ذیل توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ک} = \text{وا جم فہ}$$

اِس کی ترسیم شکل (۱۰۰) میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں توازن کے صرف دو محل ہیں یعنی فہ = ۰ اور فہ = π جس میں سے پہلا (۶) غیر قائم ہے اور دوسرا (س) قائم۔

(۱۸۱) نیز اگر ہم جملہ (ب) میں و = ۰ رکھیں تو اُس صورت میں جس میں له بمقابلہ و کے

لامتناہی بڑا ہے تو توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے

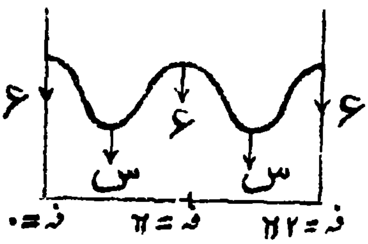
$$ک = \frac{لہ}{۲ ل}(ر - ل)^{۲}$$

اور اس صورت میں ک کی ترسیم کو شکل (۱۰۱) میں دکھایا گیا ہے۔ توازن کے چار محل

$$فہ = ۰،\ \frac{\pi}{۲}،\ \pi،\ \frac{۳\pi}{۲}$$

ہیں جو علی الترتیب غیر قائم، قائم، غیر قائم، قائم ہیں۔

وہ عام صورت جس میں لہ، و کے ساتھ محدود نسبت رکھتا ہے متذکرہ صدر دو انتہائی صورتوں کے درمیان واقع ہے۔ عام صورت میں ک کی ترسیم اشکال (۱۰۰) اور (۱۰۱) کی ترسیموں کو مرکب کرنے سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ فہ کی کسی قیمت کے متناظر معین معلوم کرنے کے لیے ہم ترسیموں (۱۰۰) اور (۱۰۱) کے نظیری معینوں کو مناسب مستقلات سے ضرب دیتے ہیں اور جمع کرتے ہیں۔ ان دو معینوں سے جملہ (ب) کی دو رقمیں جداگانہ ملتی ہیں اور ان کا مجموعہ ک کی کل قیمت ہے۔



شکل (۱۰۱)

اس ہندسی عمل سے ظاہر ہے کہ تشکیل فہ = ۰ توازن کی غیر قائم تشکیل رہتی ہے۔ تشکیل فہ = π بھی توازن کی تشکیل ہے لیکن وہ قائم یا غیر قائم ہو سکتی ہے۔ ان دو تشکیلات کے درمیان توازن کی ایک اور تشکیل ہو سکتی ہے جیسا کہ شکل (۱۰۱) میں یا یہ کہ توازن کوئی تشکیل ہی نہ ہو جیسا کہ شکل (۱۰۰) میں۔ چونکہ دفعہ ۱۴۹ کی رو سے قائم اور غیر قائم تشکیلات متبادلاً واقع ہوتی ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ اگر تشکیل فہ = π قائم ہے تو اس کے اور فہ = ۰ کے درمیان کوئی اور توازن کی تشکیل نہیں ہو سکتی۔ لیکن اگر فہ = π غیر قائم ہے تو فہ = π اور فہ = ۰ کے درمیان توازن کی ایک تشکیل ہونی چاہیے اور یہ قائم ہونی چاہیے۔

اِس لیے تشکیل فہ = ۲ؔ کی قائمیت یا غیرقائمیت سے لہ کی کسی معلومہ قیمت کے لیے حل کی نوعیت معلوم ہوتی ہے۔ یہ قائمیت یا غیرقائمیت فہ = ۲ؔ پر $\frac{جف^۲ ک}{جف\ فہ^۲}$ کی علامت سے متعین ہوتی ہے۔ اب اِس کی علامت معلوم کرنے کے لیے فہ = ۲ؔ سے قریب ۲ؔ ـ فہ = طہ رکھو اور طہ^۲ سے چھوٹی رقموں کو نظرانداز کرو تو اِس تقریب تک

$$ر^۲ = ا^۲ جم^۲ فہ + ب^۲ جب^۲ فہ$$

$$= ا^۲ - (ا^۲ - ب^۲)\ جب^۲ طہ$$

$$= ا^۲ - (ا^۲ - ب^۲)\ طہ^۲$$

اِس لیے مساوات (ب) سے

$$ک = و ا جم فہ + \frac{لہ}{۲ ل} (ر - ل)^۲$$

$$= - و ا (۱ - \tfrac{۱}{۲} طہ^۲) + \frac{لہ}{۲ ل} \left[ا (۱ - \tfrac{۱}{۲} \frac{ا^۲ - ب^۲}{ا^۲} طہ^۲) - ل \right]^۲$$

(۱۸۲) اِس لیے $\frac{جف^۲ ک}{جف\ طہ^۲} = و ا - \frac{لہ (ا^۲ - ب^۲)(ا - ل)}{ا\ ل}$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فہ = ۲ؔ پر توازن قائم ہے یا غیرقائم بموجب اس کے کہ

$$لہ < یا > \frac{و ا^۲ ل}{(ا^۲ - ب^۲)(ا - ل)}$$

خلاصہ یہ ہے کہ حسب ذیل دو صورتیں ہیں:

(۱) اگر لہ < $\frac{و ا^۲ ل}{(ا^۲ - ب^۲)(ا - ل)}$ تو توازن کے محل صرف فہ = ۰ اور فہ = ۲ؔ ہیں جو علی الترتیب غیرقائم اور قائم ہیں۔

(۲) اگر لہ > $\frac{و ا^۲ ل}{(ا^۲ - ب^۲)(ا - ل)}$ تو توازن کے محل فہ = ۰ اور

فہ = ۲۱ ہیں جو دو توں غیر قائم ہیں اور تیز ان کے درمیان توازن کا ایک قائم محل
یہ آخری محل مساوات (ج) سے معلوم ہوگا۔

فاصل اور تعدیلی توازن

۱۵۱ ۔ اگر توازن کے محل پر $\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}$ صفر ہو تو توازن کو فاصل
توازن کہتے ہیں۔ اب تک یہ بات منکشف نہیں ہوئی کہ جب کسی نظام کو فاصل
توازن کے محل سے خفیف طور پر ہٹایا جاتا ہے تو کیا وقوع پذیر ہوتا ہے
توازن کے کسی محل کے قریب ک کی قیمت کو بالعموم شکل (دیکھو مساوات (۱

$$ک = ک_ف + \frac{1}{2} لا^2 \left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف + \frac{1}{6} لا^3 \left(\frac{جف^3 ک}{جف لا^3}\right)_ف$$

$$+ \frac{1}{24} لا^4 \left(\frac{جف^4 ک}{جف لا^4}\right)_ف + \cdots\cdots\cdots \quad (۱۳$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

اگر $\frac{جف^3 ک}{جف لا^3}$، ف پر معدوم ہو تو ک - ک$_ف$ کی قیمت میں سب سے اہم رقم وہ ہے جس میں لا^3

$$ک - ک_ف = \frac{1}{6} لا^3 \left(\frac{جف^3 ک}{جف لا^3}\right)_ف$$

ک - ک$_ف$ علامت بدلتا ہے جبکہ وہ لا = ۰ میں سے گزرتا ہے جو (۱۸۳)
کی تشکیل ہے اور اس لیے ک کی ترسیم شکل (۱۰۲) جیسی ہے جس میں ایک
مماس ہے اور نقطہ ف، انعطاف کا نقطہ ہے۔ ایک جانب توانائی بالا
ف پر کی توانائی بالقوہ سے کم ہے اور دوسری جانب زیادہ ۔

فرض کرو کہ ف کی اِن دو جانبوں پر دو متصلہ تشکیلات ق، ق
ہیں ۔ اگر نظام کو ق پر رکھا جائے تو اسے اس طرح حرکت کرنا چاہیے کہ توانائی بالا
گھٹے اور اس لیے اِس کو ف سے دُور حرکت کرنا چاہیئے ۔ اگر نظام کو ق

رکھا جائے تو اُس کو اُسی سبب سے اولاً ف کی جانب حرکت کرنا چاہئے لیکن وہ ف سے گذر کر پرے حرکت کرے گا اور ف سے پرے حرکت کرنا جاری رکھے گا کیونکہ وہ ساکن نہیں ہو سکتا تا آنکہ اس کی توانائی بالقوہ پھر ق پر کی توانائی بالقوہ کے مساوی نہ ہو جائے اور یہ ف کے قریب واقع نہیں ہو سکتا۔ اِس لیے اگر نظام ف سے قریب کسی محل سے چلے تو وہ بالآخر ف سے دُور حرکت کرنے لگے گا۔ دوسرے الفاظ میں توازن غیر قائم ہے

پس اگر ف پر $\frac{جف^{۲} ک}{جف\ لا^{۲}} = ۰$ تو توازن بالعموم غیر قائم ہوتا ہے۔

لیکن وہ صورت مستثنیٰ ہوگی جبکہ $\frac{جف^{۳} ک}{جف\ لا^{۳}} = ۰$ کیونکہ اِس صورت میں

$$ک - ک_{ف} = \frac{۱}{۲۴} لا^{۴} \left(\frac{جف^{۴} ک}{جف\ لا^{۴}}\right)_{ف}$$

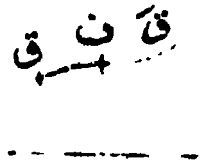
اِس صورت پر حسب دفعہ ۱۴۸ بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اِس کے کہ $\left(\frac{جف^{۴} ک}{جف\ لا^{۴}}\right)_{ف}$ مثبت یا منفی ہو۔

۱۵۲۔ اس سے اعلیٰ تر درجوں کی نادر صورتوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ ہمیں حسب ذیل عام قاعدے حاصل ہوتے ہیں :

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سر جو معدوم نہیں ہوتا طاق رتبہ کا ہے تو توازن غیر قائم ہوتا ہے۔

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سر جو معدوم نہیں ہوتا جفت رتبہ کا ہے تو توازن قائم یا غیر قائم ہوتا ہے بموجب اسکے کہ اِس کی علامت مثبت یا منفی ہے۔

یہ ممکن ہے کہ تمام تفرقی سر معدوم ہوں، اِس صورت میں اس مسئلہ پر دوسرے طریقوں سے بحث کی جاسکتی ہے ۔



مثلاً اگر توانائی بالقوہ (۱۰۳)

$$ک = لا^{۲}\, تو^{\frac{۱}{۲۴}}$$

شکل (۱۰۲)

کی شکل کی ہو تو تشکیل لا = ۰ میں تمام تفرقی سر معدوم ہوتے ہیں۔ تفاعل کی ترسیم کھینچنے پر معلوم ہوگا کہ توازن قائم ہے ۔

یہ ہوسکتا ہے کہ ک کے تمام تفرقی سر اِس وجہ سے معدوم ہوں کہ اُس پورے علاقہ میں جو زیر بحث تشکیل کے گرد ہے ک مستقل ہے۔ اگر ایسا ہے تو نظام کو ہٹایا جاسکتا ہے اور کوئی قوت نہیں ہوگی جو اس کو اس نئی تشکیل سے حرکت دے ۔ ہر تشکیل توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس قسم کے توازن کو **تعدیلی توازن** کہتے ہیں ۔

تعدیلی توازن کی ایک صورت مثال ۲ صفحہ ۲۵۸ میں واقع ہوچکی ہے دروازہ جو قبضوں کے انتصابی خط کے گرد آزادانہ گھوم سکے ۔ دوسری صورت ایک کرہ کی ہے جو افقی مستوی پر لڑھکتا ہو۔

نظامات جنکو آزادی کے مختلف درجے حاصل ہوں

۱۵۳ — ابتک ہم نے صرف اُن نظامات پر بحث کی ہے جو تشکیلات کے صرف ایک سلسلہ میں سے حرکت کرنے پر مجبور تھے یعنے نظامات جن کو صرف آزادی کا ایک درجہ حاصل تھا۔ اُس نظام کی قائمیت یا غیر قائمیت متعین کرنے کا مسئلہ جس کو آزادی کے ایک سے زیادہ درجے حاصل ہوں زیادہ پیچیدہ ہے ۔

اگر توازن کے محل میں توانائی بالقوہ مطلقاً اقل ہے اور اِس لیے ہر حرکت سے توانائی بالقوہ میں اضافہ ہوجاتا ہے تو یہ توازن قائم ہوگا۔ یہ اُسی استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے جو اُس صورت میں استعمال کیا گیا

جس میں آزادی کا صرف ایک درجہ حاصل تھا۔

اگر توانائی بالقوہ مطلقاً اقل نہیں ہے یعنی اگر ایسے ہٹاؤ ممکن ہیں جس میں توانائی بالقوہ گھٹتی ہے جبکہ نظام توازن کے محل سے حرکت کرتا ہے تو یہ تشکیل غیر قائم توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس کو آئندہ ثابت کیا جائیگا کیونکہ اس باب کے طریقوں سے اسے ثابت نہیں کیا جا سکتا اور اس لئے ہم اس کو آئندہ کے لئے چھوڑتے ہیں (بارہواں باب)۔

عام مثالیں

(۱۰۵) ۱۔ ثابت کرو کہ ایک انجن کی اسپی طاقت جو س میل فی گھنٹہ کی چال سے ر پاؤنڈ کی مزاحمت پر غالب آتا ہے حسب ذیل ہے:

ر س ÷ ۳۷۵

۲۔ ایک ٹرین معہ حراکر (انجن) ۵۰۰ ٹن وزنی ہے۔ اس کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں شرح سے ہمواری پر متحرک رکھا گیا ہے۔ ہوائی مزاحمت، رگڑ وغیرہ ۴۰ پونڈ فی ٹن ہیں۔ انجن کی اسپی طاقت معلوم کرو۔

اس اسپی طاقت میں کتنا اضافہ ہونا چاہئے کہ اس کی شرح تو وہی رہے لیکن اس کے ساتھ ہی پٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی اس طور پر اوپر اٹھایا جائے کہ طے شدہ فاصلہ کے ہر فٹ پر اٹھائے ہوے پانی کی مقدار ۱۰۰ پونڈ ہو اور جس ارتفاع تک پانی اٹھایا گیا ہے وہ ۱۰ فٹ ہو۔ وہ توانائی بالحرکت جو پٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی حاصل کرتا ہے اور وہ توانائی بالحرکت جو اٹھائے ہوے پانی کی (بلحاظ ٹیانک کے) ہے نظر انداز کردی گئی ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پہاڑی کے رخ ایسی شکل کے ہیں کہ ایک معلومہ کمیت ان پر بغیر پھسلے عین ٹھیر سکتی ہے۔ ایک شخص چاہتا ہے کہ اس کمیت کو پہاڑی کے دامن کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک جو اول الذکر نقطے کے متقاطر ہے حرکت دے۔ ثابت کرو کہ کمیت کو پہاڑی کے اوپر کھینچنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ اس کام سے جو اس کو پہاڑی کے دامن کے گرد کھینچنے میں کرنا پڑتا ہے

نسبت ۲ : π میں کم ہے ۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ وہ کام جو ایک شخص ایک وزن کو پہاڑی کے اوپر ایک معلوم نقطہ ا سے چوٹی ب تک کھینچنے میں انجام دیتا ہے صرف ا اور ب کے مقامات پر منحصر ہوتا ہے اور پہاڑی کی شکل پر منحصر نہیں ہوتا بشرطیکہ وہ ہمیشہ ا اور ب میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں وزن کو کھینچے ۔

۵ ۔ ایک لچکدار رسی کے دو سروں کو شکل V کے لکڑی کے ایک ٹکڑے کی دو شاخوں سے باندھ کر ایک منجنیق بنائی گئی ہے، رسی کا طبعی طول ا ہے اور لچک کا مقیاس لہ ہے اور لکڑی کی شاخیں ایک دوسرے سے فاصلہ ل پر ہیں اور ل، ا سے بڑا ہے منجنیق کے وسطی نقطہ پر کمیت ک کا ایک پتھر رکھا گیا اور اسے پیچھے کی جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ رسی کا طول تن کر اپنے طبعی طول کا دگنا ہو گیا ۔ اب اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو معلوم کرو کہ وہ کس رفتار سے منجنیق سے نکلے گا ۔

۶ ۔ مثال ۵ میں اگر پتھر کو انتصاباً اوپر وار پھینکا جائے، تو وہ ساکن ہونے سے بیشتر کتنی بلندی تک چڑھے گا ۔

۷ ۔ کمیت ک کا ایک ہار منکوں سے بنایا گیا ہے جو ایک تاگے میں جس کی لچک کا مقیاس لہ ہے پروئے گئے ہیں ۔ اس کو ایک چکنے قائم مستدیر مخروط کی سطح پر جس کا زاویہ راس ۲ ع ہے اور محور انتصابی ہے اس طرح سہارا گیا ہے کہ ہار ایک افقی مستوی میں ہے اور تاگا تنا ہوا نہیں ہے ۔ اگر ہار کو چھوڑ دیا جائے تو وہ ساکن ہونے سے بیشتر مخروط کے نیچے کتنا پھسلے گا ۔

۸ ۔ ایک اڑ پہیہ کا نصف قطر ۲ فٹ ۶ انچ ہے اور آروں وغیرہ کا وزن کور (Rim) کے مقابلہ میں نظر انداز کیا جا سکتا ہے ۔ پہیہ ثابت محور کے گرد فی منٹ ۲۵۰ گردشوں کی شرح سے گھوم رہا ہے محور کا قطر ۲ انچ ہے اور پہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{30}$ ہے ۔ اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو رکنے سے قبل وہ کتنی گردشیں کرے گا ۔

۹ ۔ ایک مکڑی چھت سے ایک تاگے کے ذریعہ جس کی لچک کا مقیا (۱۸۶)

اُس کے وزن کے مساوی ہے لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ وہ چھت تک اتنا کام کرکے چڑھ سکتی ہے جو اُس کام کا صرف تین چوتھائی ہے جو مطلوب ہوتا اگر تاگا لچکدار نہ ہوتا۔

۱۰۔ ایک مہین تاگے کے دو سروں سے مساوی وزن ف باندھ کر اس کو دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲ ا فاصلہ پر ہیں لٹکایا گیا ہے۔ پھر کھونٹیوں کے درمیان تاگے کے حصہ کے وسطی نقطہ پر کمیت ق باندھ کر اس کو جاذبہ کے تحت نیچے اترنے چھوڑ دیا گیا۔ ثابت کرو کہ اس کی رفتار گہرائی لا تک گرنے کے بعد حسب ذیل ہوئی :

$$\left\{ \frac{۲ج(لا^{۲} - ا^{۲})(ق\,لا + ۲ف\,ا - ۲ف\sqrt{لا^{۲} + ا^{۲}})}{ق(لا^{۲} + ا^{۲}) + ۲ف\,لا^{۲}} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۱۔ اگر یہ تسلیم کیا جائے کہ زمین کی بیرونی جانب کسی جسم پر زمین کی کشش اُس فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے جو زمین کے مرکز اور جسم کے درمیان ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی سطح سے ایک گولی کو انتصاباً اوپر وار کس رفتار سے فائر کرنا چاہیے کہ وہ کبھی زمین پر واپس نہ آسکے۔

۱۲۔ ایک بھاپ ہتھوڑی جس کا وزن ۳۰ ٹن ہے کچھ تو اپنے وزن سے اور کچھ اُس بھاپ کے دباؤ سے نیچے دبائی جاتی ہے جو ایک انتصابی اسطوانہ میں ایک فشارہ پر جو ہتھوڑی کے ساتھ حرکت کرتا ہے عمل کرتا ہے۔ فشارہ کا رقبہ چار مربع فٹ ہے اور بھاپ کا دباؤ ۲۲۵ پونڈ فی انچ ہے۔ اگر ہتھوڑی کو اپنے بلاک سے ۲ فٹ اوپر اٹھایا جائے اور چھوڑ دیا جائے تو وہ رفتار معلوم کرو جس کے ساتھ وہ بلاک سے ٹکرائے گی۔

۱۳۔ طول ل کے ایک یکساں ڈنڈے کے سروں سے طول ا کی ایک ڈوری باندھی گئی ہے جو ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ڈنڈا صرف افقی یا انتصابی محل میں لٹک سکتا ہے۔ اِن محلوں کی قائمیت یا غیر قائمیت کا امتحان کرو۔

۱۴۔ دو مساوی یکساں ڈنڈوں کو اُستوار طریقہ سے انگریزی حرف ـــ ا کی شکل میں جوڑا گیا ہے اور پھر اِن کو نصف قطر ا کے ایک چکنے مستدیر اسطوانے پر سوار کیا گیا ہے

ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو جو توازن کی قائمیت کے مطابق ہو اگر ڈنڈے ایک انتصابی مستوی میں جو اسطوانے کے طول پر عمود ہے رہنے کے لیے مقید ہوں ۔

۱۵ ۔ ایک پتھر کا مکعب جس کے کنارے کا طول ا ہے قطر ب کے ایک کھردرے دائری کندے پر متشاکلاً ٹکا ہوا ہے اور اس کا قاعدہ کندے پر افقی ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ ب > یا < ا ۔

۱۶ ۔ ایک جھولنے والا پتھر ایک ثابت پتھر پر ٹکا ہوا ہے۔ تماس کھردرا ہے اور نقطہ تماس پر کا مشترک عماد انتصابی ہے ۔ اگر نقطہ تماس پر ان پتھروں کی سطحوں کے نصف قطر انحناء غہ اور غہَ ہوں اور اگر حرکت پذیر پتھر کے مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہو تو ثابت کرو کہ جھولنے والے پتھر کا توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{1}{\text{ف}} > \text{یا} < \frac{1}{\text{غہ}} + \frac{1}{\text{غہَ}}$$

۱۷ ۔ طول ل اور وزن و کی ایک سیڑھی ایک کھردرے فرش پر انتصابی (۱۸۷)
محل میں اس طرح کھڑی ہے کہ ایک لچکدار ڈوری اس کے سب سے اونچے نقطہ سے اور چھت کے ایک ایسے نقطہ سے بندھی ہے جس کا ارتفاع فرش کے اوپر ب ہے، اور ڈوری کا تناؤ ت ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ

$$\text{ت} > \text{یا} < \frac{\text{و(ب} - \text{ل)}}{\text{۲ ب}}$$

۱۸ ۔ اگر مثال ۱۷ میں تناؤ و (ب - ل) | ۲ ب کے مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن قائم ہے یا غیر قائم ۔

۱۹ ۔ اگر مثال ۱۴ میں ڈنڈے فاصل طول کے ہوں جو قائمیت کو غیر قائمیت سے منفصل کرتا ہے تو ثابت کرو کہ توازن تعدیلی ہے اور اس لیے ڈنڈے بعض خاص حدود کے اندر کسی محل میں اس مستوی میں ساکن رہ سکتے ہیں جو اسطوانہ کے محور پر عمود ہے ۔

۲۰ ۔ ثابت کرو کہ مثال ماسبق کے ڈنڈے ان ہٹاؤں کے لحاظ سے قائم

توازن میں ہیں تب میں ڈنڈوں کا مستوی ایک انتصابی محور کے گرد گھومتا ہے،
اور وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈوں کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہے
جس میں مستوی، اسطوانے کے محور کے ساتھ کوئی معلومہ زاویہ ط بناۓ۔

۲۱۔ مثال ماسبق میں ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو کہ تمام
ممکن ہٹاؤں کے لیے توازن قائم ہو سکے۔

۲۲۔ سخت اُبلے ہوۓ انڈے کے چپٹے اور نوکدار سِروں پر نصف قطر
انحنا علی الترتیب ا اور ب ہیں اور انڈے کو ایک کھردرے افقی سطح پر اس کے
چپٹے سرے کے بل عین متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو اس کے
نوکدار سرے پر ایک نیم کروی برتن کے اندر جس کا نصف قطر

$$\frac{ب\,(ج-ا)}{ج-ب-ا}$$

سے کم ہو متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے جہاں ج انڈے کے طویل ترین محور کا طول
ہے۔ اگر برتن کا نصف قطر فاصل طول کے عین مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن
قائم ہوگا یا غیر قائم۔

۲۳۔ تین متساوی الفصل چکنی کھونٹیاں ا، ب، ج ایک ہی افقی
خط میں ہیں اور ایک وزندار یکساں ڈوری کے سرے ا اور ج سے بندھے
ہیں اور ڈوری کو ب پر حلقہ بناتے ہوۓ گذارا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب
زنجیرے اب، ب ج نامساوی ہوں تو یہ ہو سکتا ہے کہ توازن کا کوئی محل
ہو یا نہ ہو اور اگر ایسا کوئی محل ہے تو یہ توازن قائم ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ توازن کا وہ محل جس میں ڈوری کا وسطی نقطہ ب پر ہے
غیر قائم یا قائم ہے بموجب اس کے کہ توازن کا غیر متشاکل محل موجود یا غیر موجود ہو۔

(۱۸۸)

آٹھواں باب

مستقل قوتوں کے تحت ذرہ کی حرکت

۱۵۴ ۔ کسی واحد ذرہ کی حرکت کی سادہ ترین مثال اُس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ ذرہ صرف مستقل قوتوں کے زیر عمل ہو اور ایک خط مستقیم میں حرکت کرے ۔

اگر ذرہ کی حرکت کی سمت میں قوت کا جزو ترکیبی ف ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے اسراع ع مساوات

ف = ک ع

سے حاصل ہوگا جہاں ک، ذرہ کی کمیت ہے ۔ چونکہ بموجب فرض قوتیں مستقل ہیں اسراع ع بھی مستقل ہے ۔

فرض کرو کہ ذرہ رفتار ۶ سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مستقل اسراع ع کے ساتھ حرکت کرتا ہے ۔ وقت ت میں رفتار میں اضافہ ع ت ہے اور اس لیے وقت ت کے بعد کل رفتار ۶ + ع ت ہے ۔ اس رفتار کو و سے تعبیر کرو تو

و = ۶ + ع ت . . . . (۴۴)

تعریف کی بموجب و = $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ جہاں س، وہ فاصلہ ہے جو حرکت کی ابتدا سے طے ہوا ہے ۔ اس لیے

$$\frac{ذ س}{ذ ت} = ع + ع\ ت$$

اِس مساوات سے کسی لمحہ پر س کے اضافہ کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اس کا تکمل کرنے سے

$$س = ع ت + \frac{1}{2} ع\ ت^2 \qquad (۴۵)$$

تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ وقت ت = ۰ پر فاصلہ طے شدہ (حسب تعریف) س صفر ہونا چاہیئے۔

مساوات (۴۴) سے ع = و ـ ع ت اور اس لیے مساوات (۴۵) لکھی جا سکتی ہے

$$س = و ت - \frac{1}{2} ع\ ت^2 \qquad (۴۶)$$

(۱۸۹) اِس مساوات سے وقت ت میں طے شدہ فاصلہ معلوم ہوتا ہے جبکہ رفتار و معلوم ہو جہاں و فاصلہ طے شدہ کے ختم پر ذرہ کی رفتار ہے۔

مساواتوں (۴۵) اور (۴۶) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$س = \frac{1}{2}(ع + و) ت \qquad (۴۷)$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ فاصلہ طے شدہ، ع ت اور و ت کا اوسط حسابی ہے، ع ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی ابتدائی رفتار ع پورے وقت ت میں قائم رکھتا اور و ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی آخری رفتار و پورے وقت ت میں قائم رکھتا۔

مساوات (۴۴) کو شکل

$$ع ت = (و - ع)$$

میں رکھو اور ت کو اس مساوات اور مساوات (۴۷) سے ساقط کرو تو حاصل ہوگا

$$۲ ع س = و^2 - ع^2 \qquad (۴۸)$$

یہ وہ مساوات ہے جو طے شدہ فاصلہ کو ابتدائی اور آخری رفتاروں کے ساتھ مربوط کرتی ہے۔

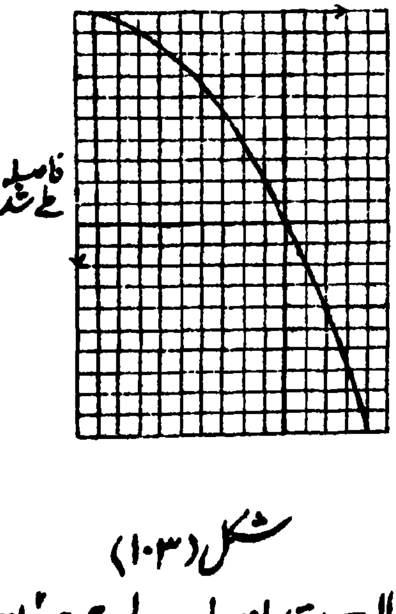
یہ آخری مساوات توانائی کی مساوات سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے
چونکہ ذرہ پر جو کام ہوا ہے وہ اس کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی کے مساوی ہے اس لیے

$$\text{ف س} = \tfrac{1}{2}\,\text{ک و}^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{ک ع}^2$$

اور چونکہ ف = ک ع اس لیے مساوات (۴۸) فوراً حاصل ہو جاتی ہے۔

جسم جو جاذبہ کے تحت گرے

۱۵۵ — ان مساواتوں کا سادہ ترین اطلاق اس صورت پر ہوتا ہے جبکہ کوئی جسم جاذبہ کے زیر اثر آزادانہ گر رہا ہو۔ اس صورت میں اسراع ج ہے اگر جسم سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو ہم ع = ۰ رکھتے ہیں اور س کو انتصاباً نیچے وار پیمائش کرتے ہیں۔ مساوات (۴۵) سے معلوم ہوگا کہ وقت ت کے ختم پر جسم نے فاصلہ $\tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^2$ طے کیا ہے اور اس کی رفتار ج ت ہے۔ فاصلہ ف تک گرنے پر اس کی رفتار حسب مساوات (۴۸) $\sqrt{\text{۲ ج ف}}$ کے مساوی ہے۔ اس کو بالعموم یوں بیان کرتے ہیں کہ وہ "رفتار بوجہ ارتفاع ف" ہے۔



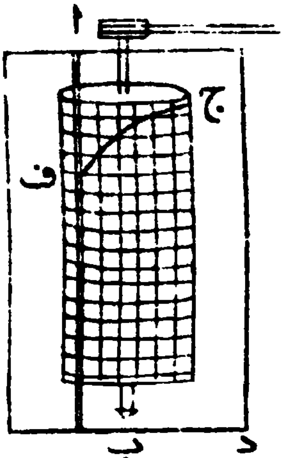
شکل (۱۰۳)

ہم دیکھتے ہیں کہ طے شدہ فاصلہ اس وقت کے مربع کے متناسب ہے جس میں جسم گرتا رہا۔ شکل (۱۰۳) میں وقت کو افقاً پیمائش کیا گیا ہے اور فاصلہ طے شدہ کو انتصاباً۔ جلی منحنی سے فاصلہ طے شدہ کی ترسیمی تعبیر حاصل ہوتی ہے۔ افقی فاصلہ کو لا سے اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر کیا جائے تو لا = ت اور ما = $\tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^2$ اور

اور اس لیے

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{لا}^2$$

۱۵۶ — یہ ایک قطع مکافی کی مساوات ہے۔ اس ترسیم کو تجربتاً اس طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو مارِن (Morin) کا طریقہ کہلاتا ہے۔ وزن ف ایک سوراخ میں جو ایک ڈنڈے ا ب میں بنا ہوا ہوتا ہے انتصاباً گرنے میں آزاد ہوتا ہے اور یہ انتظام کیا جاتا ہے کہ جب وہ گرتا ہے تو اس سے لگی ہوئی ایک پنسل ڈھول ج د پر جس میں کاغذ لگا ہوا ہوتا ہے نشان ڈالتی جاتی ہے۔ ڈھول کو یکساں طور پر گھمایا جاتا ہے۔ کاغذ کو ڈھول سے جدا کر لینے پر شکل (۱۰۴) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے کیونکہ افقی فاصلہ وقت کے متناسب ہوتا ہے اور انتصابی فاصلہ وہ فاصلہ ہوتا ہے جس میں سے وزن گرتا ہے۔ یہ واقعہ کہ اس طریقہ سے حاصل شدہ منحنی ٹھیک طور پر مکافی ہوتا ہے اس حقیقت کا تجربی ثبوت ہے کہ جاذبہ کے تحت حرکت **یکساں** اسراع کی حرکت ہوتی ہے۔



شکل (۱۰۴)

۱۵۷ — اگر جسم کو انتصاباً اوپر وار رفتار ع سے پھینکا جائے تو فاصلہ س کی پیمائش انتصاباً اوپر وار ہو سکتی ہے اور اس سمت میں اسراع −ج ہوگا۔ چنانچہ حاصل ہوگا

$$\text{س} = \text{ع}\,\text{ت} - \frac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{ت}^2 ،$$

$$\text{و} = \text{ع} - \text{ج}\,\text{ت} ،$$

$$2\,\text{ج}\,\text{س} = \text{ع}^2 - \text{و}^2$$

جہاں س وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں اوپر وار طے ہوا ہے اور و اوپر وار

رفتار ہے پہلی مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ س = ۰ نہ صرف اس وقت جبکہ ت = ۰ بلکہ اس وقت بھی جبکہ ت = $\frac{۲ع}{ج}$ ۔ اس لیے ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر وقت $\frac{۲ع}{ج}$ کے بعد واپس پہنچتا ہے ۔ جب س = ۰ تو تیسری مساوات سے $ع^۲ = د^۲$ حاصل ہوتا ہے اس لیے جب ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے تو اس کی رفتار وہی ہوتی ہے جو یہاں سے نکلتے وقت اس کی تھی ۔ صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ توانائی بالقوہ وہی ہوتی ہے اور اسلیے توانائی بالحرکت بھی وہی ۔

مثالیں

۱ ۔ اگر ایک ایکسپرس ٹرین کو دو حصوں میں جدا کر کے نصف اول کو ۵ منٹ قبل چلا دیا گیا ہو اور ٹرین ایک میل تک مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے کے بعد اپنی اعظم رفتار ۴۸ میل فی گھنٹہ حاصل کرے تو ثابت کرو کہ یہ دو نصف حصے ایک دوسرے سے ۴ میل کے فاصلہ سے حرکت کریں گے لیکن نصف اول نصف دوم کے نکلنے سے پیشتر ۳ میل جا چکا ہوگا ۔

۲ ۔ ایک ٹرین دوسری ٹرین سے جو متوازی پٹڑیوں پر دوڑ رہی ہے گذر جاتی ہے، اول الذکر کی رفتار ۴۵ میل فی گھنٹہ اور اسراع ایک فٹ فی ثانیہ ہے، دوسری کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ اور اسراع ۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے ۔ یہ دوسری ٹرین پھر کب پہلی ٹرین کو ملا لے گی اور اس اثنا میں دونوں کتنا فاصلہ طے کر چکی ہوں گی ۔

۳ ۔ ایک جسم کو ایک غبارے سے جو زمین سے ۷۰ فٹ اونچا ہے گرایا گیا ہے ۔ اس کی رفتار زمین پر پہنچنے پر معلوم کرو اگر غبارہ ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے (ا) چڑھ رہا ہو (ب) اُتر رہا ہو ۔

۴ ۔ ایک پتھر کو ایک کنوئیں میں چھوڑا گیا تو پانی سے ٹکرانے کی آواز ۹ ثانیہ

کنویں کے سرے پر سنائی دی۔ کنویں کی گہرائی معلوم کرو اگر آواز کی رفتار ۱۱۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۵۔ ایک آلہ باربردار ۵ فٹ فی ثانیہ کے اسراع سے نیچے اترتا ہے یہاں تک کہ اس کی رفتار ۳۰ فٹ فی ثانیہ ہو جاتی ہے اور اس کے بعد اس کی رفتار مستقل رہتی ہے۔ اترنا شروع کرنے کے ۲ ثانیہ بعد ایک پتھر اس نقطہ سے جہاں سے وہ چلا تھا اس پر گرایا جاتا ہے۔ پتھر کس قدر جلد اس سے جا لگے گا۔

۶۔ ایک بازیگر تین گولوں کو ایک ہاتھ سے اس طرح اچھالتا ہے کہ کسی ان دو گولے ہوا میں رہتے ہیں اور ایک اس کے ہاتھ میں۔ اگر ہر گولا ۱۰ فٹ تک اونچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں ایک گولا اس کے ہاتھ میں رہتا ہے $\frac{1}{2}$ ثانیہ ہے۔

(۱۹۲) ۷۔ یہ مشاہدہ کیا گیا کہ ایک جسم جہاز کے دروازہ کے راستہ سے اس کے پیٹے کی تہ تک گرنے میں جو گ فٹ گہرا ہے ت ثانئے لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ فاصلہ

$$\frac{1}{2}ج\left(\frac{گ}{ج\,ت}+\frac{1}{2}ت\right)^2 \text{فٹ}$$

میں سے گرتا ہے اور رفتار

$$\frac{گ}{ت}+\frac{1}{2}ج\,ت \ \text{فٹ فی ثانیہ}$$

سے تہ پر ٹکراتا ہے۔

۸۔ ۱۲ فٹ لمبی زنجیر اپنے اوپر کے سرے سے لٹک رہی ہے۔ اگر اس سرے کو چھوڑ دیا جائے تو وہ وقت معلوم کرو جو زنجیر ایک نقطہ سے جو ابتدائی عمل کے بلند ترین نقطہ سے ۲۰ فٹ نیچے ہے گذرنے میں لے گی۔

۹۔ ایک جسم جس کی کمیت ۵ پونڈ ہے اور جو ۱۶۰ فٹ فی ثانیہ کی چال سے حرکت کر رہا ہے دفعتاً ایک مستقل مزاحمت کے مقابل ہوتا ہے جو $\frac{1}{4}$ پونڈ وزن کے مساوی ہے، یہ مزاحمت اس وقت تک رہتی ہے کہ

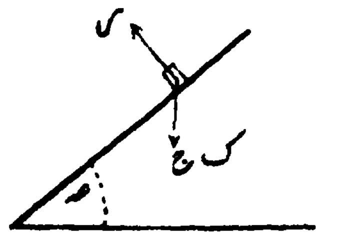
اِس کی رفتار ۹۶ فٹ ہو جاتی ہے۔ کتنی دیر تک اور کتنے فاصلہ تک مزاحمت عمل کرتی ہے۔

۱۰۔ مال کے دو ڈبے باہم جوڑے گئے ہیں اور انہیں افقی پٹڑیوں پر ایکساں قوت سے کھینچا گیا ہے چنانچہ وہ سکون سے حرکت کر کے پہلے دس ثانیوں میں ۱۰۰ فٹ کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ اِس کے بعد پچھلے ڈبے کو جدا کیا گیا تو معلوم ہوا کہ دوسرے دس ثانیوں میں اِن دو ڈبوں کے درمیان فاصلہ ۱۵۰ فٹ ہے۔ ڈبوں کی کمیتوں کا مقابلہ کرو جبکہ ہوا وغیرہ کی کل مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہو۔

۱۱۔ ایک غبارہ جس کا وزن و ہے اسراع ع سے چڑھ رہا ہے۔ اگر اِس میں سے وزن و کی ریت نکال لی جائے تو غبارے کے اسراع میں اضافہ معلوم کرو جبکہ ہوا کی مزاحمت اور ریت کا تیراؤ نظر انداز کئے گئے ہوں۔

مائل مستوی پر حرکت

۱۵۸ ۔ فرض کرو کہ ہم ایک ذرہ کو ایک مائل مستوی پر نیچے پھسلنے دیتے ہیں جبکہ اِن دو کے درمیان تماس کامل چکنا تسلیم کر لیا گیا ہو۔ اگر ذرہ کی کمیت ک ہے تو اِس پر عمل کرنے والی قوتیں دو ہیں، اِس کا وزن ک ج اور تعامل ر جو مستوی پر عمود ہے۔ وزن کا جزو ترکیبی مستوی کے نیچے وار ک ج جب ع ہے اور اِس لیے ذرہ یکساں اسراع ج جب ع سے حرکت کرتا ہے۔

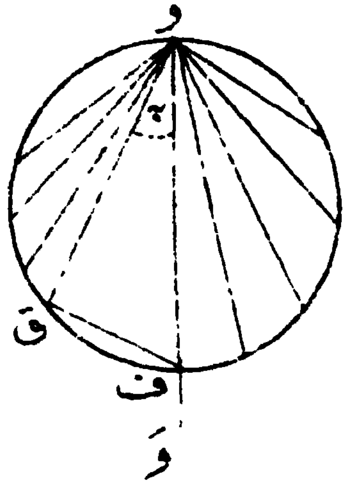


شکل (۱۰۵)

وقت ت میں جو فاصلہ طے ہوتا ہے اِس کو معمولی ضابطوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر ذرہ حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرے تو وقت ت میں وہ فاصلہ $\frac{1}{2}$ ج جب ع × ت^2 طے کرے گا۔

۱۵۹ ۔ فرض کرو کہ نقطہ و سے بہت سے چکنے تار جن میں چکنے منکے آزادانہ

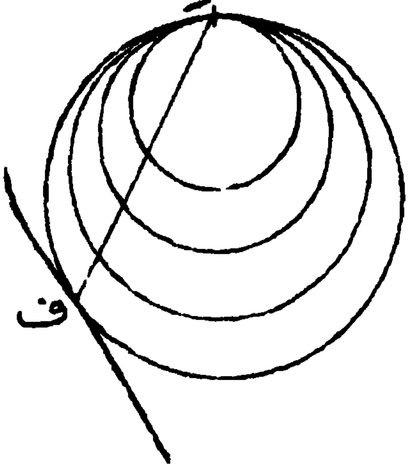
پھسل سکتے ہیں لگائے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ تار سمت انتصابی کے ساتھ تمام ممکن (۱۹۳)
زاوئے بناتے ہیں اور ان میں سے
ایک تار و وَ انتصابی ہے۔
خیال کرو کہ سب منکے نقطہ و پر
جمع ہیں اور ایک ساتھ چھوڑے
گئے ہیں۔ وقت ت کے بعد
فرض کرو کہ وہ منکا جو انتصابًا گر رہا
ہے نقطہ ف پر ہے اور وہ منکا
جو اس تار پہ پھسلتا ہے جو انتصابی
سے زاویہ ہ بناتا ہے نقطہ ق
پر ہے۔ یہ دوسرا منکا اسراع
ج جم ہ سے حرکت کرتا ہے۔



شکل (۱۰۶)

پس وف = $\frac{1}{2}$ ج ت² اور وق = $\frac{1}{2}$ ج جم ہ × ت²، اس لیے
وق = وف جم ہ اور اس لیے وق ف قائمہ زاویہ ہے۔ اس سے
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق اس کرہ پر ہے جس کو قطر و ف پر بنایا گیا ہو اور صریحًا
یہ ہر دیگر منکے کے لیے درست ہے۔ اس طرح کسی لمحہ پر تمام منکے اس کرہ پر ہونگے
جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جس کا زیرترین نقطہ و کے نیچے $\frac{1}{2}$ ج ت²
فاصلہ پر ہے۔ پس جب حرکت جاری رہتی ہے تو منکے ایک کرہ بناتے
ہوئے نظر آئیں گے جو جسامت میں مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس کا بلندترین
نقطہ و پر ساکن رہے گا اور زیرترین نقطہ جاذبہ کے تحت آزادانہ گرتا ہوا معلوم
ہوگا۔

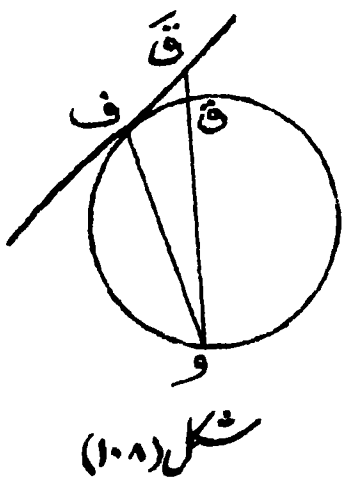
۱۶۰ — اس خیالی تجربہ سے ایک عملی مسئلہ کو حل کرنے کا طریقہ حاصل
ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم ایک چکنے مستوی یا تار کو ایسے محل میں رکھنا چاہتے
ہیں کہ ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و سے مستوی یا نلہ پر نیچے گذرتے ہوئے
ایک معلومہ ثابت سطح تک کم سے کم ممکن وقت میں پہنچ جائے۔ فرض کرو کہ



شکل (۱۰۷)

ہم تاروں اور منکوں کے آلہ کو و پر رکھتے ہیں اور منکوں کو ایک ساتھ چھوڑتے ہیں اور اس کرہ کی جسامت کا اضافہ مشاہدہ کرتے ہیں جو منکوں سے بنتا ہے۔ جوں ہی کرہ ایسی جسامت اختیار کرتا ہے کہ وہ ثابت سطح کو کسی نقطہ ف پر مس کرنے لگتا ہے
منکوں میں سے ایک منکا اس سطح پر (۱۹
پہنچ چکتا ہے اور مزید برین دوسرے منکوں کی بہ نسبت کم وقت میں پہنچ جاتا ہے۔ اس لیے اس نے و سے سطح تک وہ راستہ اختیار کیا ہے جس پر سے وہ سطح تک جلد سے جلد پہنچ جاتا ہے۔ یہ راستہ و ف ہے اور اب ہم اس راستہ کا تعین بغیر تجربہ کی تکمیل کے کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ وہ کرہ جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جو ف میں سے گذرتا ہے سطح کو ف پر مس کرنا چاہئیے۔

اسی طرح اگر ہم وہ اقل وقت معلوم کرنا چاہیں جس میں ذرہ ایک سطح سے اس کے نیچے کے ایک ثابت نقطہ و تک حرکت کرتا ہے تو ایک ایسا کرہ معلوم کرنا ہوگا جو سطح کو نقطہ ف پر مس کرے اور اس کا زیریں ترین نقطہ و ہو۔ تب و ف مطلوبہ راستہ ہوگا۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس کرہ کے ان تمام وتروں پر سے گزرنے میں جو و میں سے کھینچے گئے ہوں جو وقت صرف ہوتا ہے ایک ہی ہے اس لئے ف و پر سے



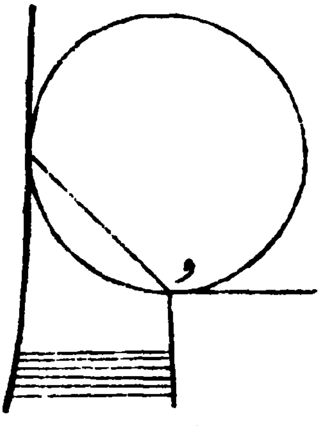
شکل (۱۰۸)

گذرنے میں جو وقت صرف ہوگا وہ اُس وقت کے مساوی ہے جو کسی وتر ق و پر سے گذرنے میں صرف ہوتا ہے اور اس لیے یہ وقت اُس وقت سے کم ہے جو سطح سے و تک پورے راستہ قَ و پر سے گذرنے میں لگتا ہے کیونکہ ق و اِس راستہ کا ایک حصہ ہے ۔

توضیحی مثال

ایک جہاز اپنے چبوترے سے کچھ فاصلہ پر کھڑا ہے اور جہاز کے رُخ کے کسی نقطہ پر چبوترے سے ایک تختہ اس طرح رکھنا مطلوب ہے کہ تختہ پر جہاز سے چبوترے تک پھسلنے کا وقت حتی الامکان کم سے کم ہو ۔

صریحاً تختہ کا نچلا سرا چبوترے کے قریب ترین نقطہ و پر ٹکنا چاہیئے اور مسئلہ کا حل اِس مسئلہ پر منحصر ہو جاتا ہے کہ ایک کرہ کھینچا جائے جس کا زیر ترین نقطہ و ہو اور وہ جہاز کے رُخ کو مس کرے ۔ یہ تسلیم کر کے کہ جہاز کا رُخ انتصابی ہے تختہ کے سروں پر کرہ کے مماس افقی اور انتصابی ہونے چاہئیں اور اس لیے تختہ کو اس طرح رکھنا چاہیئے کہ وہ سمت انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے ۔



(۱۹۵)

شکل (۱۰۹)

مثالیں

۱ ۔ ایک جسم کو مائل مستوی پر جس کا زاویہ میلان ۴۵° ہے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے ۔ معلوم کرو کہ وہ مستوی کے اوپر کتنی دور جائے گا اور اوپر جانے میں کتنا وقت لگے گا ۔

۲ ۔ دو ذرّے ایک دوہرے مائل مستوی کے دو رخوں پر جن کے میلان

ء اور ب ہیں نیچے پھسلتے ہیں سُتوی کے قاعدے تک پہنچنے میں جو اوقات وہ لیتے ہیں اُن کا مقابلہ کرو اور نیز اِنکی رفتاروں کا مقابلہ بھی کرو۔

۳۔ طول ل اور ارتفاع ف کے ایک مائل مستوی پر اس کی چوٹی سے ایک جسم نیچے پھینکا گیا ہے اور اسی آن ایک دوسرے ذرہ کو انتصاباً نیچے گرنے کیلیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں ذرّے قاعدہ سے ایک ہی وقت ٹکرائیں تو ثابت کرو کہ پہلے ذرہ کی رفتار پھینکتے وقت

$$\frac{ل^2 - ف^2}{ل} \sqrt{\frac{ج}{2ف}}$$

ہونی چاہئے۔

۴۔ ایک ثابت نقطے سے ایک دائرہ تک جو اُسی سُتوی میں ہے سریع ترین اُتار کا خط معلوم کرنے کے لیے عمل دریافت کرو۔

۵۔ ذرّے متعدد تاروں پر جو ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں نیچے پھسل رہے ہیں، اِن ذروں نے اس نقطہ سے حالت سکون سے ایک ساتھ حرکت شروع کی تھی۔ ثابت کرو کہ کسی لمحہ پر اِن کی رفتاروں میں وہی نسبت ہے جو اِن کے طے کردہ فاصلوں میں ہے۔

۶۔ ریل کا ایک ڈبہ ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۲۵۰ میں ۱ ہے ۱۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے نیچے حرکت کرتا ہے اور سطح کے پائیں پر پہنچنے کے بعد ہموار سطح پر حرکت جاری رکھتا ہے۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی دور حرکت کرسکے گا جبکہ یہ فرض کرلیا گیا ہو کہ مزاحمت مستقل ہے اور حرکت کی ہر منزل میں وہی ہے۔

۷۔ اگر ایک موٹر گاڑی جو ۱۰۰ کیلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے جارہی ہو ۲۰۰ میٹر کے فاصلہ میں روکی جاسکے تو ثابت کرو کہ بریک گاڑی کو تقریباً ۵ میں ۱ میلان پر ٹھیرا سکتے ہیں۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جس میں گاڑی کو ساکن کیا جاسکتا ہے۔

۸۔ ۱۲ ٹن وزنی ڈبہ ایک ٹرین سے جو ۲۵۰ میں ۱ میلان پر نیچے ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے الگ ہوجاتا ہے۔ رگڑ کی مزاحمت ۴۰ پونڈ وزن

فی ٹن ہے۔ معلوم کرو کہ ڈبہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی دُور جائے گا۔

۹۔ حرکہ کی کھینچ ایک ٹرین کی حرکت پر معمولی مزاحمتوں کے مقابلہ میں اسکے کُل وزن کا $\frac{1}{۴۰}$ بڑی ہے، اور جب بریک پوری طرح ڈالے جاتے ہیں تو کُل مزاحمت اسکے وزن کا $\frac{1}{۱۵}$ واں حصہ ہوتی ہے۔ وہ کم سے کم وقت معلوم کرو جس میں ٹرین ہموار سطح پر دو اسٹیشنوں کے درمیان جن کا درمیانی فاصلہ تین میل ہے اور جہاں گاڑی ٹھیرتی ہے سفر کرسکتی ہے۔

۱۰۔ مثال ماسبق میں وقت معلوم کرو اگر راستہ ۱۰۰ میں ۱ میلان پر ہو۔

ایٹوڈ کی مشین

۱۶۱۔ اگر کوئی جسم جاذبہ کے تحت آزادانہ گر رہا ہو تو راست مشاہدات سے اس اسراع کو پیمائش کرنا مشکل ہوتا ہے جو جاذبہ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے کیونکہ یا تو وہ فاصلہ جس میں سے جسم گرتا ہے بہت بڑا ہونا چاہئے یا گرنے کا وقت بہت کم ہونا چاہئے۔ یہ مشکلیں کچھ حد تک اس مشین سے رفع ہوتی ہیں جو ایٹوڈ کی تجویز کردہ ہے۔

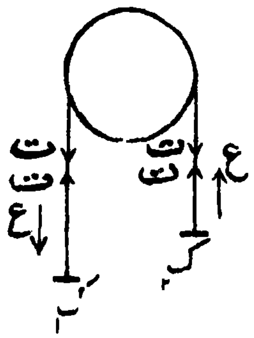
(۱۹۶) اگر ایک ڈوری کو جس کے سروں سے دو مساوی اوزان بندھے ہوں ایک چکنی انتصابی چرخی پر اس طرح رکھا جائے کہ اوزان آزادانہ لٹکیں تو یہ ظاہر ہے کہ توازن ہوگا۔ اگر اوزان نامساوی ہوں تو توازن موجود نہیں ہوسکتا۔ ایٹوڈ کی مشین میں ان اوزان کے درمیان فرق کم رکھا جاتا ہے، اس لئے حرکت سُست ہوتی ہے اور اس کی پیمائش آسانی سے کی جاسکتی ہے۔

فرض کرو کہ اوزان کی کمیتیں ک$_1$، ک$_2$ ہیں جن میں سے ک$_1$ بڑا ہے۔

فرض کرو کہ جب ان اوزان کو آزاد چھوڑ دیا جاتا ہے تو ک$_1$، اسراع ع سے نیچے اُترتا ہے۔ ڈوری کو ناامتدادپذیر سمجھنے سے ک$_2$ کو اسراع ع سے اوپر چڑھنا چاہئے۔

فرض کرو کہ ڈوری غیر وزنی ہے اور اس لیے اس کے کسی عنصر کی کمیت کو نظرانداز کیا جاسکتا ہے۔ پس حرکت کے دوسرے قانون سے

معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری کے کسی عنصر پر عمل کرنے والی حاصل قوت معدوم ہونی چاہیئے۔ اس لیے ڈوری پر عمل کرنے والی قوتیں توازن میں ہونی چاہئیں (اگرچہ کہ ڈوری ساکن نہیں ہے) اور اس لیے حسب دفعہ (۵۴) تمام نقطوں پر تناؤ وہی ہونا چاہیئے، فرض کرو کہ یہ تناؤ ت ہے۔



شکل (۱۱۰)

کمیتوں ک_1، ک_2 میں سے ہر ایک پر عمل کرنے والی قوتیں اس کے وزن پر جو نیچے وار عمل کرتا ہے اور ڈوری کے تناؤ پر جو اوپر وار عمل کرتا ہے مشتمل ہیں۔ اس لیے ان دو کمیتوں پر نیچے وار حاصل قوتیں علی الترتیب $\text{ک}_1\text{ج} - \text{ت}$ اور $\text{ک}_2\text{ج} - \text{ت}$ ہیں۔ پس حرکت کی مساواتیں ہیں

$$\text{ک}_1\text{ج} - \text{ت} = \text{ک}_1\text{ع}$$

$$\text{ک}_2\text{ج} - \text{ت} = -\text{ک}_2\text{ع}$$

اگر ت کو ساقط کیا جائے تو

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\,\text{ج} \qquad (۴۹)$$

جس سے اسراع معلوم ہوتا ہے۔ اگر ع کو ساقط کیا جائے تو ت کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\text{ت} = \frac{۲\,\text{ک}_1\text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\,\text{ج} \qquad (۵۰)$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر ک_1 تقریباً ک_2 کے مساوی ہو تو اسراع چھوٹا ہوگا۔ مثلاً اگر اوزان ۱۰۰ اور ۱۰۱ گرام ہوں تو

$$\text{ع} = \frac{1}{201}\,\text{ج} = ۰ء۱۶ \text{ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ}$$

(۱۹۷) اتنا چھوٹا اسراع آسانی سے پیمائش کیا جا سکتا ہے کیونکہ زیادہ وزنی کمیت ۱۰ ثانیوں میں صرف ۸ فٹ نیچے اترے گی۔ عملاً یہ دشواری پیدا ہوتی ہے کہ اگر وزنوں کے فرق کو بہت چھوٹا کر دیا جائے تو چرخی پر عمل کرنے والی قوتیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ ان کا فرق سہاروں کی رگڑ وغیرہ پر غالب آنے کے لیے کافی نہیں ہوتا۔

متحرک فریم کے حوالے سے حرکت

۱۶۲ — ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۵) کہ حرکت کا دوسرا قانون درست رہتا ہے جبکہ حرکت کو ایک ایسے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا گیا ہو جو ساکن نہیں ہے بلکہ یکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اب اس قانون میں ترمیم کرنا آسان ہے جبکہ حوالے کا فریم ایک معلومہ اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ حوالے کے فریم کا اسراع عہ ہے اور فرض کرو کہ اس اسراع عہ کی سمت میں ایک متحرک ذرہ کے اسراع کا جزو ترکیبی ع ہے اور فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا جزو ترکیبی اس سمت میں ف ہے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

$$ف = ک\ عَ \qquad (۵۱)$$

جہاں عَ وہ ترکیبی اسراع ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے لیکن اس اسراع عَ کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے جن میں سے ایک ذرہ کا اسراع ع ہے جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے اور دوسرا اس فریم کا اسراع عہ ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔ چونکہ یہ سب اسراع ایک ہی سمت میں ہیں اس لیے عَ = ع + عہ اور اسلیے مساوات (۵۱) ہو جاتی ہے

$$ف = ک\ (ع + عہ)$$

اس کو ہم شکل

$$ف - ک\ عہ = ک\ ع \qquad (۵۲)$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ حرکت وہی ہے گویا کہ فریم ساکن ہے بشرطیکہ ہم خیال کریں کہ قوت ف کو بقدر ک عہ کے گھٹا دیا گیا ہے۔

اس نتیجہ کی طبیعی توجیہ آسانی سے کی جا سکتی ہے۔ قوت ف کا ایک حصہ جو ک عہ کے مساوی ہے ذرہ کو متحرک حوالے کے فریم کی حرکت کے ساتھ متحرک کرنے میں صرف ہوتا ہے۔ صرف مابقی حصہ ف - ک عہ ہی ہے جو متحرک فریم کے لحاظ سے اسراع پیدا کرنے میں کارآمد ہے۔

۱۶۳ — فریم جو انتصابی اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔ (۱۹۸)

اگر حوالے کا فریم اسراع عہ کے ساتھ نیچے وار انتصاباً حرکت کرے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس فریم کے لحاظ سے اسراعوں کو پیمائش کرنے سے پیشتر کمیت ک کے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے انتصابی جزو ترکیبی کو بقدر ک عہ کے تخفیف شدہ سمجھنا چاہیئے۔ خواہ کوئی قوتیں عمل کریں ان میں ذروں کے اوزان ک ج وغیرہ ضرور ہوں گے۔ ہم بہ آسانی تخفیف ک عہ کو ان سے وضع کردہ فرض کر سکتے ہیں چنانچہ کسی ذرہ کے وزن کو ک ج لینے کی بجائے ک (ج - عہ) لینا ہوگا۔

اس طرح حوالے کے فریم کے اسراع کی رعایت یہ فرض کر کے رکھی جا سکتی ہے کہ اسراع بوجہ جاذبہ ج کی بجائے ج - عہ میں تخفیف ہوا ہے۔

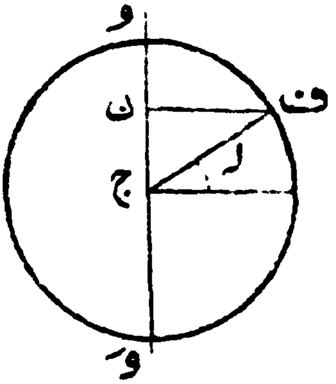
مثلاً اگر ایٹوڈ کی مشین کو آلہ باربردار میں رکھا جائے تو اس آن جس پر آلہ کا اسراع اوپر وار عہ ہو کمیتوں کا اسراع مشین کے لحاظ سے (مقابلہ کرو مساوات ۹۴ کے ساتھ)

$$ع = \frac{ک_1 - ک_2}{ک_1 + ک_2}\,(ج + عہ)$$

ہوگا اور ڈوری کا تناؤ (دیکھو مساوات (۵۰))

$$ت = \frac{۲ک_۱ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} (ع + ے)$$ ہوگا۔

۱۶۴۔ ج کی قیمت پر زمین کی گردش کا اثر۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۵) کہ حوالے کا فریم جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ثابت ہو زمین کے محور کے گرد اس کی گردش کے باعث ایک اسراع رکھتا ہے۔



شکل (۱۱۱)

فرض کرو کہ زمین کا محور و وَ ہے اور فرض کرو کہ زمین کی سطح پر عرض بلد لہ میں کوئی نقطہ ف ہے۔ زمین کو نصف قطر ا کا ایک کرہ سمجھنے سے نقطہ ف، نصف قطر ا جم لہ کا ایک دائرہ مرتسم کریگا جس کا مرکز زمین کے محور پر نقطہ ن ہوگا۔ اگر وہ رفتار ہو جس سے نقطہ ف یہ دائرہ مرتسم کرتا ہے تو ف کا اسراع حسب دفعہ ۱۲، $\frac{و^۲}{ا جم لہ}$ دائرہ کے مرکز کی جانب ہوگا یعنی ف ن کی سمت میں۔

(۱۹۹) فرض کرو کہ زمین کی زاوئی رفتار سہ ہے یعنی فرض کرو کہ وہ فی اکائی وقت سہ نیم قطری زاوئیے میں سے گردش کرتی ہے۔ اب جس وقت میں ف ایک مکمل دائرہ مرتسم کرتا ہے اسی وقت میں زمین ایک مکمل گردش کر لیتی ہے یعنی $\frac{۲\pi}{سہ}$، یہ وقت $\frac{۲\pi ا جم لہ}{و}$ کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے

$$و = ا\, سہ\, جم\, لہ$$

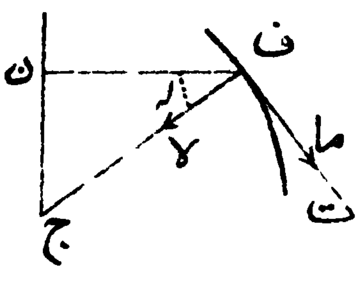
اب حوالے کے فریم کا اسراع سمت ف ن میں

$$\frac{و^۲}{ا جم لہ} = سہ^۲ ا جم لہ$$

ہے۔ اس لیے اُس فریم کے حوالے سے جو ف کے ساتھ حرکت کر رہا ہے کسی ذرہ کی حرکت کو محسوب کیا جا سکتا ہے گویا کہ حوالے کا فریم ساکن ہے بشرطیکہ سمت ف ن میں قوت کے جزو ترکیبی کو بقدر ک سہ۲ ا جم لہ کے گھٹا دیا گیا ہو۔

پس کل قوت عاملہ اُن قوتوں پر جو فی الواقعی عمل کرتی ہیں اور ایک قوت ک سہ۲ ا جم لہ پر جو سمت ن ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جائے مشتمل بھی جا سکتی ہے۔ اس آخری قوت کو زمین کی کشش کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک قوت حاصل ہوگی جس کو ہم ف پر جاذبہ کی ظاہری قوت کہہ سکتے ہیں۔ اس طرح حوالے کے فریم کی حرکت کی رعایت زمین کی اصلی کشش کی بجائے جاذبہ کی ظاہری قوت کو استعمال کرنے سے رکھی جاتی ہے۔ یہی وہ ظاہری جاذبہ ہے جو تجربی طور پر متعین ہوتا ہے اور ہمیشہ کسی نقطہ پر ذرہ کے وزن سے یہی جاذبہ مراد لیا جاتا ہے۔

نقطہ ف پر کسی جسم کا ظاہری وزن معلوم کرنے کے لیے اس کے اصلی وزن (فرض کرو) ک ج کو ایک قوت ک سہ۲ ع جم لہ کے ساتھ جو ن ف پر عمل کرتی ہے مرکب کرنا ہوگا۔ فرض کرو کہ اس آخری قوت کو سمتوں ف ج اور ف ت میں اجزائے ترکیبی ک سہ۲ ا جم۲ لہ، ک سہ۲ ا جم لہ جب لہ میں تحلیل کیا گیا ہے جہاں ف ت نقطہ ف پر مماس ہے۔



شکل (۱۱۲)

سمت ف ج میں عمل کرنے والی قوت ک ج کے ساتھ مرکب کرنے سے ظاہری وزن کے اجزائے ترکیبی لا، ما علی الترتیب سمتوں ف ج، ف ت میں حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں

لا = ک (ج ـ سہ۲ ا جم۲ لہ) (۵۳)

ما = ک سہ۲ ا جم لہ جب لہ (۵۴)

مربع لینے اور جمع کرنے اور ظاہری وزن کو حسب معمول ک ج' سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے (۲۰۰)

$$\text{ک}^2\text{ج}'^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ک}^2(\text{ج}^2 - 2\,\text{سہ}^2\,\text{ا}\,\text{ج}\,\text{جم}^2\text{لہ} + \text{سہ}^4\,\text{ا}^2\,\text{جم}^2\text{لہ}) \qquad (۵۵)$$

زمین کے قطر کو ۷۹۲۰ میل اور ج کی قیمت کو ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ بوجہ جاذبہ عرض بلد ۲۵ درجہ ۲۳ فٹ سے آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{سہ}^2\,\text{ا}}{\text{ج}} = \frac{1}{290}\ \text{تقریباً}$$

اس کا مربع اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کو پہلے تقرب کی حد تک نظرانداز کیا جا سکتا ہے اور مساوات (۵۵) کو شکل

$$\text{ج}' = \text{ج} - \text{سہ}^2\,\text{ا}\,\text{جم}^2\text{لہ}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اس طرح عرض بلد لہ میں ظاہری وزن اصلی وزن سے بقدر ک سہ² ا جم² لہ کے کم ہوتا ہے یا تقریباً کل وزن کا $\frac{1}{290}$ جم² لہ کے کم ہوتا ہے۔

ظاہری وزن نصف قطر ج ف پر عمل نہیں کرتا۔ اگر ہم اس کو نصف قطر کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہوئی سمت میں عمل کرتا ہوا فرض کریں تو مساواتوں (۵۳) اور (۵۴) سے حاصل ہوگا

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{سہ}^2\,\text{ا}\,\text{جم لہ جب لہ}}{\text{ج} - \text{سہ}^2\,\text{ا}\,\text{جم}^2\text{لہ}}$$

$$= \frac{1}{290}\,\text{جم لہ جب لہ، تقریباً}$$

اس سے کسی نقطہ پر زمین کے نصف قطر سے خط شاقول کا انحراف حاصل ہوگا۔

متحرک اجسام کے درمیان رگڑ کے تعاملات

۱۶۵۔ تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ ربط

ف = مہ ر

(جس میں ف اور ر، دو اجسام کے درمیان تعامل کے مماسی اور عمادی اجزائے ترکیبی ہیں) بڑی حد تک درست رہتا ہے جبکہ اجسام ایک دوسرے پر سے پھسل رہے ہوں۔ رگڑ کی قدر مہ کی قیمت بالکل وہی نہیں ہوتی ہے جو اجسام کے ساکن ہونے کی صورت میں ہوا کرتی ہے بلکہ حرکت کی صورت میں مہ کی قیمت ہمیشہ قدرے بڑی ہوتی ہے۔

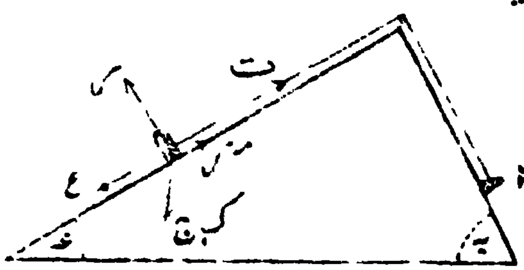
دو جسموں کے درمیان رگڑ جبکہ اجسام ایک دوسرے پر پھسل رہے ہوں حرکی رگڑ کہلاتی ہے، لیکن اگر اجسام ساکن ہوں تو اس کو سکونی رگڑ کہتے ہیں۔

توضیحی مثالیں

۱۔ کمیتیوں ک اور ک۲ کے دو ذرے، زاویوں عہ اور بہ کے دو مائل مستویوں پر جو ایک دوسرے سے جُڑے ہوئے ہیں رکھے ہیں اور وہ ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط ہیں جو مستویوں کے سرے پر کی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔ اگر ذروں اور مستویوں کے درمیان رگڑ کی قدریں مہ۱، مہ۲ ہوں تو حاصل حرکت معلوم کرو۔

اگر حرکت فی الواقعی وقوع پذیر ہوتی ہے تو ایک ذرہ ک۱ (فرض کرو) کو اپنے مستوی پر نیچے وار حرکت کرنی چاہیئے اور دوسرے ک۲ کو اوپر وار۔ چونکہ ڈوری نا امتداد پذیر ہے اس لیے ہر ایک ذرہ کا اسراع وہی ہوگا، فرض کرو کہ یہ اسراع سمت حرکت میں ع ہے۔

پہلے ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:



(ا) اس کا وزن $\text{ک}_1\text{ج}$ انتصاباً نیچے وار،

(ب) ڈوری کا تناؤ ت مستوی کے اوپر وار،

(ج) مستوی کا تعامل - فرض

شکل (۱۱۴)

کرو کہ اِس کو مستوی کے عمودوار اور مستوی کے اوپر وار سمت میں اجزاء ر اور مہ ر میں تحلیل کیا گیا ہے۔

چونکہ مستوی کے عماد کی سمت میں ذرہ ک_1 کا اولی اسراع نہیں ہے اس لئے حاصل قوت کا جزو ترکیبی اِس سمت میں صفر ہونا چاہئے۔ پس اِس سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\text{ر} - \text{ک}_1\text{ج جم عہ} = 0$$

مستوی کے نیچے وار تحلیل کرنے سے

$$\text{ک}_1\text{ج جب عہ} - \text{مہ ر} - \text{ت} = \text{ک}_1\text{ع}$$

اور اگر ہم نامعلوم تعامل ر کو ساقط کریں تو

$$\text{ک}_1\text{ج (جب عہ} - \text{مہ جم عہ)} - \text{ت} = \text{ک}_1\text{ع} \qquad \text{(ا)}$$

اسی طرح کی مساوات دوسرے ذرہ کی حرکت کے لیے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یعنی

$$\text{ک}_2\text{ج (جب بہ} + \text{مہ جم بہ)} - \text{ت} = -\text{ک}_2\text{ع} \qquad \text{(ب)}$$

ع کے لیے اِن مساواتوں (ا) اور (ب) کو حل کرنے سے اسراع حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}_1\text{(جب عہ} - \text{مہ جم عہ)} - \text{ک}_2\text{(جب بہ} + \text{مہ جم بہ)}}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\,\text{ج} \qquad \text{(ج)}$$

اگر ع کی یہ قیمت منفی نکلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اُس سمت میں نہیں ہو سکتا

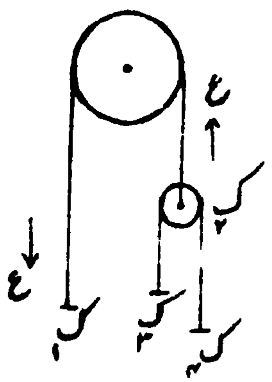
جس میں حرکت کا واقع ہونا ہم نے فرض کیا ہے۔

اگر نظام سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو مفروضہ سمت میں حرکت ناممکن معلوم ہوتی ہے اور ہمیں اس کا امتحان کرنا چاہئے کہ آیا مخالف سمت میں حرکت ممکن ہے۔ اگر یہ بھی ناممکن معلوم ہو جائے تو نظام ساکن رہے گا۔

لیکن اگر سمت مفروضہ میں نظام متحرک ہوا ہے تو مساوات (ج) (۲۰۲)
سے حاصل شدہ اسراع عمل میں آجائے گا اور وہ مثبت ہوگا تو رفتار میں اضافہ ہوگا اور منفی ہوگا تو رفتار گھٹیگی۔ اس آخری صورت میں نظام کسی وقت ساکن ہو جائے گا اور پھر ہمیں امتحان کرنا چاہئے کہ آیا وہ سمت مخالف میں حرکت کرنا شروع کرے گا یا نہیں۔

۲ ۔ اٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے کمیت $ک_۱$ کا ایک وزن بندھا ہے۔ دوسرے سرے پر کمیت $ک_۲$ کی ایک چرخی لگی ہوئی ہے جس پر سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے سروں سے کمیتیں $ک_۳$، $ک_۴$ لٹک رہی ہیں۔ حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کمیت $ک_۱$ کا اسراع ع ہے جس کو نیچے وار پیمائش کیا گیا ہے تب $ک_۲$ کا اسراع اوپر وار ع ہونا چاہئے۔



شکل (۱۱۴)

کمیتیں $ک_۳$، $ک_۴$ سے خود ایک اٹوڈ کی مشین کا نظام حاصل ہوگا جو کُل کا کُل اسراع ع سے اوپر وار حرکت کرے گا۔ پس اس مشین کی ڈوری کا تناؤ $ت_۱$ (فرض کرو) حسب ذیل ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۳):

$$ت_۱ = \frac{۲ک_۳ک_۴}{ک_۳ + ک_۴}(ج + ع)، \quad (ل)$$

اگر اس ڈوری کے تناؤ کو جو $ک_۱$ اور $ک_۲$ کو ملاتی ہے $ت_۲$ سے تعبیر کریں

ک۲ کے لئے حرکت کی حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ت}_{2} - \text{ک}_{2}\,\text{ج} - 2\,\text{ت}_{1} = \text{ک}_{2}\,\text{ع} \qquad (\text{ب})$$

اور ک۱ کے لئے حرکت کی مساوات ہے

$$\text{ک}_{1}\,\text{ج} - \text{ت}_{2} = \text{ک}_{1}\,\text{ع} \qquad (\text{ج})$$

مساواتوں (ا)، (ب)، (ج) سے ت۱ اور ت۲ کو ساقط کرنے سے اسراع ع کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}_{1} - \text{ک}_{2} - \dfrac{4\,\text{ک}_{2}\text{ک}_{3}}{\text{ک}_{2} + \text{ک}_{3}}}{\text{ک}_{1} + \text{ک}_{2} + \dfrac{4\,\text{ک}_{2}\text{ک}_{3}}{\text{ک}_{2} + \text{ک}_{3}}}\,\text{ج}$$

کمیتوں ک۲، ک۳ کے اسراع بلحاظ ک۲ کے دفعہ ۱۶۴ کی رو سے حسب ذیل معلوم ہوتے ہیں:-

$$\pm \frac{\text{ک}_{2} - \text{ک}_{3}}{\text{ک}_{2} + \text{ک}_{3}}\,(\text{ج} + \text{ع})$$

۳ — ایک افقی دائرہ پر مساوی فاصلوں سے ن چھوٹے چکنے چھلے ثبت کردئے گئے ہیں اور ان حلقوں میں سے ایک بے سرا تاگا بالترتیب گذرتا ہے۔ اگر چھلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیانی حصہ کے تاگے سے علی الترتیب کمیتوں ف، ق، ر، ... کی ن چرخیاں بھاری گئی ہوں اور ڈوری کے وہ حصے جو چرخیوں کو مس نہیں کرتے انتصابی ہوں تو ثابت کرو کہ چرخی ف کا اسراع

$$\frac{\dfrac{1-\text{ن}}{\text{ف}} + \dfrac{1}{\text{ق}} + \dfrac{1}{\text{ر}} + \cdots}{\dfrac{1}{\text{ف}} + \dfrac{1}{\text{ق}} + \dfrac{1}{\text{ر}} + \cdots}\,\text{ج}$$

کے ساتھ نیچے اترے گی (۲۰۳)

ڈوری کا تناؤ اپنے پورے طول پر وہی ہونا چاہیے، فرض کرو کہ یہ تناؤ ت ہے۔ اگرچہ خبوں کے اسراع سب کے سب نیچے دار پیمائش شدہ $ع_ف$، $ع_ق$ ..... ہوں تو حسب ذیل نمونے کی حرکت کی مساواتیں حاصل ہونگی

$$ف\, ج - ۲ت = ف\, ع_ف \qquad (ا)$$

اور اس نمونے کی مساوات ہر چرخی کے لیے ایک ہوگی۔ ان مساواتوں میں نامعلوم مقدار ت اور ن نامعلوم مقداریں $ع_ف$، $ع_ق$، ..... داخل ہوتی ہیں۔

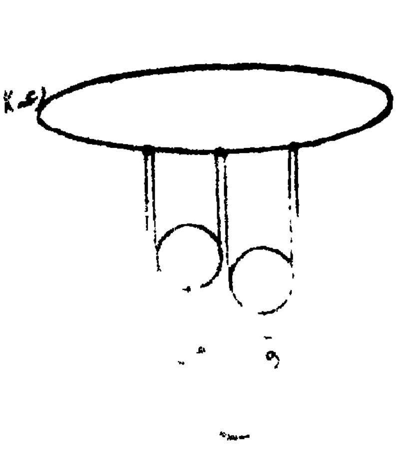
اس طرح نامعلوم مقداروں کی تعداد ن + ۱ ہے اور ان میں صرف ن مساواتیں اب تک حاصل ہوئی ہیں۔ اس لیے ایک اور مساوات چاہیے اور یہ مساوات اس امر سے حاصل ہوتی ہے کہ اسراع $ع_ف$، $ع_ق$، ..... غیر تابع نہیں ہو سکتے کیونکہ ڈوری کا طول غیر متغیر رہنا چاہیے۔

فرض کرو کہ افقی دائرہ کے نیچے ف، ق، ... کی گہرائیاں $گ_ف$، $گ_ق$ ... سے تعبیر ہوتی ہیں تو

$$گ_ف + گ_ق + ...$$

کو پوری حرکت میں مستقل ہونا چاہیے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$ع_ف + ع_ق + ... = ۰$$



اب مساوات (ا) سے $ع_ف$، $ع_ق$ .... کی قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(ج - \frac{۲ت}{ف}\right) + \left(ج - \frac{۲ت}{ق}\right) + ... = ۰$$

اس لیے

$$۲ت = \frac{ن\, ج}{\frac{۱}{ف} + \frac{۱}{ق} + ...}$$

اور مساوات (ل) میں ۲ ت کی بجائے یہ قیمت درج کرنے پر ع ن کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایٹوڈ کی مشین میں ڈوری کا تناؤ اس سے لٹکی ہوئی دو قیمتوں کے اوزان کے درمیان ہوتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ یہ تناؤ ان وزنوں میں سے بڑے کی بہ نسبت چھوٹے سے قریب تر ہوتا ہے۔

۲۔ ۱۲ اور ۱۴ اونس کے دو وزن ایک نا ممتد پذیر ڈوری کے ذریعہ لٹکتی ہیں جو ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔ اوزان ڈوری سے انتصاباً لٹکتے ہیں اور ڈوری کو ایک نقطہ پر ثابت کر دیا گیا ہے تاکہ کوئی حرکت وقوع پذیر نہ ہو سکے۔ اگر اچانک ڈوری کو چھوڑ دیا جائے تو چرخی پر کے دباؤ میں جو تبدیلی ہوگی اس کو معلوم کرو۔

۳۔ ایک ڈوری ایک چکنے میز پر سے اس کے متقابل کے کناروں کے علی القوائم گذرتی ہے اور اس کے سروں سے دو کمیتیں ف اور ق انتصاباً لٹکتی ہیں۔ اگر ڈوری کے اس حصہ پر جو میز پر ہے ایک کمیت ک لگا دی جائے تو ثابت کرو کہ نظام کا اسراع حسب ذیل ہوگا:

$$\frac{\text{ف} - \text{ق}}{\text{ف} + \text{ق} + \text{ک}}\,\text{ج}$$

۴۔ ایک ڈوری کے دو سروں سے دو کمیتیں ک، ک بندھی گئی ہیں (۲۰۴)
اور ڈوری کو ایک کھونٹی پر سے گذارا گیا ہے جیسا کہ ایٹوڈ کی مشین میں کیا جاتا ہے کھونٹی چکنی نہیں ہے اور اس میں اور ڈوری کے درمیان رگڑ کا نادیہ ﻣﻪ ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

۵۔ مثال ۳ میں فرض کرو کہ میز اور وزن ک کے درمیان رگڑ کی قدر ﻣﻪ ہے اور میز اور ڈوری کے درمیان ﻣﻪَ ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

۶۔ ایک رسی ایک چکنی چرخی پر سے لٹک رہی ہے۔ وہ ایکساں اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ ایک شخص کو جس کا وزن ۱۰ اسٹون ہے رسی کے ایک سرے پر

چڑھنا پڑے گا تاکہ رسی جس کے دوسرے سرے سے ۱۲ اسٹون کا وزن بندھا ہے ساکن رہے۔

۷۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے ایک بندر بندھا ہوا ہے اور دوسرے سرے پر اتنا وزن بندھا ہوا ہے جو ٹھیک بندر کے وزن کے مساوی ہے اور چرخی سے ٹھیک اتنے ہی نیچے ہے۔ بندر دفعتاً اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ کون تیز تر چڑھیگا بندر یا وزن۔

۸۔ ۱۰ پونڈ اور ۲ پونڈ کے وزن جو انتصابی ڈوریوں سے لٹک رہے ہیں پہیئے اور محور پر متوازن ہیں۔ اگر ایک پونڈ کی کمیت کا اضافہ چھوٹے وزن میں کردیا جائے تو وہ اسراع معلوم کرو جس سے وہ نیچے اترنے لگیگا، نیز ہر ڈوری کا تناؤ دریافت کرو۔ (پہیئے اور محور کا جمود نظر انداز کردیا جائے)۔

۹۔ ۵ پونڈ کی ایک کمیت ایک چکنے مستوی پر جس کا میلان افق کے ساتھ °۳۰ ہے ٹکی ہوئی ہے اور اس سے ایک مہین تاگا بندھا ہے جو مستوی کی چوٹی پر کی ایک چرخی پر سے گذرتا ہے جس کے دوسرے سرے سے ۳ پونڈ کی کمیت انتصاباً لٹک رہی ہے۔ تاگے کی کھینچ کا مقابلہ کرو جبکہ مستوی پر کی کمیت کو ثابت رکھا جائے اور جبکہ اُسے آزاد چھوڑ دیا جائے۔ اگر کمیت کو آزاد چھوڑنے کے ۸ ثانئے بعد تاگے کو دفعتاً جدا کرلیا جائے یا جلا دیا جائے تو معلوم کرو کہ کمیت مستوی کے اوپر پیچھے پلٹنے سے بیشتر کتنی دور تک اوپر چڑھے گی۔

۱۰۔ ایک ہلکا تاگا دو ثابت چرخیوں ا اور ب پر سے گذرتا ہے اور ان کے درمیان اس پر ایک تیسری چرخی ج کا قالب ہے جس کے نیچے سے وہ گذرتا ہے۔ کمیت ک' تاگے کے ہر ایک سرے سے باندھی گئی ہے اور کمیت ک، حرکت پذیر قالب سے بندھی ہے۔ چرخیوں کی کمیتیں قابل نظر انداز ہیں اور چرخیوں کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ تاگے کے تمام حصے انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ جب نظام کو چھوڑ دیا جائے تو تاگے کا تناؤ ک ک' | (ک + ¼ ک') پونڈ ہے۔ نیز وہ اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ کمیت ک گرتی ہے۔

۱۱۔ کمیت ک کا ایک لچکدار پٹہ جس کا طبعی طول ل اور مقیاس لہ ہے

محیط ب (۷ ا) کے ایک کمزور سے افقی پہیئے کے گرد لپٹا گیا ہے۔ کتنی تیزی سے پہیہ کو گھمانا چاہئیے کہ پٹہ پہیہ سے نکل جائے۔

۱۲ ۔ مثال ۱۱ کا لچکدار پٹہ محیط ب کے ایک چکنے کرہ پر جو زاوئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے رکھا گیا ہے۔ سکون کا محل معلوم کرو۔

۱۳ ۔ اگر زمین تیز سے تیز تر اور اس سے تیز تر گھومنے لگے حتی کہ بالآخر اجسام اس کے خط استواء سے اُڑنے لگیں تو ثابت کرو کہ اس منزل کے پہنچنے تک کسی نقطہ پر خط شاقول زمین کے محور کے متوازی ہو جائے گا۔

۱۴ ۔ ایک جسم کو ایک بیچدار ترازو پر رکھا گیا ہے اور ترازو ایک جہاز میں ہے جو خط استواء پر رفتار و سے حرکت کر رہا ہے۔ ترازو صحیح طور پر وزن دکھلاتا ہے جبکہ جہاز ساکن ہو۔ ثابت کرو کہ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ترازو کی قرأت سے جسم کے وزن کا $\frac{۲ و سہ}{ج}$ گنا خطا (تقریباً) ظاہر ہوتی ہے جہاں سہ زمین کی زاوئی رفتار ہے۔

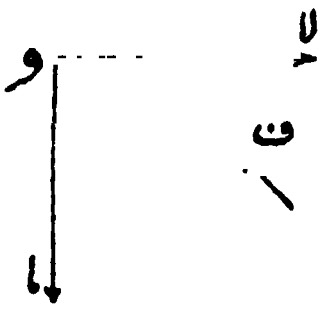
مرمیوں کی پرواز

(۲۰۵) **۱۶۶** ۔ مرمی سے یہاں مراد وہ جسم ہے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اُس کو ایک ذرہ تصور کیا جا سکے اور جو اس طریقہ سے پھینکا گیا ہو کہ وہ جاذبہ کے اثر کے تحت راستہ طے کرے۔

کوئی مرمی جاذبہ کے ساتھ ساتھ ہوا کی مزاحمت سے بھی بالعموم متاثر ہوگا لیکن ہم فرض کریں گے کہ ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہے اور اس لیے جاذبہ ہی صرف وہ قوت ہے جس کا لحاظ رکھنے کی ضرورت ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول سادہ ترین صورت لیتے ہیں چنانچہ خیال کرو کہ مرمی کو نقطہ و (شکل ۱۱۶) سے رفتار ع کے ساتھ افقاً پھینکا گیا ہے۔ عمل پذیر قوت صرف جاذبہ ہے جس کا افقی جزو ترکیبی کوئی نہیں ہے اور اس لیے افقی رفتار ع پوری حرکت کی اثناء میں علیٰ حالہ رہتی ہے۔ ابتدائی رفتار کا

انتصابی جزو ترکیبی صفر ہے لیکن نیچے وار اسراع بوجہ جاذبہ ج ہے اس لیے وقت ت کے بعد افقی فاصلہ طے شدہ ع ت ہے اور وہ انتصابی فاصلہ جس میں سے جسم گر چکا ہے $\frac{1}{2}$ ج ت^{2} ہے۔ افقی فاصلہ طے شدہ کو لا سے اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے



شکل (۱۱۶)

$$\text{لا} = \text{ع ت}\,،\quad \text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{ت}^{2}$$

راستہ طے شدہ کی مساوات، اِن مساواتوں سے ت کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

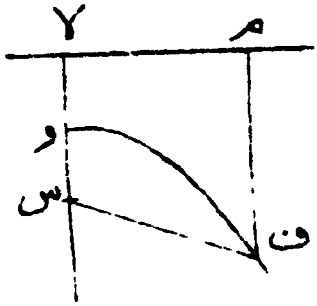
$$\text{ما} = \frac{\text{ج}}{2\,\text{ع}^{2}}\,\text{لا}^{2}$$

یہ مساوات ایک قطع مکافی کی ہے جس کا وترِ خاص $\frac{2\,\text{ع}^{2}}{\text{ج}}$ ہے۔

صریحاً اِس منحنی کو متعین کرنے کا مسئلہ فی نفسہ وہی ہے جو دفعہ ۱۵۶ میں زیر بحث آ چکا ہے۔ وہاں ایک جسم آزادانہ گر رہا تھا اور اپنا راستہ ایک کاغذ پر جو یکساں افقی رفتار کے ساتھ اُس سے گذر رہا تھا مرتسم کرتا تھا۔ یہاں بھی ایک جسم آزادانہ گر رہا ہے اور ہم تصور کر سکتے ہیں کہ وہ اپنا راستہ ایک کاغذ پر مرتسم کرتا ہے جس سے وہ ایک یکساں افقی رفتار سے گذرتا جاتا ہے۔ اِن دو صورتوں میں اضافی حرکت وہی ہے اور اِس لیے منحنی ضرور وہی ہونے چاہئیں۔

۱۶۷ — و پر رفتار ع ہے اور یہ رفتار وہی ہے جو اُس صورت میں ہوتی (۲۰۶)
اگر جسم و کے انتصاباً اوپر ارتفاع $\frac{\text{ع}^{2}}{2\,\text{ج}}$ سے نیچے و تک گرتا۔ یہ ارتفاع

وتر خاص کا ایک چوتھائی ہے اور اس لیے مرتب لا م کے نیچے مکافی کے راس و کی گہرائی کے مساوی ہے۔ اس لیے و پر مرمی کی کل توانائی اُس کل توانائی کے مساوی ہے جو سکون کی حالت میں لا پر اس کی ہوتی یا مرتب کے کسی اور نقطہ پر ہوتی کیونکہ مرتب افقی ہے۔



شکل (۱۱۷)

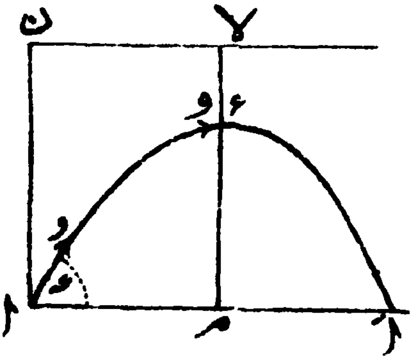
اب چونکہ کل توانائی مستقل رہتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ذرہ اپنے راستہ کے کسی نقطہ ف پر ہوتا ہے تو اس کی توانائی بالحرکت وہ ہوتی ہے جو فاصلہ ف م میں سے گرنے کی وجہ سے اس کو حاصل ہوتی ہے یعنے اُس فاصلہ میں سے جو مرتب سے نقطہ ف تک ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے:

کسی نقطہ پر مرمی کی رفتار وہ ہوتی ہے جو مرتب سے اُس نقطہ تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہو سکتی ہے۔

۱۶۸ — یہ فرض کرنے کی بجائے کہ ذرہ کو مکافی کے راس و سے افقاً پھینکا گیا ہے ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ وہ و پر ہوا میں سے پرواز کرتے ہوئے پہنچا ہے اور اس سے پیشتر اس کو کسی نقطہ ا سے پھینکا گیا تھا۔ اُسی استدلال سے جس سے یہ معلوم ہوا تھا کہ و سے گذرنے کے بعد ذرہ کے راستہ کا حصہ مکافی ہے یہ معلوم ہوگا کہ و پر پہنچنے سے پیشتر بھی اس کا راستہ مکافی ہے۔ اس لیے کسی ذرہ کا راستہ جو کسی طریقہ سے پھینکا گیا ہو مکافی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ کو نقطہ ا سے ایک ایسی سمت میں رفتار و سے پھینکا گیا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ اسکے

راستہ کا راس و ہے اور فرض
کرو کہ جب مرمی نقطہ و میں سے
گذرتا ہے تو اس کی رفتار ۶ ہے،
یہ رفتار بے شبہ افقی ہے — (۲۰۷)
ذرہ پر عمل کرنے والی کوئی
افقی قوت نہیں ہے اور اس لیے
اس کی افقی رفتار اس کی پوری
پرواز میں مستقل رہتی ہے۔
اس سبب لیے



شکل (۱۱۸)

۶ = و جم عہ

اس لیے مکافی کا وتر خاص

۲ ۶² / ج = ۲ و² جم² عہ / ج

رفتار و وہ ہے جو مرتب سے ا تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اس لیے اگر ن ۷ مرتب ہو تو

ا ن = و² / ۲ ج

ا سے و تک پرواز کا وقت وہ وقت ہے جو جاذبہ انتصابی رفتار و جب عہ کو معدوم کرنے میں لیتی ہے، اس لیے وہ و جب عہ / ج ہے۔ اس وقت میں افقی فاصلہ ا م یکساں رفتار ۶ سے طے ہوا ہے، اس لیے

ا م = ۶ و جب عہ / ج = و² جب عہ جم عہ / ج

طے شدہ انتصابی فاصلہ و م بموجب مساوات (۴۷) نصف وقت مضروب ابتدائی انتصابی رفتار کے مساوی ہے، اس لیے

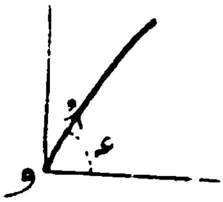
$$و م = \frac{1}{2} \frac{و^2 جب^2 عہ}{ج}$$

افقی مستوی پر پورا ٹپہ ا اَ ، ا م کا دُگنا ہے اور اس لیے

$$ا اَ = \frac{2 و^2 جب عہ جم عہ}{ج} = \frac{و^2 جب 2 عہ}{ج}$$

۱۶۹ — اگر و کی قیمت مستقل ہو (مثلاً اگر ہم گولی کو بارود کی ایک مقررہ بھرن سے فائر کرتے رہیں) اور زاویہ عہ متغیر ہو تو ٹپہ ا اَ ، $\frac{و^2}{ج}$ سے تجاوز نہیں کر سکتا کیونکہ جزو ضربی جب ۲ عہ کی قیمت اکائی سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اگر پھینکنے کی رفتار و معلوم ہو تو بڑے سے بڑا ٹپہ جو افقی مستوی پر حاصل ہو سکتا ہے $\frac{و^2}{ج}$ ہے اور اس ٹپہ کو حاصل کرنے کے لیے جب ۲ عہ = ۱ ہونا چاہئیے یعنے عہ = ۴۵° ۔ پس کسی مرمی کو افقی مستوی پر حتی الامکان دور پھینکنے کے لیے اس کو زاویہ ۴۵° پر پھینکنا چاہئیے۔ (۲۰۹)

۱۷۰ — ان نتائج کو تحلیلی طور پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم نقطۂ رسیدگی کو مبدا لیتے ہیں اور اُس مستوی کو جس میں پرواز واقع ہوتی ہے مستوی لا ما فرض کرتے ہیں جہاں محاور لا اور ما علی الترتیب افقی اور انتصابی ہیں۔



شکل (۱۱۹)

اُس نقطہ کا لا محدد جس پر ذرہ وقت ت کے بعد پہنچا ہے اُس افقی فاصلے کے مساوی ہے جو وقت ت میں یکساں رفتار و جم عہ سے طے ہوتا ہے۔ اس لیے

$$لا = و جم عہ \times ت \quad \ldots\ldots\ldots (۵۶)$$

اسی طرح اس نقطہ کا ما محدد وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں ابتدائی رفتار و جب عہ اور اسراع ج کے ساتھ طے ہوا ہے۔ اس لیے یہ فاصلہ

$$\text{ما} = \text{و جب عہ} \times \text{ت} - \tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^{2} \quad \ldots\ldots (۵۷)$$

ہے۔ اگر ہم مساواتوں (۵۶) اور (۵۷) سے ت کو ساقط کریں تو راستہ کی مساوات حاصل ہوگی چنانچہ

$$\text{ما} = \text{لا مس عہ} - \frac{\text{ج لا}^{2}}{۲\,\text{و}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}} \quad \ldots\ldots (۵۸)$$

اس کو شکل

$$\text{ما} - \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}}{\text{ج}} = -\frac{\text{ج}}{۲\,\text{و}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}}\left(\text{لا} - \frac{\text{و}^{2}\,\text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}\right)^{2}$$

میں رکھا جا سکتا ہے جو صریحاً ایک قطع مکافی کی مساوات ہے جس کا راس نقطہ

$$\text{لا} = \frac{\text{و}^{2}\,\text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}\,,\quad \text{ما} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۵۹)$$

پر ہے اور جس کے وتر خاص کا طول

$$\frac{۲\,\text{و}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}}{\text{ج}}$$

ہے۔

افقی مستوی پر ٹپہ حاصل کرنے کے لئے وہ نقطہ معلوم کرنا چاہئے جس میں یہ مکافی خط ما = ۰ کو قطع کرتا ہے۔ مساوات (۵۸) میں ما = ۰ رکھنے سے ہمیں فوراً حاصل ہوتا ہے

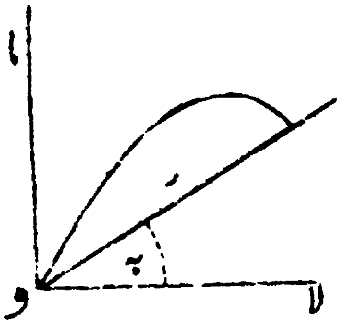
$$\text{لا} = \frac{۲\,\text{و}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}}{\text{ج}}\,\text{مس عہ} = \frac{\text{و}^{2}\,\text{جب ۲ عہ}}{\text{ج}}$$

جو دفعہ ۱۶۸ میں حاصل شدہ قیمت کے مطابق ہے۔

ٹپہ مائل مستوی پر

۱۷۱ — فرض کرو کہ مرمی کو نقطہ رسیدگی و میں سے گذرنے والے

ایک مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے۔



شکل (۱۲۰)

فرض کرو کہ اس مستوی کا میلان افق کے ساتھ بہ ہے اور فرض کرو کہ اس مستوی پر مرمی کا ٹپہ ر ہے۔ پس اس نقطہ کے محدد جس پر مرمی مستوی سے ٹکراتا ہے

$$\text{لا} = \text{ر جم بہ}\ ،\ \text{ما} = \text{ر جب بہ}$$

ہونے چاہئیں۔

یہ نقطہ قطع مکافی پر ہونا چاہئے اور اس لیے اس کے محددوں کو مساوات (۵۸) پوری کرنی چاہئے۔ ان محددوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر جب بہ} = \text{ر مس عہ جم بہ} - \frac{\text{ج ر}^{2}\ \text{جم}^{2}\ \text{بہ}}{2\ \text{و}^{2}\ \text{جم}^{2}\ \text{عہ}}$$

جس سے ٹپہ ر کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ر} = \frac{2\ \text{و}^{2}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{جم عہ جب (عہ} - \text{بہ)}}{\text{جم}^{2}\ \text{بہ}} \quad \ldots\ldots (60)$$

چونکہ $2\ \text{جم عہ جب (عہ} - \text{بہ)} = \text{جب (2عہ} - \text{بہ)} - \text{جب بہ}$ ....(۶۱)

اس لئے ظاہر ہے کہ اگر صرف عہ کو بدلنے دیا جائے تو ٹپہ ر اعظم ہوگا جبکہ جب (۲عہ − بہ) اعظم ہو یعنی جبکہ وہ اکائی کے مساوی ہو۔ اس قیمت کو حاصل کرنے کے لئے ہم رکھتے ہیں

$$\text{عہ} = \frac{\pi}{4} + \frac{\text{بہ}}{2}$$

اس لیے اعظم ٹپہ حاصل کرنے کے لئے ہم مرمی کو اس سمت میں (۲۱۰)
پھینکتے ہیں جو مائل مستوی اور انتصابی کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتی ہے
جب رسیدگی اس سمت میں واقع ہوتی ہے تو اعظم ٹپہ کی مساوات

(۶۰) سے حاصل شدہ ر کی قیمت میں جب (۲ عہ - بہ) = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$ر = \frac{و^2}{ج} \cdot \frac{۲\ جم\ عہ\ جب\ (عہ - بہ)}{جم^2\ بہ}$$

$$= \frac{و^2}{ج} \cdot \frac{جب\ (۲\ عہ - بہ) - جب\ بہ}{جم^2\ بہ}$$

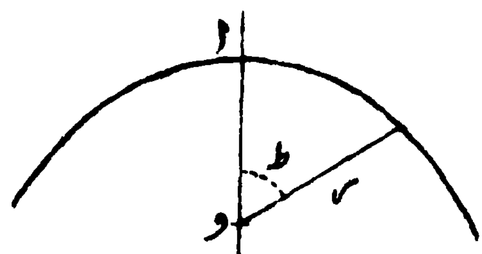
$$= \frac{و^2}{ج} \cdot \frac{۱ - جب\ بہ}{جم^2\ بہ}$$

$$= \frac{و^2}{ج\ (۱ + جب\ بہ)} \qquad (۶۲)$$

۱۷۲ — اس مساوات سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ معلوم ہو سکتا ہے جو مرمی کسی سمت میں طے کر سکتا ہے جبکہ اس کو رفتار و سے پھینکا گیا ہو۔ فرض کرو کہ ہم بہ کی بجائے $\frac{\pi}{2}$ - طہ رکھتے ہیں اور اس لیے طہ وہ زاویہ ہے جو مرمی کی سمت انتصابی کے ساتھ بناتی ہے۔ اب ر اور طہ میں ربط ہے

$$ر = \frac{و^2}{ج\ (۱ + جم\ طہ)} \qquad ....(۶۳)$$

اس کو قطبی محددوں ر، ط میں مساوات سمجھنے سے صریحاً یہ ایک ایسے منحنی کی مساوات ہے کہ اس کے اندر کسی نقطہ پر ہم ایک مرمی کے ذریعہ جو رفتار و سے فائر کیا گیا ہو ضرب لگا سکتے ہیں لیکن اس کے باہر کسی نقطہ تک مرمی کو نہیں پہنچا سکتے۔



شکل (۱۲۱)

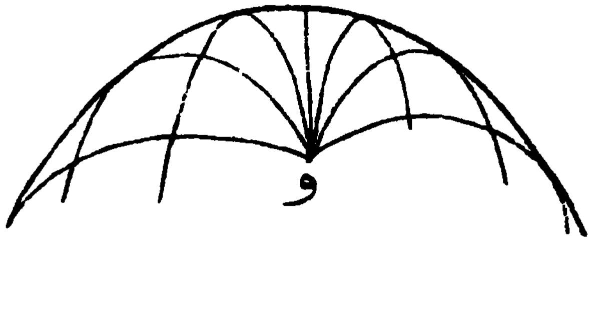
ہم جانتے ہیں کہ وتر خاص ل کے قطع مکافی کی قطبی مساوات اس کے ماسکہ اور محور کے حوالے سے حسب ذیل ہے:

$$ک ا = \frac{\frac{1}{2} ل}{1 + جم ط\!ه}$$

اِس کا مقابلہ مساوات (۶۳) کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ نقطہ رسیدگی ہے اور محور انتصابی ہے اور نیم وتر خاص $\frac{و^2}{ج}$ ہے۔

راستوں کا لفاف

(۲۱۱) ۱۷۳۔ اگر ہم اُن تمام مکافیوں کا تصور کریں جن کو مرمی جو نقطہ و سے رفتار د کے ساتھ فائر کیے گئے ہوں مرتسم کرتے ہیں تو ہمیں شکل (۱۲۲) کے مشابہ ایک شکل حاصل ہوگی بیرونی جلی منحنی صریحاً اُن نقطوں کو جن پر مرمی پہنچ سکتے ہیں اُن نقطوں سے جن پر مرمی نہیں پہنچ سکتے جدا کرتا ہے۔ اس لیے یہ وہ مکافی ہے جس کی مساوات (۶۳) سے حاصل ہوتی ہے۔ شکل (۱۲۲) کے مطالعہ سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ منحنی مکافیوں



شکل (۱۲۲)

کے اُس نظام کا لفاف ہے جو فائر کرنے کی مختلف سمتوں کے متناظر ہیں۔

۱۷۴۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف تحلیلی طریقوں کے ذریعہ نسبتاً زیادہ راست طریقہ پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم مساوات (۵۸) میں مس عہ کی بجائے م لکھیں تو نظام کے ایک مکافی کی مساوات شکل

$$\text{ما} = \text{م لا} - \frac{\text{ج لا}^2}{2\,\text{و}^2}(1+\text{م}^2)$$

میں حاصل ہوتی ہے اور پورا نظام، م کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ وہ شرط کہ اس مساوات کی اصلیں م میں مساوی ہوں یہ ہے کہ

$$\text{لا}^2 = \frac{4\,\text{ج لا}^2}{2\,\text{و}^2}\left(\frac{\text{ج لا}^2}{2\,\text{و}^2} + \text{ما}\right)$$

جس کو شکل

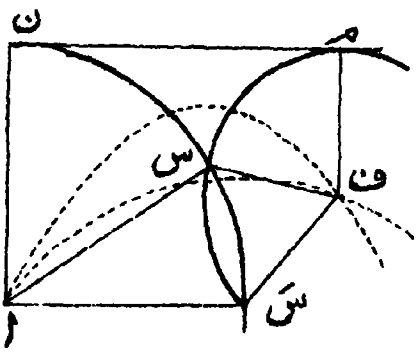
$$\text{لا}^2 = -\frac{2\,\text{و}^2}{\text{ج}}\left(\text{ما} - \frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

اگر لا، ما اس مساوات کو پورا کریں تو دو مکافی جن میں لا انتہا کم فرق ہے نقطہ لا، ما میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے لفاف پر کا ایک نقطہ لا، ما ہے۔ اس طرح مساوات (64) لفاف کی مساوات ہے اور اس سے وہی مکافی لفاف حاصل ہوتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔ (212)

۱۷۵۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف معلوم کرنے کا ایک بہت سادہ ہندسی طریقہ بھی ہے۔

اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ جب سب مرمیوں کو ایک ہی نقطہ ۱ سے رفتار و کے ساتھ فائر کیا جاتا ہے تو ان کے راستوں کا ایک ہی مرتب ن ھ (شکل ۱۲۳) ہوتا چاہئے۔ فرض کرو کہ نظام کے کوئی دو مکافی، ف پر متقاطع ہوتے ہیں اور فرض کرو کہ ان کے ماسکے س، سَ ہیں۔ فرض کرو کہ ۱، ف سے مرتب پر عمود علی الترتیب



شکل (۱۲۳)

ا ن ' ف م ہیں۔

اب ا س = ا سَ کیونکہ اِن میں سے ہر ایک ا ن کے مساوی ہے' نیز ف س = ف سَ کیونکہ ہر ایک ف م کے مساوی ہے۔ اِس لئے س اور سَ ' اُن دو دائروں کے نقاط تقاطع ہیں جن کے مرکز ا ' ف ہیں۔

اگر اِن دو مکافیوں کو متصلہ فرض کیا جائے تو اِن کے ماسکے س' سَ متصلہ نقطے ہوں گے اور اِس لئے مذکورہ بالا دو دائرے مس کرینگے اور ا س ف انتہا میں ایک خط مستقیم ہوگا۔ پس اس صورت میں

ا ف = ا س + س ف

= ا ن + ف م

= نقطہ ف سے ایک ایسے ثابت افقی خط پر عمود جو م ن کے اوپر فاصلہ ا ن پر ہے۔

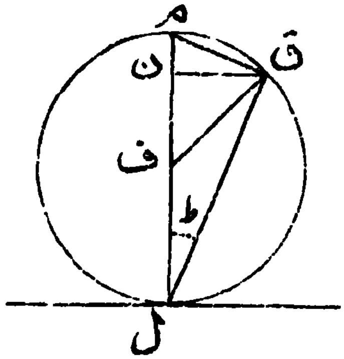
پس نقطہ ف یہ شرط پوری کرتا ہے کہ اِس کا فاصلہ اِس ثابت خط سے اُس فاصلہ کے مساوی ہے جو اِس کے اور ثابت نقطہ کے درمیان ہے۔ اس لیے ف ہمیشہ ایک خاص مکافی پر رہتا ہے جس کا ماسکہ ا ہے۔ لیکن ف ہمیشہ لفاف کا ایک نقطہ بھی ہے جہاں یہ لفاف نظام کے دو دو متصلہ مکافیوں کے نقاط تقاطع کا طریق ہے۔ اِس لیے لفاف وہ مکافی ہے جو ابھی اوپر حاصل ہو چکا ہے اور جس کا ماسکہ ا ہے۔ یہ مکافی وہی مکافی ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

(۲۱۳)

توضیحی مثالیں

۱۔ ایک گاڑی ہموار سڑک پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور اسکے پہیوں کے پٹوں سے کیچڑ کے ذرّات خارج ہوتے ہیں۔ وہ بڑے سے بڑا ارتفاع معلوم کرو جس تک اِن میں سے کوئی ذرہ اُچھلیگا۔

فرض کرو کہ پہیہ کا نصف قطر ا ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں (صفحہ ۱۳) کہ کوئی نقطہ ق رفتار و × ق ل \ ا سے سمت ق م میں جو ق ل پر عمود ہے حرکت کرتا ہے۔ ق سے نکلے ہوئے کیچڑ کی رفتار یہی ہوگی۔ اگر زاویہ ق ل ف، ط ہے تو زمین کے اوپر جس ارتفاع سے کیچڑ نکلتا ہے وہ



شکل (۱۲۲)

$$\text{ل ن} = \text{ل ف} + \text{ف ن} = \text{ا}(1 + \text{جم}\, 2\text{ط})$$

ہے اور اس کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی

$$\text{و}(\text{ق ل} \backslash \text{ا})\ \text{جب ط} = 2\,\text{و جب ط جم ط} = \text{و جب}\, 2\,\text{ط}$$

ہے۔ کیچڑ جو اس انتصابی رفتار سے نکلتا ہے مزید انتصابی ارتفاع

$$\frac{(\text{و جب}\, 2\,\text{ط})^2}{2\,\text{ج}}$$

حاصل کرتا ہے اور اس لیے کل ارتفاع جہاں تک کیچڑ پہنچتا ہے

$$\text{ا} + \text{ا جم}\, 2\,\text{ط} + \frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}}\, \text{جب}^2\, 2\,\text{ط}$$

ہے۔ اس کو جم ۲ ط کے ایک دو درجی تفاعل کے طور پر شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\left(\text{ا} + \frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}}\right) - \frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}}\, \text{جم}^2\, 2\,\text{ط} + \text{ا جم}\, 2\,\text{ط}$$

$$= \left(\text{ا} + \frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}}\right) + \frac{\text{ا}^2\text{ج}}{2\,\text{و}^2} - \frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}}\left[\text{جم}\, 2\,\text{ط} - \frac{\text{اج}}{\text{و}^2}\right]^2$$

اس جملہ کی اعظم قیمت جبکہ ط بدلے اس وقت واقع ہوتی ہے

جب $\text{جم}\, 2\,\text{ط} = \frac{\text{اج}}{\text{و}^2}$ بشرطیکہ جم ۲ ط کے لیے یہ قیمت اختیار کرنا ممکن ہو

یعنی بشرطیکہ $\text{و}^2 > \text{اج}$ ۔ اِس صورت میں اعظم ارتفاع زمین کے اوپر

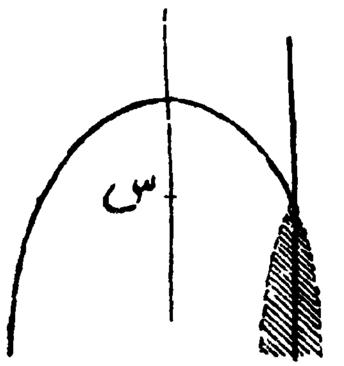
$$\text{ا} + \frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}} + \frac{\text{ا}^2\,\text{ج}}{2\,\text{و}^2} = \frac{(\text{اج} + \text{و}^2)^2}{2\,\text{ج}\,\text{و}^2}$$

ہے ۔

لیکن اگر $\text{و}^2 < \text{اج}$ تو ہم $\left[\text{جم}\,2\text{ط} - \frac{\text{اج}}{\text{و}^2}\right]^2$ کو معدوم نہیں کرسکتے

اِس لیے ہم اِس کو حتی الامکان چھوٹا بناتے ہیں اور اِس لئے جم ٢ ط = ١ لیتے ہیں ۔ اِس طرح کچھ جو بلند ترین نقطہ تک پہنچتا ہے وہ ہے جو پہیہ کے سب سے اوپر کے نقطہ م سے نکلتا ہے اور صریحاً وہ اپنے ابتدائی نقطہ سے بلند تر ہرگز نہیں اُچھلتا

٢ ۔ ایک اگن بھوز[1] رفتار و سے پانی پھینکتا ہے اور اِس سے ف فاصلہ پر ایک انتصابی دیوار ہے ۔ معلوم کرو کہ دیوار کا کتنا رقبہ تر ہو گا ۔



شکل (۱۲۵)

فرض کرو کہ اگن بھوز کا دہانہ س ہے اور فرض کرو کہ وہ پانی کے ذرات کسی سمت میں رفتار و سے پھینک سکتا ہے ۔ وہ نقطے جن تک پانی پہنچ سکتا ہے حسب دفعہ ١٧٢ وہ تمام نقطے ہوں گے جو ایک گردشی مکافی نما کے اندر واقع ہوں گے جس کا محور انتصابی، ماسکہ س اور وتر خاص $\frac{2\,\text{و}^2}{\text{ج}}$ ہے ۔ اگر ہم س کو مبدا لیں اور س میں گذرنے والے انتصابی خط کو محورِ ی فرض کریں تو اِس مکافی نما کی مساوات ہوگی

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) = \frac{2\,\text{و}^2}{\text{ج}}\left(\frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}} - \text{ی}\right)$$

دیوار کی مساوات ما = ف لیجا سکتی ہے اور وہ منحنی جس میں یہ مکافی نما دیوار کو

[1] Fire-hose

قطع کرتا ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ف}^2 = \frac{2\,\text{و}^2}{\text{ج}}\left(\frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}} - \text{ی}\right)$$

یا

$$\text{لا}^2 = \frac{2\,\text{و}^2}{\text{ج}}\left(\frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}} - \frac{\text{ف}^2\,\text{ج}}{2\,\text{و}^2} - \text{ی}\right)$$

ہے۔ یہ مساوات ایک قطع مکافی کی مساوات ہے جس کا وتر خاص $\frac{2\,\text{و}^2}{\text{ج}}$ ہے، محور انتصابی ہے اور راس، اس کے اوپر ارتفاع

$$\frac{\text{و}^2}{2\,\text{ج}} - \frac{\text{ف}^2\,\text{ج}}{2\,\text{و}^2}$$

پر ہے۔ اِس قطع مکافی کے اندر کے سب نقطے پانی کی دھار کے حدود کے اندر واقع ہوں گے اور وہ نقطے جو اس مکافی کے باہر ہوں گے ناقابل رسائی ہوں گے۔

مثالیں

۱۔ ایک ریوالور کو ۱۰۰ فٹ بلند مینار کے سرے سے اُفقاً فائر کیا گیا ہے اور گولی ریوالور کے دہانے سے رفتار ۶۰۰ فٹ فی ثانیہ سے نکلتی ہے۔ گولی زمین پر کس جگہ لگیگی؟

۲۔ ایک گولی جس کو ایک تالاب کی سطح کے اوپر ۱۰ فٹ ارتفاع سے اُفقاً فائر کیا گیا ہے پانی سے ۵۰۰ گز کے فاصلہ پر ٹکراتی ہے۔ اِس کی رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو اگر ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہو۔

۳۔ ثابت کرو کہ کسی بندوق کے متعلق یہ دعوے کرنا کہ اس کی گولی ۱۰۰ گز کے ٹپہ میں ایک انچ سے زیادہ نہیں چڑھتی اِس بات کو مستلزم ہے کہ رفتار ۲۰۸۰ فٹ فی ثانیہ سے بڑی ہونی چاہئے۔

۴۔ کرکٹ کا گولہ ایک اُفقی مستوی پر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک بندوق ہے جس کا دہانہ زمین سے قریب ہے۔ اِس بندوق سے

ایک گولی فائر کی گئی ہے جو ۶ فٹ لمبے آدمی کے اوپر سے جو ۱۰ گز دور کھڑا ہے عین گذر جاتی ہے اور خود زمین میں ایک چوتھائی میل دور دفن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ گولی زمین کے اوپر جس بلندی تک اڑتی ہے وہ یقیناً ۲۲ گز سے بڑی ہے۔

۶۔ ایک مرمی کا اعظم افقی ٹپہ ۲۵۶ فٹ ہے۔ اس کو پھینکنے کی رفتار کیا ہے۔ اگر اس کو اس رفتار سے ۲۴ فٹ بلند غلام گردش کے فرش پر کے ایک نقطہ سے پھینکا جائے تو اس کا بڑے سے بڑا ٹپہ کیا ہوگا اگر وہ چھت سے نہ ٹکرائے اور غلام گردش کافی طویل ہو۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۲۰ میل ٹپہ کے لیے مطلوبہ رفتار کم از کم ۸۴۰ فٹ فی ثانیہ ہوگی اور مرمی کے پرواز کا وقت ۸۱٫۳ ثانیے ہوگا۔

۸۔ مثال ماسبق میں ۲۰ میل ٹپہ کے لیے بارود کی بھرن معلوم کرو۔ یہ فرض کر کے کہ گولے کا وزن ایک ٹن ہے اور بارود کی طاقت ۱۰۰۰ فٹ ٹن (فی پونڈ بارود) کی قوت پیدا کر سکتی ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مرمی کو رفتار و سے ایک ہموار مستوی کے اوپر ارتفاع ف سے زاویہ عہ پر پھینکا جائے تو اس کا ٹپہ ر، مساوات

$$۲\,و^۲ (ف + ر\ ٹمس\ عہ) = ج\ ر^۲\ قط^۲\ عہ$$

سے حاصل ہوگا۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک ہموار مستوی کا وہ رقبہ جو اس توپ کی زد میں ہو جو مستوی کے اوپر ارتفاع ف پر ہے ف کے ساتھ متناسباً بڑھتا ہے اور

$$\left(\text{ا} + ۲\text{ف}\sqrt{\frac{\pi}{\text{ا}}}\right)\text{ا}$$

کے مساوی ہے جہاں ا وہ رقبہ ہے جو زد میں ہوتا ہے جبکہ توپ مستوی کی ہمواری پر ہوتی ہے۔

۱۱۔ ایک مرمی کو ایک قلعہ سے جو افقی مستوی کے اوپر ۳۰۰ فٹ بلند ہے ۷۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے فائر کیا جا سکتا ہے۔ معلوم کرو کہ مستوی کا کتنا رقبہ زد میں رہتا ہے۔

۱۲۔ ضلع ا کے ایک منتظم مسدس کو انتصاباً اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا

ایک کنارہ ایک افقی میز پر ٹکا ہوا ہے۔ ایک ذرہ کو اس طریقہ سے پھینکا گیا کہ وہ اس مسدس کے چار اوپر کے کونوں کو عین چاٹتے ہوئے گذر جاتا ہے۔ ذرہ کی پرواز میں بلند ترین نقطہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ میز پر ٹپہ ا $\sqrt{7}$ ہے۔

۱۳ — ایک مشین گن کو ایک مسلح ٹرین پر نصب کیا گیا ہے۔ ٹرین افقی پٹڑیوں پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور توپ کے دہانے سے گولے رفتار و سے نکلتے ہیں۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو

(ا) ٹرین کے سامنے

(ب) ٹرین کے پیچھے

عام مثالیں

۱ — ایک ٹرین ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے اور وہ ایک منحنی پر پہنچتی ہے جس کا نصف قطر تین چوتھائی میل ہے۔ ٹرین میں دیوار پر ایک کامل چکنا افقی تختہ لگا ہے جس کا کنارہ پٹڑیوں کے متوازی ہے اور اس جانب ہے جو منحنی کے مرکز سے دور ہے۔ تختہ پر ایک چھوٹی چیز اس کے کنارے سے ۸ انچ فاصلے پر استادہ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ چیز تختہ سے گر جائے گی جبکہ وہ ڈبہ جس میں چیز ہے منحنی کا تقریباً ۲۴ گز فاصلہ طے کرے گا۔ اس کی افقی رفتار معلوم کرو جبکہ وہ تختے کو چھوڑتی ہے۔

۲ — ایک غبارہ ایسی چال سے اوپر وار حرکت کر رہا ہے جو ہر ثانیہ میں ۴ فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہی ہے۔ معلوم کرو کہ ۱۰ پونڈ کے ایک جسم کا وزن جبکہ اس کو کمانی دار ترازو کے ذریعہ غبارے میں معلوم کیا جائے اس وزن سے کس قدر فرق رکھیگا جو معمولی حالات میں حاصل ہوتا ہے۔ (۲۱۶)

۳ — ایٹوڈ کی مشین ترازو کے ایک پلڑے پر رکھی گئی ہے اور مشین کی ڈوری کو کلپ کے ذریعہ حرکت کرنے سے روکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کلپ کو جدا کرتے ہی مشین کا ظاہری وزن بقدر

$$\frac{(ک - کَ)^2}{ک + کَ} ج$$

کے تخفیف ہوگا جہاں ک، کَ لٹکے ہوئے وزن ہیں۔

۴۔ طول ل اور وزن و کی ایک ایکساں زنجیر ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے اور اس کی ہر جانب انتصاباً لٹکتی ہے۔ اگر زنجیر آزادانہ حرکت کر رہی ہو تو ثابت کرو کہ جب ایک جانب اس کا طول لا ہوتا ہے تو کھونٹی پر دباؤ

$$\frac{4\,لا\,(ل - لا)}{ل^2}\;و$$

ہے۔

۵۔ ایک نل سے پانی کی دھار زمین تک انتصاباً گرتی ہے اور اس کی ابتدائی رفتار قابل نظر انداز ہے۔ ثابت کرو کہ اُس پانی کا مرکز ثقل جو کسی آن ہوا میں رہتا ہے زمین سے اوپر اس فاصلہ کا دو تہائی ہے جو زمین اور نل کے درمیان ہے۔

۶۔ وزن و کی ایک وزنی ایکساں زنجیر کو ایک ڈوری سے باندھ کر ڈوری کو تناؤ ت سے اوپر اُٹھایا گیا ہے۔ زنجیر کے کسی نقطہ پر تناؤ دریافت کرو۔

۷۔ ایک زنجیر ف ٹن کا مستقل بوجھ برداشت کر سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ سکون سے سکون تک کم سے کم وقت جس میں زنجیر و ٹن کے ایک وزن کو انتصابی فاصلہ ف میں سے اُٹھا اور اُتار سکتی ہے

$$\sqrt{\frac{2ف}{ج}}\;\frac{ف}{ف - و}\;ثانیے$$

ہوگا۔

۸۔ چرخیوں کے ایک نظام میں ایک ثابت اور ایک حرکت پذیر قالب ہے۔ رسی حرکت پذیر قالب کے محور سے بندھی ہے اور اس کے بعد ثابت قالب پر سے گذرتی ہے اور پھر حرکت پذیر قالب کے نیچے سے اور پھر ثابت قالب پر سے۔ وزن ف معلوم کرو جس کو اگر رسی سے باندھ دیا جائے تو وہ معلومہ وزن و کو جو حرکت پذیر قالب سے بندھا ہے سہار سکے۔ (قالب اس قدر چھوٹے ہیں کہ رسی کے تمام سیدھے حصوں کو متوازی خیال کیا جا سکتا ہے)۔

اگر اوزان متوازن نہ ہوں تو ثابت کرو کہ و کا نیچے وار اسراع

$$\frac{و - ۳ ف}{و + ۹ ف} ج$$

ہوگا جب کہ رسی کے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہو اور حرکت پذیر قالب کا وزن و میں شامل ہو۔

۹ — ایک چرخی جو کُل بوجھ و کو سہارے ہوئے ہے رسی کے ایک حلقہ میں لٹکائی گئی ہے یہ رسی دو ثابت چرخیوں پر سے گذرتی ہے اور اس کے سروں سے اوزان ف اور ق آزادانہ لٹک رہے ہیں ۔ رسی کا ہر حصہ انتصابی ہے ۔ ثابت کرو کہ جب اس نظام کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو و ساکن رہے گا یا ایکساں رفتار سے حرکت کریگا (۲۱۷)

بشرطیکہ $\frac{۴}{و} = \frac{۱}{ف} + \frac{۱}{ق}$ اور کہیں رگڑ نہ ہو۔

اگر یہ ربط موجود نہ ہو تو و کا اسراع معلوم کرو ۔

۱۰ — ایک ذرہ جو جاذبہ کے تحت گر رہا ہے کسی خاص ثانیئے میں ۱۰۰ فٹ طے کرتا ہے ۔ اس کے بعد ۱۰۰ فٹ طے کرنے میں اُسے کتنا وقت لگیگا ۔ ہوا کی مزاحمت نظر انداز کی گئی ہے ۔

اگر مزاحمت کی وجہ سے وقت ۹ء ثانیہ لگے تو مزاحمت (مستقل فرض کردہ) کی نسبت ذرہ کے وزن کے ساتھ معلوم کرو ۔

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی منحنی سے کسی دوسرے منحنی تک (جو اُسی انتصابی مستوی میں ہے) سریع ترین اُتار کا خط اِن منحنیوں کے اُن نقطوں پر کے عمادوں کے ساتھ مساوی زاوئے بناتا ہے جن پر وہ اِن سے ملتا ہے ۔

۱۲ — ایک انتصابی دائرے کے محیط پر اُس نقطہ کا محل معلوم کرو کہ اُس سے مرکز تک خط مستقیم میں اُتار کا وقت وہی ہو جو زیریں ترین نقطہ تک اُتار میں صرف ہوتا ہے ۔

۱۳ — ماسکہ سے مکافی تک تیز ترین اُتار کا خط معلوم کرو جبکہ مکافی کا محور انتصابی ہو اور راس اوپر وار ۔ نیز ثابت کرو کہ اس خط کا طول وتر خاص کے مساوی ہے ۔

۱۴ — ایک ناقص کو اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اِس کا محور اعظم انتصابی ہے ۔

قطر معلوم کرو جس کے بیچ کوئی ذرہ کم سے کم وقت میں گر سکتا ہے۔ خروج المرکز
م سے کم کیا قیمت ہے تاکہ یہ قطر محور اعظم نہ ہو سکے۔

۱۵۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانہ پر فائر کرنا مقصود ہے تاکہ وہ نشانے
ں القوائم ٹکرائے۔ اگر گولی کی رفتار و ہو اور فائرنگ کے نقطے سے نشانے
صلہ ا ہو تو ثابت کرو کہ گولی کا زاویہ ارتفاع $\frac{1}{2}$ جب$^{-1}$ $\left(\frac{2\,ا\,ج}{و^{2}}\right)$ ہونا چاہئے
ثابت کرو کہ نشانے کا وہ نقطہ جس پر ضرب پڑتی ہے اُس نقطہ کی بہ نسبت نصف
فاع پر ہوگا جس کی جانب نشانہ باندھا جاتا ہے۔

۱۶۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانے پر فائر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولی
ائر کرنے والا شخص نشانے پر گولی کے ظل کو دیکھے تو ظل یکساں رفتار سے حرکت
نظر آئے گا۔

۱۷۔ ایک بندوق دو گولیوں کو فائر کرتی ہے، ایک کو رفتار و کے ساتھ
یہ ارتفاع عہ پر اور دوسری کو رفتار وَ کے ساتھ زاویہ ارتفاع عہَ پر (عہ > عہَ)
گولیاں ایک ہی انتصابی مستوی میں جاتی ہیں۔ ثابت کرو کہ گولیاں ٹکرائیں گی
ائرنگ کے درمیان وقفہ

$$\frac{2}{ج}\;\frac{و\,وَ\,جب\,(عہ - عہَ)}{و\,جب\,عہ + وَ\,جب\,عہَ}$$

۔

۱۸۔ ا، ب، ج ایک افقی خط میں ترتیب وار تین نقطے ہیں اور اب
۶ فٹ ہے۔ ایک ذرہ کو ا سے رفتار ۳۹۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں
ینکا گیا ہے جو اج کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{5}{12}$ بناتی ہے۔ اُسی آن ایک
سرے ذرہ کو ب سے رفتار ۲۵۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا
جو ب ج کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{3}{4}$ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ذرے
بھڑیں گے، نیز معلوم کرو کہ کب اور کہاں؟

۱۹۔ ایک توپ ۴۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گولے سر کرتی ہے۔ (۲۱۸)

ایک پہاڑی، سطح مستوی پر ۲۰۰ فٹ بلند ہے اور توپ مستوی کے اُس نقطہ سے ۱۰۰۰ گز کے فاصلہ پر ہے جو پہاڑی کے سرے کے انتصاباً نیچے ہے۔ پہاڑی کے سرے کے عین پیچھے کتنا فاصلہ توپ کے گولوں سے محفوظ ہوگا۔

۲۰ ـــ ایک بندوق کی مکھیاں غلط نصب ہیں جس کی باعث گولی تین فیصدی زیادہ دور تک جاتی ہے بہ نسبت اُس فاصلے کے جو مکھیوں سے معلوم ہوتا ہے۔ ایک نشانہ باز جو بندوق کی اِس خطا سے واقف نہیں ہے ایک نشان پر جو ۱۰۰۰ گز کے فاصلہ پر ہے نشانہ باندھتا ہے۔ اگر گولی کی رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو تو ثابت کرو کہ گولی نشان سے تقریباً ایک گز اوپر سے گذر جائے گی۔

۲۱ ـــ ایک بندوق کی مکھیاں درست ہیں اور ا فٹ فاصلہ پر کسی چیز پر نشانہ باندھنے کے لیے بندوق کو زاویہ عہ تک اٹھانا پڑتا ہے۔ نشانہ باز کا ہاتھ تھرتھرانے کی وجہ سے بندوق اُن سمتوں میں رہتی ہے جو اصلی سمت سے چھوٹے زاویہ طہ کے اندر کہیں واقع ہو سکتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نشانہ باز گولیوں کو متواتر فائر کرے تو وہ نقطے جن پر گولیوں کی ضرب پڑے گی سب کے سب ایک چھوٹے قطع ناقص کے اندر واقع ہوں گے جس کے نیم محاور ا طہ جم عہ اور ا طہ (ا ـ س۲ عہ) ہوں گے۔

جب، عہ = $\frac{\pi}{4}$ تو اِس قطع ناقص کا محور اصغر معدوم ہوتا ہے اور اِس لیے گولیوں کو ایک خط مستقیم میں واقع ہونا چاہئیے۔ اِس نتیجہ کا مطلب بیان کرو۔

۲۲ ـــ ایک ذرہ سکون سے ایک چکنے کرہ کے بلند ترین نقطے سے اس کی بیرونی سطح پر نیچے وار پھسلتا ہے۔ وہ کرہ سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور فضا میں ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مکافی کے نقطہ ف پر کا دائرۂ انحنا مرتب کو مس کریگا۔

۲۴ ـــ ایک ذرہ کو ایک چکنے کرہ کی اندرونی سطح کے زیر ترین نقطے سے افقاً پھینکا گیا ہے۔ وہ کرہ کی سطح سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور ایک قطع مکافی مرتسم کرنے کے بعد پھر کرہ سے نقطہ ق پر ٹکراتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق اور ف پر کا مماس، انتصابی کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

۲۴ — ایک توپ کو ایک پہاڑی کے رُخ پر جو مُستوی ہے نصب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ کُل رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے ایک قطع ناقص ہے جس کا ماسکہ توپ پر ہے اور جس کا خروج المرکز پہاڑی کے میلان کی جیب ہے اور نیم وتر خاص اُس ارتفاع کے نصف کے مساوی ہے جس تک گولی کی ابتدائی رفتار گولی کو لیجا سکتی ہے۔

۲۵ — ایک پہاڑی کا رُخ مستوی ہے اور اس کا میلان ع ہے۔ ایک توپ کو پہاڑی پر کے ایک قلعہ پر جس کا ارتفاع ع ہے نصب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ پہاڑی کے مُستوی رُخ کا وہ رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے

$$۴\pi ر (ر + خ\ جم^2 عہ)\ قط^2 عہ$$

ہے جہاں گولی کی ابتدائی رفتار $\sqrt{۲ ج ر}$ ہے۔

۲۶ — ایک کُروی خول جس کی کمیت ک ہے پھٹ پڑتا ہے جبکہ وہ زمین کے اوپر ف ارتفاع پر ناقابل قدر رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ خول بہت چھوٹے ذرات میں منقسم ہو جاتا ہے اور ان میں سے ہر ذرہ کرہ کے مرکز سے ع رفتار کے ساتھ مرکز سے دُور حرکت کرتا ہے اور بالآخر زمین پر گرتا ہے۔ اُن ذروں کی کُل کمیت معلوم کرو جو اُس نقطہ سے جو خول کے انتصاباً نیچے ہے کسی مقررہ فاصلہ پر اکائی رقبہ میں ملیں گے۔

۲۷ — ایک خول ہوا میں پھٹتا ہے اور اس کے تمام ذرے دھماکہ کی باعث مساوی رفتاریں حاصل کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی آن ذرے ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور ان کے راستوں کے ماسکے بھی ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور راس ایک کرہ نما پر واقع ہوں گے۔

۲۸ — ایک ذرہ ایک کھُردرے مائل مستوی ا ب کے نیچے پھسلتا ہے، وہ مُستوی کے نقطہ ا سے حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مُستوی کو نقطہ ب پر چھوڑنے کے بعد آزادانہ ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے اگر مرتسمہ مکافی کا ماسکہ س ہے تو ثابت کرو کہ زاویہ ا س ب = $\frac{\pi}{۲}$ + صہ جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۹ — ایک قلعہ سے پانی پر تیرنے والے ایک نشان کا مشاہدہ کیا گیا تو

معلوم ہوا کہ اس کا زاویہ انخفاض افق کے نیچے عہ ہے ۔ اس نشان پر ایک توپ کو ارتفاع یہ پر فائر کیا گیا لیکن گولہ پانی پر ایک نقطہ سے جا لگا جس کا انخفاض عَہ تھا۔ ثابت کرو کہ نشان پر ضرب لگانے کے لیے گولے کو ارتفاع طہ پر فائر کرنا چاہئے جہاں

$$\frac{\text{جم طہ جیب (طہ + عہ)}}{\text{جم عہ جیب (یہ + عَہ)}} = \frac{\text{جم}^2\text{ عہ جیب عَہ}}{\text{جم}^2\text{ عَہ جیب عہ}}$$

۳۰ ۔ ثابت کرو کہ کم سے کم توانائی جس کے ذریعہ ایک ذرہ کو ایک دیوار کے اوپر پھینکا جا سکتا ہے جب کہ دیوار پھینکنے کے نقطہ سے ا فاصلہ پر ہو حسب ذیل ہے :-

$$\frac{1}{2}\text{ ک ج ا } \frac{1 + \text{مس } \frac{1}{2}\text{ عہ}}{1 - \text{مس } \frac{1}{2}\text{ عہ}}$$

جہاں پھینکنے کے نقطہ پر دیوار کے سرے کا ارتفاع عہ ہے ۔

۳۱ ۔ نصف قطر ا کا چکی کا ایک پاٹ اس طرح گھومتا ہے کہ اس کی کور کی رفتار و ہے اور پاٹ کی کور سے آٹے کے ذرات نکلتے ہیں ثابت کرو کہ ان کے راستوں کا لفاف ایک قطع مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور جس کا ماسکہ پاٹ کے مرکز کے انتصاباً اوپر $\frac{\text{ا}^2\text{ج}}{2\text{و}^2}$ کے فاصلہ پر ہے ۔

(۲۲۰)

نواں باب

ذروں کے نظاموں کی حرکت

حرکت کی مساواتیں

۱۷۹ — اس باب میں ذروں کے نظاموں کی حرکت پر بحث کی جائے گی اور اُن اعمال اور تعاملات کا بھی لحاظ رکھا جائے گا جو ذروں کے مختلف زوجوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتے ہیں — ابتداءً اُن نتیجوں کو جو ایک ذرہ کے لیے حاصل ہو چکے ہیں اختصاراً بیان کرنا اور انہیں پہلے کی بہ نسبت زیادہ تحلیلی شکل میں رکھنا سہولت بخش ہوگا —

ایک واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے کُل نظام کا حاصل ایک واحد قوت ہونی چاہیئے کیونکہ یہ سب قوتیں ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں — فرض کرو کہ ہم اس حاصل کو ف سے تعبیر کرتے ہیں اور تین قائم محوروں کی سمت میں اس کے اجزائے ترکیبی کو لا، ما، ے سے ظاہر کرتے ہیں —

نیز چونکہ ذرہ کو ایک نقطہ سمجھا جا سکتا ہے اس لئے اس کا ایک مُعین اسراع ع ہونا چاہیئے اور چونکہ ع ایک سمتی ہے اس لئے اس اسراع کو محدود کے تین محوروں میں تین اجزائے ترکیبی ع، ع، ع کا مرکب فرض کیا جا سکتا ہے —

حرکت کے دوسرے قانون سے رشتہ

ف = ک ع

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن حرکت کے دوسرے قانون سے اِس سے کچھ زیادہ بھی معلوم ہوتا ہے اور وہ یہ کہ ف اور ع کی سمتیں ایک ہی ہیں۔ فرض کرو کہ اِس واحد سمت کی سمتی جیوب التمام لہ، مہ، نہ ہیں تو

لا = لہ ف، ما = مہ ف، یے = نہ ف

اور نیز $ع_{لا}$ = لہ ع، $ع_{ما}$ = مہ ع، $ع_{ی}$ = نہ ع

اِن رشتوں اور رشتہ (۶۵) کے ذریعہ حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\left.\begin{array}{l} لا = ک\, ع_{لا} \\ ما = ک\, ع_{ما} \\ یے = ک\, ع_{ی} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۶)$$

یہ مساواتیں تحلیلی شکل میں ایک ذرہ کی حرکت کی ہیں۔ یہ ریاضی کی زبان میں صرف حرکت کے دوسرے قانون کو بیان کرتی ہیں۔ (۲۲۱)

۱۷۷۔ فرض کرو کہ کسی آن ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہیں اور فرض کرو کہ اس کی رفتار کے تین اجزائے ترکیبی ء، و، ط ہیں۔ جزو ترکیبی ء، محور لا، اس رفتار کو تعبیر کرتا ہے جو محور لا پر متحرک نقطہ کے ظل کی ہے اور کسی آن اِس نقطہ کا فاصلہ مبدأ سے صرف لا ہے۔ اِس لیے رفتار کی تعریف ...

$$ء = \frac{فر لا}{فر ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۷)$$

اسی طرح

$$و = \frac{فر ما}{فر ت}$$

$$ط = \frac{فر ی}{فر ت}$$

وہ شرح جس سے رفتار کا جزو ترکیبی لا بڑھتا ہے $\frac{فر ء}{فر ت}$ ہے لیکن

اِس کو ع لا فرض کیا جا چکا ہے کیونکہ وہ اسراع کا جزو ترکیبی لا ہے ۔ اس طرح

$$ع_{لا} = \frac{فر ع}{فر ت}$$

اسی طرح

$$ع_{ما} = \frac{فر و}{فر ت}$$

$$ع_{ی} = \frac{فر ط}{فر ت}$$

ع، و، ط کی جو قیمتیں اوپر حاصل ہوئی ہیں اُن کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں :

$$ع_{لا} = \frac{فر^{۲} لا}{فر ت^{۲}}$$

$$ع_{ما} = \frac{فر^{۲} ما}{فر ت^{۲}}$$

$$ع_{ی} = \frac{فر^{۲} ی}{فر ت^{۲}}$$

(۲۲۲) حرکت کی مساواتوں (۶۶) میں اسراع کے اجزائے ترکیبی کے اِن جملوں کو درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل نئی شکل میں حاصل ہوتی ہیں :

$$\left.\begin{aligned} لا &= ک \frac{فر^{۲} لا}{فر ت^{۲}} \\ ما &= ک \frac{فر^{۲} ما}{فر ت^{۲}} \\ ے &= ک \frac{فر^{۲} ی}{فر ت^{۲}} \end{aligned}\right\} \quad (۶۸)$$

۱۷۸ ـــ فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام ـــ ک ۱ نقطہ لا ۱، ما ۱، ی ۱ پر، ک ۲ نقطہ لا ۲، ما ۲، ی ۲ پر وغیرہ ـــ ہے اور فرض کرو کہ اِن پر عمل کرنے والی قوتیں

اجزائے ترکیبی لا_1، ما_1، سے_1، لا_2، ما_2، سے_2 وغیرہ ہیں۔

اب مساواتوں (۶۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}_1 = \text{ک}_1 \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}_1}{\text{فرت}^2}$$

$$\text{لا}_2 = \text{ک}_2 \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}_2}{\text{فرت}^2}\text{، وغیرہ}$$

اس لئے جمع کرنے سے $\Sigma\,\text{لا} = \Sigma\,\text{ک} \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}$ ...... (۶۹)

جہاں Σ، نظام کے تمام ذروں پر عمل جمع کو تعبیر کرتا ہے۔

اس مساوات کی دائیں جانب کا رکن $\Sigma\,\text{لا}$، و لا کی سمت میں اُن تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ ہے جو نظام کے تمام ذروں پر عمل کرتی ہیں۔ دفعہ ۵۰ کی بموجب اِن قوتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے:

(ا) بیرونی قوتیں — وہ قوتیں جو ذروں پر نظام کے باہر سے عمل کرتی ہیں۔

(ب) اندرونی قوتیں — وہ قوتیں جو نظام کے ذروں کے درمیان ایک دوسرے پر عمل کرتی ہیں۔

حسب دفعہ ۵۰ یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوتوں کی اِس دوسری جماعت سے $\Sigma\,\text{لا}$ میں کوئی اضافہ نہیں ہوتا کیونکہ یہ سب قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور ہر جوڑا عمل اور تعامل پر جس کے اجزائے ترکیبی مساوی اور مخالف ہوتے ہیں مشتمل ہوتا ہے۔

پس $\Sigma\,\text{لا}$ کو محسوب کرنے میں ہمیں صرف بیرونی قوتوں کو ملحوظ رکھنا ہوگا۔

مساوات (۶۹) کی بائیں جانب کی رقم $\Sigma\,\text{ک} \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2}$ کی شکل بھی (۲۲۳)

بدلی جا سکتی ہے۔ کیونکہ مساوات (۶۷) کی رو سے $\text{ع} = \frac{\text{فرغ}}{\text{فرت}}$ اور اس لیے

$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}$ کی قیمت $\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$ ہے، اس لیے

$$\Sigma\,\text{ک}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \Sigma\,\text{ک}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\Sigma\,\text{ک ع}\right) \qquad (۷۰)$$

کسی ذرہ کے معیار حرکت سے مراد اس کی کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب ہے (دفعہ ۲۰) اس لیے ذرہ کا معیار حرکت ایک سمتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ک ع، ک و، ک ط ہیں اور ک ع کو معیار حرکت کا جزو ترکیبی لا کہا جا سکتا ہے۔ نظام کا ہر ذرہ معیار حرکت رکھیگا اور اس سے اجزائے ترکیبی لا (Σ ک ع) ہوں گے اور یہ وہ مقدار ہے جو مساوات (۷۰) کی بائیں جانب واقع ہے

اب ہم مساوات (۶۹) کی جگہ حسب ذیل مساوات رکھ سکتے ہیں:

$$\Sigma X = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\Sigma\,\text{ک ع}\right) \qquad (۷۱)$$

جہاں ΣX سے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور Σ ک ع، معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ ہے۔

خطی معیار حرکت کا بقا

۱۷۹ — جب کوئی بیرونی قوتیں موجود نہ ہوں تو $\Sigma X = 0$ اور اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\Sigma\,\text{ک ع}\right) = 0 \qquad (۷۲)$$

اسی طرح

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\Sigma\,\text{ک و}\right) = 0 \qquad (۷۳)$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\Sigma\,\text{ک ط}\right) = 0 \qquad (۷۴)$$

اِن مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقداریں

$$\Sigma\,\text{ک ع}،\quad \Sigma\,\text{ک و}،\quad \Sigma\,\text{ک ط}$$

وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتیں ۔ یعنی کل معیارِ حرکت کے اجزائے ترکیبی مستقل رہتے ہیں اور اِس لیے کل معیارِ حرکت جسے ایک سمتی تصور کیا گیا ہے مستقل ہے ۔ اِس کو معیارِ حرکت کے بقا کا اصول کہتے ہیں ۔ اسے الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے :

جب ذروں کا کوئی نظام حرکت کرتا ہے درآنحالیکہ اِس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں تو نظام کا کُل معیارِ حرکت مقدار اور سمت میں مستقل رہتا ہے ۔

نظام کے مرکزِ ثقل کی حرکت

۱۸۰ — اب ہم عام مساواتوں (۱۷)

$$\Sigma\,\text{لا} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\Sigma\,\text{ک ع}\right) \text{ وغیرہ} \qquad (۷۵)$$

کی طرف رجوع کرتے ہیں ۔

فرض کرو کہ نظام کے ذروں کے مرکزِ ثقل کے محدد کسی آن لاَ، ماَ، یَ ہیں اور فرض کرو کہ اِس نقطہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی عَ، وَ، طَ سے تعبیر ہوتے ہیں ۔

اب

$$\bar{\text{ع}} = \frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} \text{ ، وغیرہ}$$

لاَ کی قیمت بموجب مساوات (۸) حسب ذیل ہے:

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\,\text{ک لا}}{\Sigma\,\text{ک}}$$

$$\therefore\ \bar{\text{ع}} = \frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\Sigma\,\text{ک لا}}{\Sigma\,\text{ک}}\right)$$

$$= \frac{\Sigma\,\text{ک}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}}{\Sigma\,\text{ک}} = \frac{\Sigma\,\text{ک ع}}{\Sigma\,\text{ک}}$$

پس اگر تمام ذروں کی کل کمیت $\Sigma\,\text{ک} = \bar{\text{ک}}$ تو

$$\Sigma\,\text{ک ع} = \bar{\text{ک}}\ \bar{\text{ع}}$$

اب مساوات (۵ ۷) ہو جاتی ہے (۲۲۵)

$$\Sigma\,\text{لا} = \bar{\text{ک}}\ \frac{\text{فر}\bar{\text{ع}}}{\text{فرت}} \quad \cdots\cdots\ (۷۷)$$

اسی طرح مساواتیں

$$\Sigma\,\text{ما} = \bar{\text{ک}}\ \frac{\text{فر}\bar{\text{و}}}{\text{فرت}} \quad \cdots\cdots\ (۷۸)$$

$$\Sigma\,\text{ے} = \bar{\text{ک}}\ \frac{\text{فر}\bar{\text{ط}}}{\text{فرت}} \quad \cdots\cdots\ (۷۹)$$

حاصل ہوتی ہیں۔

چونکہ

$$\frac{\text{فر}\bar{\text{ع}}}{\text{فرت}}\ ،\ \frac{\text{فر}\bar{\text{و}}}{\text{فرت}}\ ،\ \frac{\text{فر}\bar{\text{ط}}}{\text{فرت}}$$

مرکز ثقل کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ہیں اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز ثقل کی حرکت وہی ہے جو ہوتی اگر اس کی بجائے کمیت $\bar{\text{ک}}$ کا ایک ذرہ رکھا جاتا اور اس پر وہ قوت عمل کرتی جس کے اجزائے ترکیبی $\Sigma\,\text{لا}$ ، $\Sigma\,\text{ما}$ ، $\Sigma\,\text{ے}$ ہیں۔ نیز یہ قوت صرف وہ قوت ہے جو تمام بیرونی قوتوں کا حاصل ہے جبکہ ان قوتوں کو اس خیالی ذرہ پر عمل کرتا ہوا سمجھا جائے جس کے متعلق ہم نے فرض کیا ہے کہ وہ مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

۱۸۱ — اس مخصوص صورت میں جس میں کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں مرکز ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک ایسا ذرہ ہے جس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں، اس لیے اس کی حرکت ایک خط مستقیم میں یکساں رفتار کی حرکت ہوگی۔

۱۸۲ — مرکز ثقل کی حرکت اس مخصوص صورت میں اور اس عام تر صورت میں جس میں بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں حسب ذیل دو قوانین کے تحت فرض کیجا سکتی ہے:

قانون (۱) — ذروں کے ہر نظام کا مرکز ثقل سکون کی حالت میں رہتا ہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں الا آنکہ اس نظام پر بیرونی قوتوں کا عمل اس حالت کو بدلنے پر مجبور کرے۔

قانون (۲) — جب ذروں کے کسی نظام پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں تو مرکز ثقل کی حرکت وہی ہوتی ہے جو ہوتی اگر ذرہ تمام کمیتیں ایک واحد ذرہ میں مرتکز ہوتیں اور یہ ذرہ مرکز ثقل سے حرکت کرتا اور اس پر تمام بیرونی قوتیں لگائی جاتیں۔

ان قوانین کو نیوٹن کے قوانین (۱) اور (۲) کی توسیعات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ انہیں ذروں کے ایک نظام کی حرکت پر عائد لیا جائے۔ (۲۲۶)
اب ہم اس امر کی توجیہ کر سکتے ہیں کہ کیوں نیوٹن کے دوسرے قانون کو جثے کے اجسام کی حرکت پر عائد کرنا اکثر جائز ہے گویا کہ وہ ذرے ہوں (مقابلہ کرو دفعہ ۲۶ کے ساتھ)۔
معیار حرکت کے بقا کا اصول اب بیان کیا جاتا ہے۔

جس میں صرف دو اجسام حرکت میں ہوں اکثر کافی ثابت ہوتا ہے۔

توضیحی مثال

کمیت ک کا ایک گولہ کمیت ک کی توپ سے سر کیا گیا ہے اور توپ افقی پٹڑیوں سے ایک سمت پر پیچھے حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ توپ کے پیچھے ہٹنے کی رفتار معلوم کرو اور اس کے ہٹنے کا اثر گولے کی حرکت پر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ توپ کو سر کرنے سے پیشتر وہ اپنی نال میں قائم ہے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اور فرض کرو کہ گولے کی ابتدائی رفتار یعنے وہ رفتار جو توپ کے لحاظ سے اس کے دہانے سے خارج ہوتے وقت ہوتی ہے۔ بہ اعتبار دورے کی لمیت ک ہے۔

فرض کرو کہ زمین کے لحاظ سے گولے کی رفتار کے اجزائے ترکیبی افقی اور انتصابی ع اور و ہیں اور فرض کرو کہ توپ کی پیچھے کی رفتار ع ہے جس کو افقی سمت میں اس سمت کے خلاف پیمائش کیا گیا ہے جس کی جانب توپ قائم کی گئی ہے۔

وہ نظام جو توپ، بارود اور گولے پر مشتمل ہے بیرونی قوتوں کے عمل سے آزاد نہیں ہے لیکن یہ قوتیں "یعنے نظام کا وزن اور زمین کے ساتھ اس کا تعامل" کوئی افقی جزو ترکیبی نہیں رکھتیں۔ اس لیے نظام کا افقی معیار حرکت دھماکے سے غیر متبدل رہنا چاہئے۔ یہ افقی معیار حرکت ابتداً صفر تھا اور اس لیے وہ صفر ہے جبکہ گولہ توپ سے نکلتا ہے۔ پس بارود کے وزن کو نظرانداز کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ک ع ـ ک ء = ۰ .... (۱)

توپ کے لحاظ سے گولے کی جو رفتار ہے اس کے اجزائے ترکیبی

ء + ع، و

ہیں۔ لیکن یہ رفتار، رفتار و ہونی چاہئے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اسلئے

$$\text{ع} + \text{ع} = \text{و جم عہ} \qquad (\text{ب})$$

$$\text{و} = \text{و جب عہ} \qquad (\text{ج})$$

مساوات (ل) اور مساوات (ب) سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\text{ع}}{\text{ک}} = \frac{\text{ع}}{\text{ک}} = \frac{\text{و جم عہ}}{\text{ک} + \text{ک}}$$

پس پیچھے ہٹنے کی رفتار ہے

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}}{\text{ک} + \text{ک}} \text{ و جم عہ}$$

گولے کی اصلی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں (۲۲۷)

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}}{\text{ک} + \text{ک}} \text{ و جم عہ}$$

$$\text{و} = \text{و جب عہ}$$

اس طرح گولے کی اصلی رفتار

$$\sqrt{\text{ع}^2 + \text{و}^2} = \text{و} \left[۱ - \frac{\text{ک} (۲\text{ک} + \text{ک})}{(\text{ک} + \text{ک})^2} \text{ جم}^2 \text{ عہ} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ہے اور زاویہ ارتفاع طہ مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{و}}{\text{ع}} = \frac{\text{ک} + \text{ک}}{\text{ک}} \text{ مس عہ}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک خالی ریلوے ڈبہ ۸ ٹن وزنی ساکن ہے، ایک دوسرا مشابہ ڈبہ جس پر ۲۴ ٹن کا بوجھ ہے اور جو ایک میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے اول الذکر ڈبے سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں ڈبے باہم حرکت کرتے ہیں۔ ان کی مشترک رفتار معلوم کرو۔

۲ــ کمیت ک کی ایک توپ، کمیت کَ کا ایک گولہ افقاً فائر کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ بارود سے جتنا کام انجام پاتا ہے اس کی ایک کسر $\frac{کَ}{ک + کَ}$ توپ کو پیچھے دھکا دینے میں ضائع ہوتی ہے۔

۳ــ کمیت کَ کا ایک ذرہ، زاویہ ہ کے ایک چکنے مائل مستوی پر نیچے پھسلتا ہے اور خود مستوی (جس کی کمیت ک ہے) ایک چکنے میز پر پھسلنے میں آزاد ہے۔ ذرہ اور مستوی کا اسراع معلوم کرو۔

۴ــ ایک خول کا مشاہدہ کیا گیا کہ وہ اُس وقت پھٹا جبکہ وہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر تھا اور پھٹ کر وہ دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوا جن میں سے ایک انتصاباً نیچے گرتا نظر آیا۔ ثابت کرو کہ دوسرا حصہ ایک قطع مکافی مرتسم کرے گا جس کا وتر خاص ابتدائی مکافی کے وتر خاص کا چار گنا ہوگا۔

۵ــ ایک گولی جس کا وزن $\frac{1}{2}$ اونس ہے ایک پرندے کو جس کا وزن ۵ پونڈ ہے لگتی ہے جبکہ وہ ہوا میں اُڑ رہا تھا۔ گولی کی ضرب پڑتے وقت گولی کی افقی رفتار ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور پرند زمین سے اوپر ۶۴ فٹ بلندی پر اسی افقی سمت میں رفتار ۲۰ فٹ ثانیہ سے اُڑ رہا تھا۔ ثابت کرو کہ پرند اُس مقام سے جہاں اُس پر مار پڑی تھی تقریباً ۲ء۵۲ فٹ آگے گریگا۔

۶ــ ۵۰۰۰ ٹن کا ایک جہاز جو ۲۰ بحری میل فی گھنٹہ کی شرح سے جارہا ہے اچانک ایک وہیل مچھلی سے ٹکراتا ہے جس کا وزن ۱۲ ٹن ہے اور جو پانی کی سطح پر سو رہی ہے۔ جہاز کی چال کتنی گھٹیگی؟ (پانی کی رفتار کو نظر انداز کرو)۔

۷ــ ایک پارسل کو جس کا وزن ۲ ہنڈرویٹ ہے ایک ریل سے جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے جارہی ہے پھینکا گیا ہے۔ پھینکتے وقت اِس کی افقی رفتار ٹرین کے لحاظ سے ۱۱ فٹ فی ثانیہ ہے اور پٹڑیوں کے علی القوائم ہے۔ وہ ۳ ہنڈرویٹ وزنی دستی گاڑی پر گرتا ہے جو ایک ہموار چبوترے پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور اِس کے پہیئے اس طرح ہیں کہ اِن کی حرکت پٹڑیوں سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ کس رفتار سے گاڑی حرکت میں آئے گی؟

(۲۴۸) ۸ ـــ ۸ پونڈ کی ایک کمیت جو شمالاً ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کررہی ہے ۶ پونڈ کی ایک کمیت سے جو شرقاً ۱۴ فٹ فی ثانیہ سے حرکت کر رہی ہے ٹکراتی ہے اور اس کی حرکت میں ۳۰° کا انصراف واقع ہوتا ہے اور اس کی رفتار بقدر ایک فٹ فی ثانیہ کے بڑھ جاتی ہے ـ ثابت کرو کہ دوسری کمیت کی رفتار بقدر ۳۲ء۱ فٹ فی ثانیہ کے گھٹ جاتی ہے ـ اس کی حرکت کی نئی سمت معلوم کرو ـ

۹ ـــ دو برف بجرے جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے کامل چکنے برف پر ساکن کھڑے ہیں اور ان کے پیندے ایک ہی سمت میں ہیں ـ ایک شخص کمیت ک' ایک بجرے سے دوسرے پر کودتا ہے اور فوراً بعد ہی دوسرے سے پہلے پر واپس آتا ہے ـ ثابت کرو کہ بجروں کی انتہائی رفتاروں میں نسبت ک + ک' : ک ہے ـ

توانائی بالحرکت

۱۸۳ ـــ ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت کے مطالعہ کی ابتداء بہترین طریقہ پر اس طرح کی جا سکتی ہے کہ سب سے اول اس مشکل کی طرف اپنی توجہ کو منعطف کیا جائے جو اس کتاب میں تا حال زیر بحث نہیں آئی ہے ـ اس مشکل کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی ـ

فرض کرو کہ ایک جہاز پانی میں ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کررہا ہے اور عرشہ پر سے ایک شخص کمیت ک کا ایک گولہ جہاز کے لحاظ سے ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے آگے پھینکتا ہے ـ اگر یہ شخص فضاء میں ساکن ہوتا تو ہم کہہ سکتے کہ اس نے اتنا کام انجام دیا ہے جو گولے کی آخری توانائی بالحرکت کے مساوی ہے اور اس لئے $\frac{1}{2}$ ک (۳۰)^2 یا ۴۵۰ ک ہے لیکن جہاز کے عرشہ پر گولے کی ابتدائی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور شخص اس رفتار کو ۵۰ تک بڑھاتا ہے ـ اس لیے گولے کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی

$$\frac{1}{2} \text{ک} (۵۰)^2 - \frac{1}{2} \text{ک} (۲۰)^2$$

یعنے ۰.۵۰ ک ہے۔ اگر اس سے اُس شخص کا کام تعبیر ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا پڑتا ہے کہ جہاز کے عرشہ سے گولہ پھینکنا زمین پر سے پھینکنے کی بہ نسبت دُگنے سے زیادہ سخت کام ہے ۔ یہ صریحاً غلط ہے ۔

۱۸۴ ۔ خطا اس میں واقع ہوئی ہے کہ پھینکنے والا شخص نہ صرف گولے کو رفتار ایصال کرتا ہے بلکہ جہاز کو بھی ۔ اگر وہ گولے کو آگے پھینکتا ہے تو اسکو ساتھ ہی معیار حرکت کے بقا کے اصول کی رو سے جہاز کو پیچھے وار رفتار ایصال کرنی چاہیئے جس کا معیار حرکت گولے کے آگے وار معیار حرکت کے مساوی اور مخالف ہوگا ۔

کُل کام جو انجام پایا اُس تبدیلی کے مساوی ہے جو جہاز اور گولے کی توانائی بالحرکت میں پیدا ہوئی ۔ (۲۲۹)

اب چونکہ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کوئی قوت تنہا عمل نہیں کر سکتی اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توانائی بالحرکت سے کام کو محسوب کرنے کی ہر صورت میں ایک سے زیادہ اجسام کی توانائی بالحرکت پر غور کرنا ہوگا ۔ مثلاً ایک شخص جو زمین پر سے ایک گولے کو پھینکتا ہے نہ صرف گولے کو آگے جنبش دیتا ہے بلکہ اس کے ساتھ ہی پوری زمین کو بھی پیچھے وار دھکا مارتا ہے اور اس لیے دونوں کی توانائی کو شمار کرنا ہوگا ورنہ غلط نتیجے برآمد ہوں گے ۔

۱۸۵ ۔ ایک دوسری مشکل جو پہلی سے قریبی تعلق رکھتی ہے فوراً پیش ہوتی ہے ۔ فرض کرو کہ ہم نے ایک گولے کو رفتار و سے جہاز کے عرشہ کی سمت میں جو خود رفتار و سے حرکت کر رہا ہے پھینکا ہے ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہمیں گولے کی توانائی کو $\frac{1}{2}$ ک و^2 فرض نہیں کرنا چاہئے لیکن کیا اس کو $\frac{1}{2}$ ک (و + و)^2 فرض کرنا کچھ زیادہ مناسب ہے ؟ ہرگز نہیں کیونکہ وہ سمندر جس میں جہاز چل رہا ہے زمین کی گردش کے باعث رفتار وَ (فرض کرو) رکھتا ہے اور اس لئے توانائی کو اسی سبب کی بنا پر

$$\frac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{و}+\text{ۏ}+\text{وَ})^2$$

لینا ہوگا اور علیٰ ہذا ہم اس سلسلہ کو لاانتہا بڑھا سکتے ہیں ۔ کوئی ایسا حوالے کا فریم معلوم ہونے سے جو کامل طور پر ساکن ہو توانائی بالحرکت کی اصلی قیمت معلوم کرنا ناممکن نظر آئے گا ۔ مزید براں یہ مشاہدہ طلب ہے کہ توانائی بالحرکت کے جملے جو مختلف حوالے کے فریموں کے حوالے سے حاصل ہوتے ہیں صرف مستقلوں کا ہی فرق نہیں رکھتے ۔ مثلاً ان دو جملوں کے درمیان فرق جو ہم نے سمندر کے لحاظ سے توانائی بالحرکت اور زمین کے مرکز کے لحاظ سے توانائی بالحرکت کے لیے معلوم کئے ہیں حسب ذیل ہے :

$$\frac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{و}+\text{ۏ}+\text{وَ})^2-\frac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{و}+\text{ۏ})^2$$

$$=\frac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{وَ}^2+\text{ک}\,\text{وَ}\,(\text{و}+\text{ۏ})$$

یہ فرق نہ صرف ک اور وَ پر منحصر ہے بلکہ و اور ۏ پر بھی ۔ یہ فرق مستقل نہیں ہے اور اس لیے معدوم نہیں ہوتا جب ہم توانائی بالحرکت کا اضافہ محسوب کرتے ہیں جو قوتوں کے عمل سے پیدا ہوا ہے ۔

حسب ذیل مسئلوں سے ایک ایسے طریقے کا اظہار ہوتا ہے جس سے یہ مشکلیں اور ان کی جیسی دوسری رفع ہو سکتی ہیں ۔

۱۸۶ ۔ مسئلہ ۔ متحرک ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت، ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت اور اس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے جس کی کمیت نظام کی کل کمیت کے مساوی ہو اور جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرے ۔

فرض کرو کہ نقطہ لا_1، با_1، ی_1 پر ذرہ ک_1 ہے اور علیٰ ہذا ۔ فرض کرو کہ محددوں کی پیمائش اس طرح عمل میں آئی ہے کہ مرکز ثقل کو مبدا لیا گیا ہے فرض کرو کہ رفتاریں ع_1، و_1، ط_1 وغیرہ سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ ان کی

پیمائش ایک فریم کے لحاظ سے کی گئی ہے جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے، اس لئے

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{ف}\,\text{لا}_1}{\text{ف}\,\text{ت}} \text{، وغیرہ}$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار کسی حوالے کے فریم کے حوالے سے جو خود متحرک ہے یا ساکن ہے (صرف اس شرط کے ساتھ کہ محوروں کی سمتیں گردش نہیں کرتیں) اجزائے ترکیبی $\bar{\text{ع}}$، $\bar{\text{و}}$، $\bar{\text{ط}}$ رکھتی ہے۔ اب ذرہ ک_1 کی رفتار دو رفتاروں کا مرکب ہے، ایک ذرہ کی وہ رفتار ہے جو نظام کے مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے اور جس کے اجزائے ترکیبی ع_1، و_1، ط_1 ہیں اور دوسری مرکز ثقل کی رفتار ہے جس کے اجزائے ترکیبی $\bar{\text{ع}}$، $\bar{\text{و}}$، $\bar{\text{ط}}$ ہیں۔ اس لیے ذرہ ک_1 کی کل رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہیں:

$$\bar{\text{ع}}+\text{ع}_1\text{، }\bar{\text{و}}+\text{و}_1\text{، }\bar{\text{ط}}+\text{ط}_1$$

پس پہلے ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\text{ک}_1\left[(\bar{\text{ع}}+\text{ع}_1)^2+(\bar{\text{و}}+\text{و}_1)^2+(\bar{\text{ط}}+\text{ط}_1)^2\right]$$

ہے اور اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\Sigma\,\text{ک}\left[(\bar{\text{ع}}+\text{ع}_1)^2+(\bar{\text{و}}+\text{و}_1)^2+(\bar{\text{ط}}+\text{ط})^2\right]$$

ہے یا مربعوں کو پھیلانے سے

$$\frac{1}{2}(\Sigma\,\text{ک})(\bar{\text{ع}}^2+\bar{\text{و}}^2+\bar{\text{ط}}^2)$$

$$+\bar{\text{ع}}\,\Sigma\,\text{ک}\,\text{ع}+\bar{\text{و}}\,\Sigma\,\text{ک}\,\text{و}+\bar{\text{ط}}\,\Sigma\,\text{ک}\,\text{ط}$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma\,\text{ک}(\text{ع}^2+\text{و}^2+\text{ط}^2) \qquad (۸۰)$$

چونکہ مرکز ثقل کو مبداء کے طور پر لیا گیا ہے اور ذروں کے محدد

لا، ما، ی، وغیرہ ہیں اس لیے مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\cdot = \frac{\sum ک لا}{\sum ک} \text{، وغیرہ} \qquad (۱۳۲)$$

اور اس لئے $\sum$ ک لا = ۰۔ پس $\sum$ ک $\frac{ذ لا}{ذ ت}$ = ۰ یا $\sum$ ک ع = ۰۔ اسی طرح $\sum$ ک و = ۰ اور $\sum$ ک ط = ۰۔ اس طرح جملہ (۸۰) کی دوسری سطر پوری کی پوری معدوم ہوتی ہے اور توانائی بالحرکت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}(\sum ک)(\bar{ع}^2 + \bar{و}^2 + \bar{ط}^2) + \frac{1}{2}\sum ک (ع^2 + و^2 + ط^2) \qquad (۸۱)$$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۸۷ — اس کے بعد فرض کرو کہ مرکز ثقل کے محدد ثابت محوروں کے ایک خیالی جٹ کے حوالے سے کسی آن $\bar{لا}$، $\bar{ما}$، $\bar{ی}$ ہیں اور مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق $\bar{ع}$، $\bar{و}$، $\bar{ط}$ ہیں۔

ہم فرض کر چکے ہیں کہ مرکز ثقل کے لحاظ سے ذرہ ک، کے محدد لا، ما، ی، ہیں اور رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط، ہیں۔ اس لیے خیالی ثابت محوروں کے حوالے سے ذرہ ک، کے محدد

$$\bar{لا} + لا،\ \bar{ما} + ما،\ \bar{ی} + ی،$$

ہوں گے اور اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق

$$\bar{ع} + ع،\ \bar{و} + و،\ \bar{ط} + ط،$$

ہوں گے۔

فرض کرو کہ ذرہ ک، پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہیں۔ دفعہ ۱۴۱ کی بموجب اس ذرہ پر بیرونی قوتیں جو کام کرتی ہیں وہ اس منفی کام کے مساوی ہے جو ذرہ ان قوتوں کے خلاف انجام دیتا ہے۔ پس جب ذرہ اپنے راستے کے کسی چھوٹے عنصر کو طے کرتا ہے تو اس پر جو کام انجام

وہ حسب دفعہ ۱۱۸

لا، فر(لآ + لا،) + ما، فر(مآ + ما،) + ے، فر(ےَ + ے،)

کے مساوی ہے۔ اس لئے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں وہ کام جو تمام ذروں پر ہوتا ہے

Σ [لا، فر(لآ + لا،) + ما، فر(مآ + ما،) + ے، فر(ےَ + ے،)]

ہے اور اس کو حسب ذیل طریقے پر دو حصوں میں جدا کیا جاسکتا ہے:

(۲۳۲) پہلے حصہ کو

Σ لا، فرلآ + Σ ما، فرمآ + Σ ے، فرےَ (۸۲)

لے سکتے ہیں اور دوسرا حصہ حسب ذیل ہے

Σ لا، فرلا، + Σ ما، فرما، + Σ ے، فرے، (۸۳)

مساوات (۷۷) سے حاصل ہوتا ہے

Σ لا، = ک (فرعَ / فرت)

جہاں ک نظام کی کل کمیت ہے اور یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ کمیت ک کا ایک ذرہ ہے جس پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی Σ لا، ' Σ ما، ' Σ ے، ہیں۔
یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ جملہ (۸۲) اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو اس خیالی ذرہ کی حرکت میں انجام پاتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ کام اس کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مساوی ہونا چاہئے۔

کُل کام جملوں (۸۲) اور (۸۳) کا مجموعہ ہے۔ یہ کُل کام نظام کی کُل توانائی بالحرکت میں اضافے کے مساوی ہے (بموجب دفعہ ۱۴۰) اور نیز وہ پھر (بموجب دفعہ ۱۸۶) ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی

توانائی بالحرکت اور کمیت ک کے خیالی ذرہ کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مجموعہ کے مساوی ہے جبکہ خیالی ذرہ کو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہوا خیال کیا جائے۔

یہ آخری اضافہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جملہ (۸۲) سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے قبل الذکر (۸۳) سے تعبیر ہونا چاہیے۔

اِس طرح مرکز ثقل کے لحاظ سے توانائی بالحرکت میں اضافہ

$$\Sigma\left(\tfrac{1}{2}\,\text{فرلا}_1 + \text{ما}_1\,\text{فرما}_1 + \ldots\,\text{فری}_1\right)$$

ہے اور اس لیے اُس کام کے مساوی ہے جو قوتیں کرتی ہیں جبکہ اُس کو اس طرح محسوب کیا گیا ہو گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

۱۸۸ — اِس مسئلہ میں کہ توانائی بالقوہ کا اضافہ انجام پائے ہوئے کام کے مساوی ہے یہ جائز ہے کہ توانائی بالقوہ اور انجام پائے ہوئے کام دونوں کو صرف مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت پر غور کرکے محسوب کیا جائے یعنی نظام پر اِس طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

(۲۴۲) تمثیلاً اُس مسئلہ پر غور کرو جس میں ایک گولی کو متحرک جہاز پر سے فائر کیا گیا ہے۔ گولی کی کمیت جہاز کی کمیت کے مقابلہ میں خفیف ہونے کی وجہ سے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی اور جہاز کے مرکز ثقل کی حرکت ٹھیک وہی ہے جو جہاز کی ہے۔ اِس مرکز ثقل کے لحاظ سے گولی کی رفتار کو صرف وہ رفتار فرض کیا جا سکتا ہے جو بلحاظ عرشہ کے ہے۔ گولی کو نالی سے خارج کرنے میں بارود جو کام کرتی ہے وہ وہی ہے گویا کہ جہاز ساکن ہے اور اِس لیے جہاز کے لحاظ سے گولی کی رفتار وہی ہوگی گویا کہ جہاز ساکن ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک گاڑی رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہے اور گاڑی پر سے ایک شخص ریت کو گاڑی کی پشت کی جانب ک پونڈ فی منٹ کی شرح سے افقاً پھینکتا ہے

اور ریت کی رفتار ٹرک کے لحاظ سے و ہے۔ کس شرح سے آدمی کام کر رہا ہے؟

۲۔ ایک توپ گولے کو انتصابًا اوپر ارتفاع ف تک فائر کر سکتی ہے اسکو ایک مُسلح گاڑی پر جو رفتار و سے دوڑ رہی ہے رکھا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو جہاں تک گولہ پہنچ سکتا ہے (ا) گاڑی کے پیچھے (ب) گاڑی کے سامنے۔

۳۔ مثال ماسبق میں۔ راستہ سے قریب ترین وہ نقطہ معلوم کرو جو توپ کی زد سے باہر ہے۔

۴۔ کمیت ک کا ایک خول رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ اندرونی دھماکے سے توانائی کی مقدار ن پیدا ہوتی ہے اور خول کو دو کمیتوں میں توڑ دیتی ہے جن میں سے ایک کمیت دوسری کا ک گُنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ٹکڑے اُسی خط میں حرکت کرنا جاری رکھیں جس میں خول حرکت کر رہا تھا تو اِن کی رفتاریں حسب ذیل ہوں گی:

$$\text{و} \pm \sqrt{\frac{\text{۲ک ن}}{\text{ک}'}} \text{،} \quad \text{و} - \sqrt{\frac{\text{۲ ن}}{\text{ک ک}}}$$

۵۔ دو آدمی جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے دو غیر لچکدار تختوں پر کھڑے رہتے ہیں، ہر تختہ کی کمیت ک′ ہے اور وہ ایک چکنی چرخی پر سے لٹک رہے ہیں۔ اِن میں سے ایک آدمی زمین سے کود کر اپنے مرکز ثقل کو ارتفاع ف تک اونچا لیجا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ تختہ سے اُسی توانائی کے ساتھ اُچکے تو اِس کا مرکز ثقل، ارتفاع $\text{ف}\left(1 - \frac{\text{ک}}{\text{۲(ک + ک}')}\right)$ تک بلند ہوگا۔

دھکے والی قوتیں

۱۸۹۔ حرکیاتی مسائل میں بہت سی ایسی صورتیں پیش ہوتی ہیں جنمیں قوت کا عمل وقت کے اسقدر خفیف وقفہ میں شروع اور ختم ہوتا ہے کہ اِس عمل کو فوری یا آنی سمجھا جا سکتا ہے۔ ایسی قوتوں کو دھکے والی قوتیں

کہتے ہیں۔ دھکے والی قوتوں کی مثالیں وہ قوتیں لیجا سکتی ہیں جو نا امتداد پذیر تاگے کو جھٹکا دینے میں یا دو سخت اجسام کے درمیان ٹکر ہونے میں یہ عمل آتی ہیں۔

دھکے والی قوت کے عمل سے معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے اُس کی مقدار بالعموم محدود ہوتی ہے۔ چونکہ قوت صرف ایک صغیر وقت میں عمل کرتی ہے اس لیے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح لا انتہا بڑی ہونی چاہئے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح اُس قوت کے مساوی ہے جو عمل کرتی ہے اور اس لیے خود قوت کو جب تک کہ وہ عمل کرتی رہتی ہے لا انتہا بڑی ہونا چاہئے۔ اس لیے دھکے والی قوت کو ایک لا متناہی قوت سمجھا جا سکتا ہے جو صغیر وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔ (۲۴۴)

۱۹۰۔ دھکے والی قوتوں کے مطالعہ کی ابتداء ہی میں اِن قوتوں کی ایک طبیعی خصوصیت کا مشاہدہ کرنا مناسب ہوگا۔ کامل طور پر استوار جسم کی تعریف یہ کی گئی تھی کہ وہ ایسا جسم ہے جو کسی قوتوں کے زیر عمل خواہ وہ کتنی ہی بڑی ہوں اپنی شکل قائم رکھتا ہے۔ اس کے ساتھ ہی یہ بھی ظاہر کر دیا گیا تھا کہ کوئی کامل طور پر استوار جسم کائنات میں موجود نہیں ہے۔ پس بہت بڑی یا لا متناہی قوتوں مثلاً دھکے والی قوتوں کے زیر عمل کسی جسم کو کامل استوار نہیں سمجھا جا سکتا۔

اس کا نتیجہ یہ ہے کہ جب کوئی دھکے والی قوتیں عمل میں آتی ہیں تو مختلف چھوٹے ذروں کے درمیان جن سے سلسل اجسام ترکیب یافتہ ہوتے ہیں اضافی حرکت شروع ہوتی ہے۔ یہ اضافی حرکت اُس قسم کی توانائی رکھتی ہے جو حیلی اعمال کے ذریعہ نظام سے واپس وصول نہیں کیجا سکتی۔ فی الحقیقت ان ذروں کی اضافی حرکت صرف جسم کی حرارت کو تعبیر کرتی ہے چونکہ یہ توانائی نظام سے حیلی کام کے طور پر واپس کو وصول نہیں کی جا سکتی اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ دھکے والی قوتوں کو جو یہ توانائی پیدا کرنے کا

کام انجام دیتی ہیں بقائی قوتیں نہیں خیال کیا جا سکتا۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

کسی نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ دھکے والی قوتوں کے عمل میں مستقل نہیں رہتا۔

کیونکہ صریحاً دھکوں کے بعد توانائی کا ایک حصہ حرارت کی شکل میں رہ جاتا ہے۔

مثالاً سیسے کی ایک گولی پر غور کرو جو ایک فولادی نشانے پر ضرب لگاتی ہے۔ فرض کرو کہ نشانے پر ضرب پڑنے سے بیشتر گولی ارتفاع ف پر افقی رفتار و سے حرکت کر رہی تھی۔ اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ ک و^2 ہے اور اس کی توانائی بالقوہ ک ج ف۔ ضرب کے بعد ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی افقی رفتار نہیں رکھتی اور نشانے کے انتصاباً نیچے گر جاتی ہے۔ جس آن گولی گرنے لگتی ہے اس وقت توانائی بالحرکت صفر ہے لیکن توانائی بالقوہ ک ج ف ہے جیسا کہ ضرب سے بیشتر تھی۔ اس طرح کل توانائی میں سے توانائی $\frac{1}{2}$ ک و^2 غائب ہو چکی ہے۔ یہ توانائی گولی اور نشانے کے ذروں میں باہم گر حرکتیں پیدا کرنے میں استعمال ہوئی ہے، اور اس کا اظہار حرارت کی شکل میں اور نیز غالباً اجسام کی شکلوں کی مستقل تبدیلیوں میں۔ نشانے میں گڑھا یا گولی کا چپٹا ہو جانا ہوتا ہے۔

دھکے کی پیمائش (۲۳۵)

۱۹۱ — دھکے والی قوت، معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا کرتی ہے اس کو قوت کا دھکا کہتے ہیں۔ اس طرح اگر دھکہ د، کمیت ک پر عمل کرے اور اس کی رفتار کو (یا دھکے کی سمت میں رفتار کے جزو ترکیبی کو) ع سے و میں بدل دے تو

$$د = ک (و - ع) \quad (۸۴)$$

حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کسی لمحہ پر عمل کرنے والی قوت،

اُس ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی کی شرح کے مساوی ہوتی ہے جس پر وہ عمل کرتی ہے۔ اگر قوت کی مقدار مستقل ہے تو معیار حرکت کی کُل تبدیلی قوت اور اُس وقت کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جس میں وہ عمل کرتی رہتی ہے۔ لیکن اگر قوت کی مقدار متغیر ہے تو معیار حرکت کی تبدیلی قوت کے تکملہ کے مساوی ہو گی جو بلحاظ وقت کے جس میں قوت عمل کرتی رہتی ہے لیا گیا ہو۔ پس اگر کُل وقت ت کے کسی لمحہ پہ قوت کی قیمت ف ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ دھکہ

= ف ت، اگر قوت کی مقدار مستقل ہو

لیکن = $\int_0^{ت}$ ف فرت، اگر قوت کی مقدار متغیر ہو۔

دھکہ کا کام

۱۹۲ــــ کمیت ک کی رفتار کو ع سے و میں تبدیل کرنے میں دھکہ د سے جو کام انجام پاتا ہے وہ

$$\frac{1}{2}ک\,و^2 - \frac{1}{2}ک\,ع^2$$

کے مساوی ہے یعنے کمیت کی توانائی بالحرکت میں جو اضافہ ہوا ہے اُس کے مساوی ہے۔ اب چونکہ

$$د = ک\,(و - ع)$$

اس لئے اِس کام کے جملے کو شکل

$$\frac{1}{2}ک\,(و - ع)\,(و + ع)$$

$$= د\left(\frac{و + ع}{2}\right)$$

میں لکھا جا سکتا ہے

اس لئے دھکہ کا کام، زیر عمل کمیت کی ابتدائی اور آخری

رفتاروں کے اوسط اور دھکے کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔
(۲۲۶) اگر کمیت دھکے کے خط عمل کی سمت میں حرکت نہیں کر رہی ہے تو مذکورۂ بالا نتیجہ صریحاً درست ہوگا اگر ع، و کو دھکے کے خط عمل کی سمت میں رفتاروں کے اجزائے ترکیبی سمجھا جائے۔

توضیحی امثلہ

۱۔ ۱۴ پونڈ کا ایک گولہ، ۲۰۰ پونڈ کمیت کے ایک نشانہ پر جو زنجیروں کے ذریعہ لٹکا ہوا ہے فائر کیا گیا ہے، نشانہ حرکت کی ابتدا اتفاقاً کرنے میں آزاد ہے۔ اگر گولہ ٹکرانے سے پیشتر ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت کر رہا تھا اور ٹکرانے کے بعد نشانے میں دھنسا ہوا رہ جائے تو ٹکر کی وجہ سے توانائی کا نقصان معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹکر کے بعد نشانہ اور گولہ باہم و فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتے ہیں۔ لہٰذا معیار حرکت کے بقاء کے اصول سے ٹکر سے پیشتر کے معیار حرکت کو ٹکر کے بعد کے معیار حرکت کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$1000 \times 14 = 214 \times \text{و}$$

$$\therefore \quad \text{و} = \frac{14000}{214}$$

ٹکر سے قبل توانائی بالحرکت $\frac{1}{2} \times 14 \times (1000)^2$ تھی اور بعد $\frac{1}{2} \times 214 \times \text{و}^2$۔ اس لئے توانائی کا نقصان ہے

$$\frac{1}{2}\left(14000000 - 214\,\text{و}^2\right) = 654000$$ فٹ پونڈل، تقریباً

۲۔ ایک بھاری زنجیر جس کا طول ل ہے اور فی اکائی طول کمیت

ک ہے ایک میز کے کنارے پر اس طرح پکڑی گئی ہے کہ اس کا طول
ط' کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور باقی حصہ میز کے انتہائی
کنارے پر گول لپٹا پڑا ہے۔ اگر زنجیر کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو حرکت
کی کسی منزل پر رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حرکت کی کسی منزل پر زنجیر کا طول لا انتصاباً لٹک رہا ہے اور
اس طرح طول ل۔لا میز پر گول لپٹا ہوا ہے۔ صغیر وقت فرت کے بعد
فرض کرو کہ زنجیر کا جو حصہ لا لٹک رہا ہے وہ لا سے لا + فرلا میں بڑھ جاتا ہے۔
اس لیے اگر زنجیر کی نیچے وار رفتار و ہو تو صریحاً

$$\text{و} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

وقفہ فرت کی ابتدا میں زنجیر کا نیچے وار معیار حرکت وہ تھا جو رفتار و سے
حرکت کرنے والی کمیت ک لا کا ہے۔ اس لیے وہ ک و لا تھا۔ اس وقفہ
کے ختم پر معیار حرکت وہ ہے جو کمیت ک (لا + فرلا) کا ہے جو اس رفتار سے
حرکت کرتا ہے جس کو (و + فرو) سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ پس معیار حرکت
میں اضافہ

ک (لا + فرلا) (و + فرو) ـ ک لا و

ہے یا دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرو فرلا کو نظر انداز کر دیا جائے تو یہ اضافہ

ک (لا فرو + و فرلا)

ہے۔

(۲۴۷) لیکن معیار حرکت کا اضافہ فی اکائی وقت مساوات (۱۷) کی رو سے
عمل کرنے والی کل قوت کے مساوی ہوتا ہے اور یہ قوت وقفہ فرت کی ابتدا
میں ک ج لا ہے اور ختم پر ک ج (لا + فرلا) اس لیے دوسرے رتبہ کی چھوٹی
مقدار فرلا فرت کو نظر انداز کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ وقفہ فرت میں معیار حرکت میں
اضافہ ک ج لا فرت ہونا چاہئے۔

اس لیے

$$\text{ک}\left(\text{لا فرو} + \text{و فرلا}\right) = \text{ک ج لا فرت}$$

$$= \text{ک ج لا}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{و}}$$

یا

$$\text{و لا}\ \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و}^{2} = \text{ج لا}$$

اِس مساوات کو تکمل کرنے کے لیے ہم ۲ لا سے ضرب دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{2}\ \text{لا}^{2} = \frac{2}{3}\ \text{ج لا}^{3} + \text{مستقل}$$

مستقل کا تعین کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا = ط تو و = ۰ اور اس لیے مستقل کی قیمت $-\frac{2}{3}$ ج ط^{3} ہونی چاہئے۔ اس طرح

$$\text{و}^{2} = \frac{2}{3}\ \text{ج}\ \frac{\text{لا}^{3} - \text{ط}^{3}}{\text{لا}^{2}}$$

اِس مساوات سے وہ رفتار معلوم ہوتی ہے جبکہ طول لا میز پر سے انتصاباً لٹک رہا ہو۔ جب زنجیر کا آخری ذرہ کھنچ جاتا ہے تو لا کی قیمت ل ہے اور اِس لیے اِس لمحہ پر

$$\text{و}^{2} = \frac{2}{3}\ \text{ج}\ \frac{\text{ل}^{3} - \text{ط}^{3}}{\text{ل}^{2}}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ و^{2} کی یہ قیمت وہ قیمت نہیں ہے جو توانائی کی مساوات سے حاصل ہوگی۔ صریحاً یہاں اِس مساوات کو استعمال نہیں کرنا چاہئے کیونکہ دھکے پورے وقت میں عمل کرتے ہیں اور زنجیر کے نئے ذروں کو جھٹکے کے ساتھ حرکت میں لاتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ۱۰ ٹن وزن کا ایک خالی ریلوے ڈبہ ایک چھوٹے ڈبے سے جس میں ۵۰ ٹن کوئلہ لدا ہے ٹکراتا ہے اور دونوں باہم ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے

حرکت کرتے ہیں۔ پہلے ڈبہ کی رفتار ابتداً کیا تھی اور ڈبوں کے درمیان دھکے کی مقدار کیا ہے۔

۲۔ $\frac{1}{4}$ اونس وزن کا ایک پتھر ۵ فٹ ارتفاع سے نرم زمین پر چھوٹا گیا ہے۔ پتھر کے ساکن ہونے سے پیشتر عمل کرنے والے دھکے کی مقدار معلوم کرو۔

۳۔ ایک ٹن کی کمیت، ۱۶ فٹ کے ارتفاع سے ایک انتصابی میخ پر گرتی ہے اور اس کو زمین میں نصف انچ زیادہ دھنسا دیتی ہے۔ یہ تسلیم کر کے کہ میخ پر کمیت کی قوت عاملہ اثنائے عمل میں مستقل رہتی ہے اس کی مقدار اور عمل کا وقفہ معلوم کرو۔

۴۔ ۱۰ گرام کمیت کا ایک جسم ۸ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ دفعتاً اس پر ایک ضرب پڑتی ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار دگنی ہو جاتی ہے اور اس کی حرکت کی سمت بقدر نصف زاویہ قائمہ کے تبدیل ہو جاتی ہے۔ ضرب کی سمت معلوم کرو اور وہ رفتار معلوم کرو جس سے جسم حرکت کرتا اگر وہ ضرب سے پیشتر ساکن ہوتا۔

(۲۳۸) ۵۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری سے اس کے سروں پر کمیتیں $ک_1$، $ک_2$ بندھی ہیں جن میں $ک_1$ زیادہ بھاری ہے۔ ڈوری کے ایک ثانیہ تک حرکت میں رہنے کے بعد کمیت $ک_1$ فرش سے ٹکراتی ہے۔ معلوم کرو (ا) کمیت $ک_2$ کتنی دیر تک چڑھنا جاری رکھے گی، (ب) کمیت $ک_1$ پھر کس رفتار سے حرکت میں آئے گی جبکہ ڈوری تن جائے۔

۶۔ کسی خاص دن ایک انچ بارش ۱۰ گھنٹوں میں ہوئی جبکہ قطرے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گرے۔ ایک ڈیرے کی چھت پر جو دبیز کپڑے سے بنا ہے اوسط دباؤ فی مربع فٹ معلوم کرو جو بارش کے قطروں کے تصادم سے پیدا ہوا تھا، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ چھت افقی ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ ہے)۔

۷۔ زمین جو اپنے مدار میں رفتار $و$ سے حرکت کر رہی ہے چھوٹے شہابیوں کے ایک گروہ سے متصادم ہوتی ہے جس کی کثافت فی مکعب میل

ایک کیلوگرام ہے اور جو رفتار و سے ٹھیک اُس سمت کے خلاف حرکت کرتے ہیں جو زمین کی حرکت کی ہے۔ شہابوں کے تصادم کی وجہ سے زمین کی رفتار میں تخفیف کی شرح معلوم کرو اور نیز زمین کی سطح پر کے مختلف نقطوں پر بار پیما کے ارتفاع میں اضافہ معلوم کرو، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام شہاب زمین کی سطح پر پہنچنے سے قبل گرد میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔ (زمین کی کمیت 6×10^{27} گرام ہے اور اس کا قطر ۷۹۲۷ میل ہے)

۸۔ ایک یکساں زنجیر ایک افقی سُستوی پر ڈھیر کی شکل میں گول لپٹی پڑی ہے اور ایک شخص اس کا ایک سرا ہاتھ میں لیکر اس کو رفتار و سے یکساں طور پر اوپر اٹھاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اُس کا ہاتھ سُستوی سے ارتفاع لا پر ہوتا ہے تو اس کے ہاتھ پر دباؤ زنجیر کے $لا + \frac{و^2}{ج}$ طول کے وزن کے مساوی ہے۔

لچک

۱۹۳۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ اگر ہم فولاد کے ایک گولے کو سخت فرش پر گرائیں تو وہ کچھ ارتفاع تک بازگشت کرے گا لیکن اگر لکڑی کے گولے کو گرائیں تو وہ اس سے بہت کم ارتفاع تک بازگشت کرے گا اور روئی، کاغذ یا چکنی مٹی کا گولہ تو بازگشت ہی نہ کرے گا۔

جب دو جسموں کی سطحوں کے درمیان تماس ایسی نوعیت کا ہو کہ تصادم کے بعد وہ بالکل بازگشت ہی نہیں کرتے تو ہم کہتے ہیں کہ تماس کامل طور پر بے لچک ہے لیکن اگر جسم بازگشت کریں تو ہم کہتے ہیں کہ تماس لچکدار ہے۔ صریحاً لچک کے مختلف درجے ہوتے ہیں۔

بڑے سے بڑے بچاؤ کا لمحہ

۱۹۴۔ تصادم کی سب سے زیادہ معروف مثال جس میں لچک بہت بڑی ہوتی ہے غالباً بلیرڈ کے دو گولوں کے تصادم سے ہم پہنچتی ہے۔ ہم

اِس تصادم پر بہترین طریقے سے بحث کر سکیں گے اگر دوسرے گولے کی حرکت کا
حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیا جائے جو پہلے گولے کے ساتھ
حرکت کرے ۔ تصادم سے قبل دوسرے گولے کا مرکز پہلے گولے کے مرکز
کے قریب آرہا ہے اور تصادم کے بعد اس سے پرے ہٹ رہا ہے
اس لیے اثنائے تصادم میں کسی لمحہ پر اس کی حرکت قریب آنے کی حرکت (۲۳۹)
سے پرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہو جانی چاہئے، اس لمحہ پر گولوں کے
مرکزوں کے درمیان فاصلہ اقل تھا ۔

فرض کرو کہ تجربہ کرنے سے پیشتر ہم نے گولوں کے ان دو رخوں پر سفیدی لگا دی ہے جن پر تصادم واقع ہوتا ہے ۔ تصادم کے بعد گولوں کا امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ سفیدی میں خلل پڑ گیا ہے نہ صرف ایک واحد نقطہ پر بلکہ ایک پورے دائرہ پر جو کافی بڑا ہے ۔ اگر گولے اچھی رفتار سے حرکت کر رہے ہوں تو اس دائرہ کا قطر نصف انچ بھی ہو سکتا ہے ۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس لمحہ پر جس پر گولوں کے مرکز ایک دوسرے سے قریب ترین تھے ان کا درمیانی فاصلہ اس فاصلہ سے کم تھا جو ان کے درمیان ہوتا اگر گولے سکون کی حالت میں ایک دوسرے کو مس کرتے ہوئے رکھے جاتے ۔ یعنے اثنائے تصادم میں گولے پچک گئے تھے ۔

وہ لمحہ جس پر مرکز قریب ترین ہوتے ہیں بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے ۔

بالعموم جب کوئی دو سطحیں تصادم میں ہوتی ہیں تو وہ لمحہ جس پر مشترک عماد کی سمت میں اضافی رفتار معدوم ہوتی ہے بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے ۔ صریحاً یہ وہ لمحہ ہے جس پر اِن دو سطحوں کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے پرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہوتی ہے ۔

۱۶۵ ۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر پہنچنے سے پہلے بالعموم دونوں اجسام کی رفتاریں تبدیل ہو چکتی ہیں اور اس لیے اس تبدیلی کے پیدا کرنے میں

قوتیں بہ عمل ہونی چاہئیں ۔ اِن قوتوں کے عمل کا پورا وقت (یعنے اُس لمحہ سے جس پر اجسام ابتدأً مس کرتے ہیں اُس لمحہ تک جس پر بڑے سے بڑا پچکاؤ واقع ہوتا ہے) اس قدر کم ہوتا ہے کہ اِن کو دھکے والی قوتیں سمجھا جا سکتا ہے۔ اِن دو جسموں پر عمل کرنے والے دھکے عمل اور تعامل ہونے کی وجہ سے مساوی اور مخالف ہونے چاہئیں ۔ اگر سطحیں چکنی ہیں تو اِن دھکوں کی سمت مشترک عماد کی سمت ہونی چاہئے ۔ اگر سطحیں کھردری ہیں تو ہم سمت کی تخصیص نہیں کر سکتے جب تک کہ ایک دوسرے پر سطحوں کی پھسلن کی سمت معلوم نہ ہو ۔ ہر صورت میں فرض کرو کہ مشترک عماد کی سمت میں دھکے کا جزو ترکیبی د سے تعبیر ہوتا ہے ۔ مقدار د کو پچکاؤ کا دھکہ کہتے ہیں ۔ صریحاً یہ مقدار اُن قوتوں کو تعبیر کرتی ہے جن سے دھکہ ترکیب پاتا ہے اور تو اضافی عمادی رفتار کو صفر میں تحویل کرتی ہیں ۔

(۲۴۰) بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ کے بعد قوتوں کا ایک دوسرا نظام بہ عمل آنا چاہئے تاکہ وہ رفتاریں پیدا ہوں جن سے اجسام ایک دوسرے سے جدا ہوتے ہیں ۔ فی الحقیقت بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر اجسام کے پچکے ہوئے حصے کسی ہوئی کمانی کے مانند عمل کرتے ہیں اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ افتراق کی رفتاریں اِس خیالی کمانی کے عمل سے پیدا ہوئی ہیں ۔ یہ قوتیں بھی جو جسموں کو جدا کرتی ہیں دھکے والی قوتیں سمجھی جا سکتی ہیں اور مشترک عماد کی سمت میں اِس دھکے کے جزو ترکیبی کو دَ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے ۔ دھکے دَ کو عود کا دھکہ کہتے ہیں ۔

۱۹۶ — جب تصادم سے قبل اجسام کی حرکت معلوم ہوتی ہے تو ہم معیار حرکت کے بقا کا اصول استعمال کر کے بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر رفتاریں معلوم کر سکتے ہیں ۔ اس لئے پچکاؤ کے دھکہ د کو محسوب کرنا ممکن ہے ۔

برخلاف اس کے دھکہ دَ کی مقدار متصادم اجسام کے تماس کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے ' اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو تصادم کے بعد افتراق

نہیں ہوگا اور اس لیے دَ = ۰۔ تجربہ کی بنا پر بالعموم یہ معلوم ہوا ہے کہ دھکہ دَ اور دھکہ د میں حسب ذیل سادہ ربط ہے:

دَ = چ د

جہاں چ ایک مقدار ہے جو صرف دو متصادم سطحوں کے تماس کی نوعیت پر منحصر ہے اور دھکہ د کی مقدار پر منحصر نہیں ہے۔ مقدار چ کو ان دو اجسام کی لچک کی قدر کہتے ہیں۔

یہاں اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے کہ لچک کی یہ قدر وہ مقدار ہے جو ان قدروں یا لچک کے مستقلات سے بالکل مختلف ہے جو لچکدار اجسام کے نظریہ میں واقع ہوتے ہیں۔ واقعہ یہ ہے کہ اصطلاح لچک کی قدر جن معنوں میں مقدار چ کو تعبیر کرنے کے لیے یہاں مستعمل ہوئی ہے وہ نامناسب ہے کیونکہ اس سے جس چیز کی پیمائش ہوتی ہے اس کو لچک کی بجائے بازگشتگی کہنا زیادہ مناسب ہے اور بلاشبہ لچک کی قدر کی بجائے بازگشتگی کی قدر کہنا زیادہ ٹھیک ہے۔ لیکن بالعموم اصطلاح لچک کی قدر استعمال کی جاتی ہے۔

۱۹۷ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ چ کی قیمت کامل طور پر بے لچک اجسام کے لیے صفر ہے۔ لوہا سیسے سے ٹکرائے تو چ کی قیمت تقریباً ۱۴ء ہے، لوہا لوہے سے ٹکرائے تو اس کی قیمت ۶۶ء ہے اور سیسا سیسے سے ٹکرائے تو ۲۰ء۔ ہم دیکھتے ہیں کہ بازگشتگی دو اجسام کے درمیانی تماس کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے اور اس لحاظ سے رگڑ کی قدر کے مشابہ ہے۔ بازگشتگی کچھ ایک جسم سے اور کچھ دوسرے جسم سے پیدا نہیں ہوتی کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو چ کی قیمت جبکہ لوہا سیسے سے ٹکرائے ان قیمتوں کے درمیان ہوتی جو لوہا لوہے سے اور سیسا سیسے سے ٹکرانے میں حاصل ہوتی ہیں۔

ان اجسام کی مثالیں جن کے لیے لچک کی قدر بڑی ہے حسب ذیل معلوم ہوئی ہیں، ہاتھی دانت کے دو گولے جب متصادم ہوتے ہیں تو چ کی قیمت تقریباً ۸۱ء ہے اور شیشا شیشے سے متصادم ہوتا ہے تو چ کی قیمت ۹۴ء ہے۔ سب سے زیادہ کامل لچک جو تصور کی جا سکتی ہے

اُن دو اجسام کی ہے جن کے لیے چ = ۱، اس صورت میں عود کا دھکہ پچکاؤ کے دھکے کے مساوی ہوگا۔ ایسے اجسام کو کامل طور پر لچکدار کہا جاتا ہے۔
کامل طور پر لچکدار اجسام کی یہ خصوصیت ہے کہ تصادم سے کسی توانائی کا نقصان نہیں ہوتا۔ یہ ظاہر ہے کہ چ کی قیمت اکائی سے تجاوز نہیں کر سکتی کیونکہ اگر اس کی قیمت اکائی سے متجاوز ہو تو عود کے دھکے سے جو توانائی بالحرکت ظہور پذیر ہوگی وہ اُس توانائی سے زیادہ ہوگی جو پچکاؤ کا دھکہ جذب کرتا ہے اور اس لیے مجموعی توانائی بڑھ جائے گی جو ناممکن ہے۔
اب ہم ان اصولوں کو تصادم کی چند اہم صورتوں پر استعمال کریں گے۔

ذرہ جو ایک ثابت سطح سے ٹکرائے

راست تصادم

۱۹۸ ــ اول فرض کرو کہ تصادم راست ہے یعنی ٹکر کے لمحہ پر ذرہ سطح کے اُس نقطہ کے عماد پر حرکت کر رہا ہے جس پر وہ آکر ٹکراتا ہے۔ فرض کرو کہ اس کی کمیت ک ہے اور تصادم سے قبل اس کی رفتار و ہے۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر ذرہ سطح کے لحاظ سے ساکن ہوگا اور اس لیے اس کا معیار حرکت پچکاؤ کے دھکے کی وجہ سے ک و سے صفر میں تحویل ہوگا۔ اس لیے

د = ک و

اگر لچک کی قدر چ ہے تو

دَ = چ د = چ ک و

اس طرح مقدار چ ک و کا ایک عمادی دھکہ ظہور پذیر ہوگا اور (۲۴۲)
اس کی وجہ سے ذرہ میں رفتار چ و پیدا ہوگی۔ کوئی مماسی دھکہ موجود نہیں ہے کیونکہ سطحیں ایک دوسرے پر نہیں پھسلتیں۔ پس رفتار بازگشت سطح کے

عماد کی سمت میں چ و ہے۔

مائل تصادم۔ چکنا تماس

۱۹۹ — اگر تصادم مائل ہے تو فرض کرو کہ تصادم سے قبل مماس مستوی اور عماد کی سمتوں میں رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و ہیں۔ حسب سابق

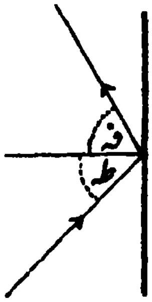
د = ک و ، دَ = چ ک و

اِس لیے تصادم کے بعد عماد کی سمت میں رفتار (فرض کرو وَ)

وَ = چ و

ہے۔

اگر تماس کو چکنا فرض کیا جائے تو مماس مستوی میں کوئی قوت نہیں ہو سکتی اور اس لیے مماس مستوی میں معیارِ حرکت غیر متغیر رہتا ہے۔ اِس طرح مماس مستوی میں رفتار ع کے مساوی رہتی ہے اور اِس لیے تصادم کے بعد رفتار وہ ہوگی جس کے اجزائے ترکیبی ع، چ و ہیں۔ فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو رفتار تصادم سے پیشتر عماد کے ساتھ بناتی ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد متناظر زاویہ فہ ہے۔ تب



مس طہ = ع / و

مس فہ = ع / چ و

شکل (۱۲۶)

اسلیے مس طہ = چ مس فہ

اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو چ = ۱ اور اس لیے طہ = فہ یعنی ذرہ ایسے زاویہ پر بازگشت کرتا ہے جو زاویہ وقوع کے مساوی ہے۔ اِس کا اِنعکاس اُسی قانون کے تحت ہوتا ہے جو نور کی کرن کا ہے۔

اگر اجسام کامل لچکدار نہیں ہیں تو طہ > فہ اور اس لیے بازگشت کا

راستہ عماد سے زیادہ ہٹا ہوا ہوگا۔

اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو ج = ۰ اور اس لیے ف = π/۲ ذرہ مستوی پر صرف پھسلیگا اور صریحاً ایسا ہی ہونا چاہیے کیونکہ دَ = ۰۔

تصادم سے قبل توانائی بالحرکت

(۲۴۳) $\tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{ع}^2 + \text{و}^2)$

ہے اور تصادم کے بعد

$\tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{ع}^2 + \text{وَ}^2)$

ہے۔ اس لیے توانائی بالحرکت میں نقصان کی مقدار

$\tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,(\text{و}^2 - \text{وَ}^2)$

ہے یعنے $\tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{و}^2\,(1 - \text{ج}^2)$

یہ نقصان معدوم ہوگا اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہوں یعنے ج = ۱۔ باقی تمام صورتوں میں توانائی کا نقصان ضروری ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ ج اکائی سے بڑا نہیں ہوسکتا ورنہ اجسام کو ایک دوسرے سے ٹکرا کے توانائی میں اضافہ کرنا ممکن ہوتا۔

مائل تصادم۔ کھردرا تماس

۲۰۰ — چکنے تماس کی صورت کی طرح ہمیں ربط دَ = ج د حاصل ہوتا ہے جو عماد کی سمت میں رفتار کے اجزائے ترکیبی کو مربوط کرتا ہے۔ لیکن تعامل کلاً عماد کی سمت میں عمل نہیں کرتا اور اس لیے اب یہ کہنا درست نہیں ہے کہ رفتار کا مماسی جزو ترکیبی غیر متغیر رہتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں جس میں ذرہ کی سطح ثابت سطح پر اس پورے وقفہ میں جس میں یہ دو سطحیں ایک دوسرے کو مس کرتی ہیں ایک ہی سمت میں پھسلتی ہے۔ تب تصادم کے ہر لمحہ پر ایک مماسی قوت ہوگی جو عمادی قوت کے مہ گنا کے مساوی ہوگی اور اس لیے کل مماسی دھکہ عمادی دھکے کے مہ گنا کے مساوی ہونا چاہیے اور اسلیے مہ (د + دَ) کے مساوی۔

اس لیے اگر تصادم کے بعد مماسی رفتار عَ ہے تو

ک (ع − عَ) = مہ (دَ + د)

= مہ (۱ + چ) د

= مہ (۱ + چ) ک و

اسی طرح عَ = ع − (۱ + چ) مہ و

حسب سابق اگر ہم فرض کریں کہ ذرہ کا راستہ تصادم سے قبل اور (۲۴۲)
اس کے بعد عماد کے ساتھ زاویے طہ، فہ بناتا ہے (دیکھو شکل ۱۲۶) تو

مس طہ = ع/و

مس فہ = عَ/وَ = (ع − (۱ + چ) مہ و)/(چ و)

اس لیے چ مس فہ = مس طہ − (۱ + چ) مہ

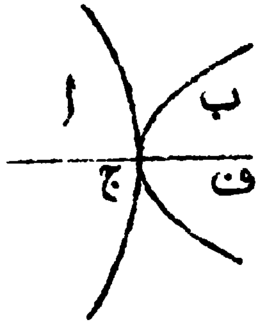
(۱ + چ) مہ کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوگی اور اس لیے فہ ہمیشہ اُس قیمت سے کم ہوگا جو مستوی کے چکنے ہونے کی صورت میں حاصل ہوتی ہے، دوسرے الفاظ میں مستوی کا کھُردرا پن ذرہ کو عماد سے قریب تر بازگشت کرانے کا موجب ہوتا ہے۔

لیکن یہ مساوات صرف بعض حدود کے اندر درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ تصادم کے پورے وقفہ میں پھسلن واقع ہوتی ہے۔ یہ ہوسکتا ہے کہ حرکت کی کسی خاص منزل پر پھسلن موقوف ہو اور ذرہ لڑھکنا شروع کرے اور اگر ایسا ہو تو محصلہ بالا مساوات جائز نہیں ہوں گی۔

دو متحرک اجسام کا تصادم

۲۰۱ — فرض کرو کہ کمیتوں ک، کَ کے دو جسم ا، ب، نقطہ ج پر متصادم ہوتے ہیں اور ج پر مشترک عماد ج ف ہے۔ فرض کرو کہ تصادم کے

سہ پران اجسام کے مراکز ثقل دونوں
شتی خ ف پر واقع ہیں اور فرض
روکہ کمیتوں ا، ب کے مرکز ثقل
، رفتاروں کے اجزائے ترکیبی عماد
ج ف کی سمت میں
ع، عَ تصادم سے قبل
و، وَ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے
لمحہ پر



شکل (۱۲۷)

ور و، وَ تصادم کے بعد
ہیں۔ اب اگر پچکاؤ کے دھکے کو د سے تعبیر کیا جائے اور عود کے دھکے کو دَ سے تو

$$\text{د} = \text{ک}\,(\text{ع} - \text{و}) = -\text{کَ}\,(\text{عَ} - \text{و}) \qquad (\text{۸۵})$$

$$\text{دَ} = \text{ک}\,(\text{وَ} - \text{و}) = \text{کَ}\,(\text{و} - \text{وَ}) \qquad (\text{۸۶})$$

پہلی مساوات سے

$$\text{ع} = \text{و} + \frac{\text{د}}{\text{ک}} \,،$$

$$\text{عَ} = \text{و} - \frac{\text{د}}{\text{کَ}}$$

اس لیے

$$\text{ع} - \text{عَ} = \text{د}\left(\frac{1}{\text{ک}} + \frac{1}{\text{کَ}}\right)$$

یہ مساوات تصادم سے پیشتر جو اضافی رفتار ہے اس کو د سے مربوط کرتی ہے۔

اسی طرح مساواتوں (۸۶) سے

$$\text{و} - \text{وَ} = -\text{دَ}\left(\frac{1}{\text{ک}} + \frac{1}{\text{کَ}}\right)$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تجربی ربط دَ = ج د ، ربط
و ـ وَ = ـ ج (ع ـ عَ)
سے ٹھیک مماثل ہے یعنے الفاظ میں : تصادم کے بعد مراکز ثقل کی اضافی رفتار کا عمادی جزو ترکیبی، تصادم سے قبل اضافی رفتار کا ج گنا اور اسکی مخالف سمت میں ہوتا ہے ۔

اِس قانون کو نیوٹن کا تجربی قانون کہتے ہیں، اِس سے مادہ کی وہی خاصیت بیان ہوتی ہے جو ربط دَ = ج د سے ظاہر ہے ۔

ایک اور رِشتہ جو تصادم سے قبل اور اس کے بعد کی رفتاروں کو مربوط کرتا ہے معیار حرکت کے بقا کے اصول سے حاصل ہوتا ہے چنانچہ
ک و + کَ وَ = ک ع + کَ عَ

اِس کو مساوات (۸۷) کے ساتھ ملانے سے ہم تصادم کے بعد کی رفتاروں و، وَ کو تصادم سے قبل کی رفتاروں ع، عَ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں ۔

اِن مساواتوں کو حل کرنے سے معلوم ہوگا کہ

و = (ک ع + کَ عَ ـ ج کَ (ع ـ عَ)) / (ک + کَ) (۸۸)

وَ = (ک ع + کَ عَ + ج ک (ع ـ عَ)) / (ک + کَ) (۸۹)

اِن سے عمادی رفتاریں حاصل ہوں گی ۔

اگر اجسام کھردرے ہیں تو ہم مماسی رفتاروں کو اسی طریقے سے معلوم کرتے ہیں جو دفعہ ۲۰۰ میں بیان کیا جا چکا ہے، لیکن اگر اجسام چکنے ہیں تو ج ف کی عمود وار سمتوں میں رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں ۔

اگر اِن دو اجسام کا مرکز ثقل ساکن ہو یا اگر ہم تمام رفتارں کو مرکز ثقل کے لحاظ سے پیمائش کریں جس کا مطلب بھی وہی ہے تو (۲۲۶)

$$\text{ک}\,\text{ع} + \text{کَ}\,\text{عَ} = ۰$$

اس لیے
$$\text{و} = -\,\text{چ}\,\frac{\text{کَ}\,(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{ک} + \text{کَ}}$$

$$\text{وَ} = \text{چ}\,\frac{\text{ک}\,(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{ک} + \text{کَ}}$$

ربط $\text{ک}\,\text{ع} = -\,\text{کَ}\,\text{عَ}$ کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$\text{و} = -\,\text{چ}\,\text{ع}\,،$$

$$\text{وَ} = -\,\text{چ}\,\text{عَ}$$

اور اس لیے اجسام ایک دوسرے سے بازگشت کرتے ہیں گویا کہ وہ لچک چ کے ایک ثابت مستوی پر متصادم ہوئے تھے ۔

توانائی بالحرکت، تصادم سے قبل یا بعد، دو توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگی (۱) اُس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہے (۲) نظام کی توانائی بالحرکت بلحاظ مرکز ثقل کے۔ اول الذکر توانائی تصادم سے غیر متغیر رہتی ہے اور اس لیے تصادم کی وجہ سے کل توانائی بالحرکت میں جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ اُس توانائی کے نقصان کے مساوی ہے جو مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے ۔

اگر اجسام چکنے ہیں تو توانائی بالحرکت کا یہ نقصان

$$= \frac{1}{2}\left(\text{ک}\,\text{ع}^2 + \text{کَ}\,\text{عَ}^2 - \text{ک}\,\text{و}^2 - \text{کَ}\,\text{وَ}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{ک}\,\text{ع}^2 + \text{کَ}\,\text{عَ}^2\right)\left(۱ - \text{چ}^2\right)$$

اس طرح توانائی بالحرکت کا نقصان، مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی بالحرکت کے $(۱ - \text{چ}^2)$ گنے کے مساوی ہے ۔ اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو $\text{چ} = ۱$ اور اس لیے توانائی میں کوئی نقصان واقع نہیں ہوتا۔ لیکن اگر $\text{چ} = ۰$ تو مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی پوری کی پوری نقصان میں آجاتی ہے ۔

دو چکنے کروں کا تصادم

۲۰۲ ۔ فرض کرو کہ تصادم کے بعد دو چکنے کروں کی حرکت معلوم کرنے میں ہم اوپر کے اصولوں کو استعمال کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ تصادم کے لمحہ پر کروں کے مرکز ثقل ا، ب ہیں اور اِس لیے خط اب، تصادم کے نقطہ ج پر سطحوں کا مشترک عماد ہے۔

حسب سابق فرض کرو کہ تصادم سے قبل اب پر رفتاریں ع، عَ ہیں اور اِن دونوں کو سمت اب میں پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد اسی سمت میں رفتاریں و، وَ ہیں۔ تب معیار حرکت کے بقا کی رُو سے اب پر (۲۴۷)

ک ع + کَ عَ = ک و + کَ وَ

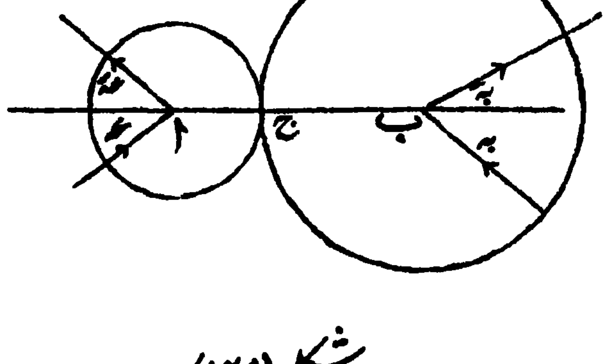
اور نیوٹن کے قانون سے و ـ وَ = ج (ع ـ عَ)

اِن سے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) حسب سابق حاصل ہوتی ہیں۔

اگر تصادم سے قبل اور بعد ا کی رفتاریں اب کے ساتھ زاویے عہ، عہَ بناتی ہیں (حسب شکل) تو تصادم سے قبل اور بعد مماسی رفتاریں

ع ِس عہ، و ِس عہَ

ہیں۔ لیکن چونکہ مماسی رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں اس لیے



شکل (۱۲۸)

دمس عَہ = - ۶ مس عہ

اسی طرح ب کی حرکت سے

وَمس بَہ = - ۶َ مس بہ

اس لیے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) ہو جاتی ہیں

مم عَہ = - [ک ۶ + کَ ۶َ - چ کَ (۶ - ۶َ)] / [(ک + کَ) ۶] مم عہ ،

مم بَہ = - [ک ۶ + کَ ۶َ + چ ک (۶ - ۶َ)] / [(ک + کَ) ۶َ] مم بہ

اور اِن سے عَہ ، بَہ ابتدائی حرکت کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں۔

(۲۴۸) اگر کُرے مساوی کمیت کے ہوں اور دوسرا کُرہ ابتدأً ساکن ہو جیسے کہ بلیرڈ کے کھیل میں ہوتا ہے تو ک = کَ ، ۶َ = ۰ اور اِس لیے

مم عَہ = - ½ (۱ - چ) مم عہ ، بَہ = ۰

اِس طرح ب ، مرکزوں کے خط پر حرکت کی ابتداء کرتا ہے اور صریحاً ایسا ہی ہونا چاہیے کیونکہ وہ قوتیں جو اِس کو حرکت میں لاتی ہیں اِس خط پر عمل کرتی ہیں۔

چونکہ چ ہمیشہ اکائی سے کم ہوتا ہے اور عہ ضرور حادہ ہے اس لیے مم عَہ منفی ہونا چاہیے اور اِس لیے عَہ منفرجہ ہوگا۔ اگر چ = ۱ تو عَہ = ۹۰° چنانچہ اگر کُرے کامل چکنے اور کامل لچکدار ہوں تو تصادم کے بعد کُرہ ا مرکزوں کے خط کے علی القوائم حرکت کرے گا ، اِس کی حرکت وہی ہوگی جو ہوتی اگر وہ کامل چکنے اور بے لچک مستوی سے ٹکراتا۔

توضیحی مثال

ایک کھُردرے میز پر چند مشابہ سکوں کو مساوی فاصلوں پر ایک خطِ مستقیم میں رکھا گیا ہے۔ پہلے سکہ کو اِس خط پر

اِس طرح متحرک کیا جاتا ہے کہ وہ دوسرے سکہ سے راست ٹکرائے۔ حاصل حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ دو سکوں کے درمیان تصادم کے لیے لچک کی قدر چ ہے اور سکوں اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ ہر سکہ کی کمیت ک ہے اور دو متصلہ سکوں کے قریب ترین نقطوں کے درمیان فاصلہ ف ہے۔

ایک سکہ اور میز کے درمیان عمادی تعامل ک ج ہے اور اس لیے سکہ کی حرکت میں مزاحم رگڑ کی قوت مہ ک ج ہے اور پیدا شدہ ابطاء مہ ج ہے۔ پس اگر ایک سکہ اپنے ابتدائی محل سے رفتار و سے چلے تو اس کی رفتار دوسرے سکہ تک پہنچنے میں ع ہو جائے گی جہاں

$$و^۲ - ع^۲ = ۲\ مہ\ ج\ ف \qquad (ا)$$

اب ہمارے پاس مساوی کمیت کے دو سکے ہیں جو رفتاروں ع، ۰ سے ٹکراتے ہیں تصادم کے بعد ان کی رفتاریں و، وَ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں:

$$و - وَ = - چ\ ع \quad (\text{قانون نیوٹن})$$

$$و + وَ = ع \quad (\text{معیار حرکت کا بقا})$$

اِس لیے

$$و = \frac{۱}{۲} ع (۱ - چ)$$

$$وَ = \frac{۱}{۲} ع (۱ + چ)$$

تصادم کے بعد وہ سکہ جو ابتداً حرکت میں تھا رفتار و حاصل کرتا ہے اور رگڑ کی قوت سے اس میں ابطاء مہ ج پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے وہ ساکن ہو جائے گا اگر وہ اس اثناء میں فاصلہ س طے کرنے کے بعد پھر نہ ٹکرائے جہاں س، مساوات

$$و^۲ = ۲\ مہ\ ج\ س$$

یا

$$س = \frac{و^۲}{۲\ مہ\ ج} = \frac{ع^۲ (۱ - چ)^۲}{۸\ مہ\ ج} \qquad (ب)$$

(۲۴۹) حاصل ہوگا۔ وہ سکہ جو تصادم کی وجہ سے حرکت میں آیا ہے رفتار

$$\text{و}' = \frac{1}{2}\,\text{ع}\,(1+\text{ج}) \qquad (\text{ج})$$

سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ اس سے پہلے کا سکہ رفتار و سے حرکت کی ابتدا کرتا تھا۔ یہ رفتار مساوات (ا) سے حاصل ہوتی ہے۔ اب مساواتوں (ا) اور (ج) سے ع کو ساقط کیا جائے تو ابتداً حرکت میں آنے کی متواتر رفتاروں کے درمیان رشتہ

$$\text{و}'^{2} = 2\,\text{م}\,\text{ج}\,\text{ف} + \frac{4\,\text{و}^{2}}{(1+\text{ج})^{2}} \qquad (\text{د})$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ربط مستقل سروں والی فرق کی مساوات ہے۔

اگر ج = ۱ تو ہم مساوات (ب) سے دیکھتے ہیں کہ س = ۰ اور اس لیے ہر سکہ اپنے سامنے کے سکہ سے ٹکرانے کے بعد مطلقاً ساکن ہو جاتا ہے، وہ اپنا پورا معیار حرکت اس سکہ میں منتقل کر دیتا ہے۔ نیز مساوات (د) سے

$$\text{و}'^{2} - \text{و}^{2} = 2\,\text{م}\,\text{ج}\,\text{ف}$$

جب ن سکوں کے درمیان معیار حرکت منتقل ہو چکتا ہے تو رفتار کے مربع کی قیمت بقدر ۲ ن م ج ف کے گھٹ جاتی ہے۔ اس طرح کسی نقطہ پر متحرک سکہ کی رفتار وہ رفتار ہوتی ہے جو ایسے سکہ کی ہوتی جو رفتار و سے حرکت کی ابتدا کرتا اور وہ فاصلہ طے کرتا جو اُن سکوں کے درمیانی تمام وقفوں کے مجموعے کے مساوی ہے جن پر سے حرکت منتقل ہوئی ہے۔

اگر ف = ۰ یعنے اگر سکے ابتداً ایک دوسرے کو مس کر رہے ہوں تو

$$\text{و} = \frac{2\,\text{و}'}{1+\text{ج}}$$

پس اگر ن سکے ہیں تو ن واں سکہ رفتار

$$\text{و}\left(\frac{1+\text{ج}}{2}\right)^{\text{ن}-1}$$

سے حرکت کی ابتدا کرے گا۔

مثالیں

۱۔ اولے ایک منجمد تالاب کی سطح پر ایسی سمت میں ٹکراتے مشاہدہ کئے گئے ہیں جو انتصابی کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے اور وہ ٹکرانے کے بعد ۶۰° کے زاویہ پر بازگشت ہوتے ہیں۔ تماس کو چکنا تسلیم کرکے لچک کی قدر معلوم کرو۔

۲۔ اگر مثال ماسبق کے اولے تصادم کے بعد ۲ فٹ کے ارتفاع تک اچھلیں تو وہ رفتار معلوم کرو جس سے وہ ابتداً زمین سے ٹکرائے تھے۔

۳۔ مثال ماسبق میں وہ ارتفاع معلوم کرو جہاں تک اولے برف پر سے دوسری بار بازگشت کرنے میں اچھلیں گے۔

۴۔ ایک گولے کو ایک اُفقی فرش پر گرایا گیا ہے جو دو مرتبہ بازگشت کرنے کے بعد ایک ایسے ارتفاع تک اچھلتا ہے جو اس ارتفاع کا نصف ہے جہاں سے وہ گرایا گیا تھا۔ لچک کی قدر معلوم کرو۔

۵۔ ایک گولی ایک کھردرے نشانہ پر ۴۵° کے زاویہ پر ٹکراتی ہے اور اسی زاویہ پر بازگشت ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مہ} = \frac{1 - \text{چ}}{1 + \text{چ}}$$

۶۔ ایک گولہ جس کو فاصلہ ا سے سر کیا گیا ہے ایک نشانہ سے زاویہ قائمہ پر ٹکراتا ہے اور بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ نشانہ سے فاصلہ ا چ پر گرے گا (ہوا کی مزاحمت نظر انداز کرو)۔

۷۔ کمیت ک کا ایک کرہ کمیت کَ کے ایک ساکن کرہ سے ٹکراتا ہے اِن کے درمیان تماس چکنا ہے اور تصادم کے بعد اِن کے راستے ایک دوسرے کے علی القوائم مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ک = چ کَ۔

۸۔ بلیرڈ کے دو گولے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ساکن ہیں، ایک تیسرا گولہ ایک ساتھ اِن سے ٹکراتا ہے اور تصادم کے بعد ساکن (۲۵۰)

جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ج = \frac{1}{4}$

۹۔ ایک چکنے افقی مستوی پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ کو رفتار و کے
ؤ ارتفاع عہ پر پھینکا گیا ہے اور یہ ذرہ مستوی سے ٹکرانے کے بعد مستوی پر متعدد مرتبہ
شت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی پرواز کا کُل وقت $\frac{2\,و\,جب\,عہ}{ج\,(1-ج)}$ ہے اور اس کا
ہنچ $\frac{و^2\,جب\,2\,عہ}{ج\,(1-ج)}$ ہے۔

۱۰۔ ایک کھلاڑی ایک دیوار سے افقی فاصلہ ف پر کھڑا ہے اور وہ
ب گولے کو دیوار کی جانب افق سے میلان عہ پر پھینکتا ہے۔ ثابت کرو کہ
گولہ بازگشت کرنے کے بعد کھلاڑی کے پاس واپس ہو تو جس رفتار و سے
لاڑی نے اُسے پھینکا ہے وہ حسب ذیل ہونی چاہیئے:۔

$$و^2 = \frac{(1+ج)\,ج\,ف}{2\,ج\,جم\,عہ\,(جب\,عہ - مہ\,جم\,عہ)}$$

ں ج اور عہ، لچک اور رگڑ کی قدریں ہیں۔

۱۱۔ مثال ماسبق میں حسب ذیل صورتوں پر غور کرو:

(ا) ج = ۰، (ب) مہ = مس عہ، (ج) مہ > مس عہ

عام مثالیں

۱۔ ایک چکنا فانہ ایک افقی میز پر پھسل سکتا ہے، اس کے رُخ پر
ب ذرہ رکھا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ فانے کو کس طرح متحرک کرنا چاہئے کہ ذرہ نہ اوپر
بڑھے نہ نیچے اُترے۔ نیز ذرے اور فانے کے درمیان دباؤ معلوم کرو۔

۲۔ ریل کا ایک ہموار برقی راستہ ہے جس پر نصف میل کے فاصلوں
ے اسٹیشن ہیں۔ اس راستہ پر ۱۰۰ ٹن کی ٹرینوں کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی اوسط
نتار سے چلانا مقصود ہے جس میں ہر اسٹیشن پر نصف منٹ کا قیام بھی شامل ہے۔
بت کرو کہ برقی حرکا کے کم از کم مزید ۸ ٹن وزنی ہونے چاہئیں اگر رگڑ کی قدر ۱/۲ ہو

اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ٹرینوں میں مسلسل بریک لگے ہوئے ہیں۔ (انفعالی مزاحمتوں کو نظر انداز کرو)۔

ثابت کرو کہ اس ریلوے کو جاذبہ ارض سے چلایا جا سکتا ہے اگر راستہ اسٹیشنوں کے درمیان تقریباً ۶۰۰۰ ۴ فٹ کے نصف قطر تک نیچے وار منحنی ہو اور یہ کہ اسٹیشنوں کے درمیان میلان (Dip) تقریباً ۲۰۰ فٹ، اسٹیشنوں پر ڈھال تقریباً ۳۲ میں ۱ اور اعظم رفتار تقریباً $\frac{1}{2}$ ۲۲ میل فی گھنٹہ۔

۳۔ ارتفاع ف اور قطر و کا ایک اسطوانہ ریل کے ایک ڈبہ کے فرش پر استادہ ہے اور ڈبہ دفعتاً اسراع ع کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ ڈبے کے لحاظ سے صرف اُس وقت ساکن رہے گا جبکہ ع، م ج اور $\frac{و ج}{ف}$ دونوں سے کم ہو۔

۴۔ ایک دائری طوق پھینکا گیا ہے جو ایکساں گھومتا ہوا غیر منقلب حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک قطع مکافی مرتسم کرے گا اور کور کا تناؤ کور کے طول $\frac{و^2}{ج}$ کے وزن کے مساوی ہوگا جہاں و، طوق کے مرکز کے لحاظ سے کور کی رفتار کو تعبیر کرتا ہے۔

۵۔ ۶ فٹ لمبی ایک ایکساں زنجیر جس کی کمیت فی فٹ ۲ پونڈ ہے ایک کھُردرے افقی میز پر خط مستقیم کی شکل میں پڑی ہے اور اس کا کچھ حصہ میز کے کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور پھسلن عین واقع ہونے کو ہے۔ زنجیر اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے۔ اگر ذرا سے خلل سے زنجیر پھسلنے لگے تو میز کے کنارے پر زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ اس کا ۱ فٹ طول پھسل چکے۔ (۲۵۱)

۶۔ دو مساوی گولے ا، ب جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں۔ ا پر دھکہ د سمت ا ب میں عمل کرتا ہے اور ب پر ایک مستقل قوت ف اسی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ا، ب سے نہ ملیگا اگر

د' > ۲ ا ف ک

۷ ۔ ایک گولی کا وزن ایک اونس ہے، اِس کو ایک درجہ کے ارتفاع پر رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ سے فائر کیا گیا ہے، یہ گولی اپنے راستہ کے بلند ترین نقطہ پر ایک پرندے سے جا لگتی ہے جس کا وزن ½ ۲ پونڈ ہے ۔ یہ فرض کرکے کہ جب گولی پرندے پر پڑی تھی تو وہ ساکن تھا اور اِس کے بعد پیوست شدہ گولی کے ساتھ نیچے گرا معلوم کرو کہ فائر کرنے کے نقطہ سے کتنی دور پرندہ گرا ہوگا ۔

۸ ۔ ایک گولی کا وزن و پونڈ ہے، اِس کو رفتار ر سے ایک جسم پر فائر کیا گیا ہے جو رفتار س سے آگے جا رہا ہے اور جس کا وزن و ہے ۔ ثابت کرو کہ جسم کی رفتار گولی کی ضرب پڑنے کے بعد

$$\frac{\text{و س} - \text{و ر}}{\text{و} + \text{و}} \quad \text{یا} \quad \text{س} - \frac{\text{و}}{\text{و}}(\text{ر} - ۶)$$

ہو جائے گی بموجب اِس کے کہ گولی جسم میں پیوست ہو جائے یا اِس کو چھید کر رفتار ۶ سے حرکت کرے ۔

آزاد شدہ توانائی محسوب کرو اور پھر جسم کی اوسط مزاحمت گولی سے چھدے ہوئے طول کے ذریعہ معلوم کرو ۔

۹ ۔ ایک وزن اوپر سے ایک میخ پر گرتا ہے اور اپنے متواتر دھکوں سے میخ کو زمین میں دھکیلتا جاتا ہے ۔ ہر ضرب پر میخ جس حد تک زمین میں دھنستی ہے وہ کس طرح (ا) وزن کی مقدار پر اور (ب) اِس کو جس ارتفاع تک اٹھا کر چھوڑا گیا ہے اِس پر منحصر ہوگی ؟

اگر وزن ایک ٹن ہے اور جس ارتفاع سے وہ گرتا ہے وہ ۱۰ فٹ ہے اور میخ زمین میں $\frac{۱}{۱۰}$ انچ دھنسے تو مزاحمت (ٹنوں میں) معلوم کرو ۔

۱۰ ۔ ایک بے لچک میخ کی کمیت ک پونڈ ہے اور ایک ہتوڑی جس کی کمیت ک' پونڈ ہے انتصاباً فاصلہ ف میں سے گر کر اِس پر ضرب لگاتی ہے اور ہر ضرب پر میخ زمین میں ا فٹ انتصاباً دھنستی ہے ۔ ثابت کرو کہ میخ کو زمین میں بتدریج دھکیلنے کے لیے جو وزن سرے پر رکھنا ہوگا وہ

$$\text{ک} + \frac{\text{ک}'^{2}\,\text{ف}}{(\text{ک} + \text{ک}')\,\text{ا}} \ \text{پونڈ}$$

ہے۔

۱۱۔ ایک ہتوڑی کا سِرا و پونڈ ہے، یہ سِر از فتار ر فٹ فی ثانیہ سے حرکت کرکے ایک بے لچک کیلے پر پڑتا ہے جس کا وزن وَ پونڈ ہے اور وہ ک پونڈ کے ایک حرکت پذیر تختے میں نصب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کیلے کے دھنسنے میں تختے کی اوسط مزاحمت م پونڈ کی ایک قوت ہو تو ہر ضرب پر کیلا تختے میں

$$\frac{\text{ک}\,\text{و}^{2}}{(\text{ک} + \text{و} + \text{وَ})(\text{و} + \text{وَ})} \cdot \frac{\text{ر}^{2}}{\text{۲}\,\text{ج}\,\text{م}} \ \text{فٹ}$$

دھنسیگا۔

۱۲۔ چرخیوں کے اس نظام میں جس کا بیان دفعہ ۱۲۸ میں کیا گیا ہے (۲۵۲)
ثابت کرو کہ اگر ف ایک وزن ہو جو $\frac{\text{و}}{\text{ن}}$ کے مساوی نہیں ہے تو وزن و میں پیدا شدہ اسراع

$$\frac{\text{ن}\,\text{ف} - \text{و}}{\text{ن}^{2}\,\text{ف} + \text{و}}\ \text{ج}$$

ہوگا۔

۱۳۔ دو کمیتیں کَ، ک ایک لچکدار ڈوری کے ذریعہ ملحق ہیں اور ایک چکنے افقی میز پر رکھی گئی ہیں، کمیتیں ساکن ہیں اور ڈوری بے تنی ہوئی ہے۔ دھکہ ف کی ایک ضرب پہلی کمیت پر لگائی گئی ہے اُس سمت میں جو دوسری کمیت کی سمت کے مخالف ہے۔ ثابت کرو کہ جب ڈوری پھر بے تنی ہوئی حالت میں ہوتی ہے تو دوسری کمیت کی رفتار

$$\frac{\text{۲}\,\text{ف}}{\text{ک} + \text{کَ}}$$

ہے۔

۱۴۔ ایک نا امتداد پذیر ڈوری کے سِروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی

ے باندھے گئے ہیں اور ڈوری کو پوری طرح تنی ہوئی حالت میں ایک چکنے میز پر گیا ہے ۔ وسطی ذرہ جھٹکے کے ساتھ اس سمت میں حرکت میں آتا ہے جو دوسرے ں کو ملانے والے خط پر عمود ہے ۔ توانائی کا نقصان معلوم کرو جب دوسرے ے جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتے ہیں ۔

۱۵ ۔ کوئلہ لیجانے والی ایک ٹرین میں متعدد مشابہ ڈبے ہیں جن کو ایک ن کھینچتا ہے جس کا وزن تین ڈبوں کے عین مساوی ہے ۔ ٹرین ہموار راستہ پر لن ہے اور جوڑک (Couplings) جو مساوی طول کے ہیں سب کے ب برابر ڈھیلے ہیں ۔ انجن ایک مستقل جری قوت کے ساتھ حرکت کرنا شروع ہے اور ہر ڈبہ جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتا ہے جبکہ اسکا جوڑک تن جاتا ہے ت کرو کہ انجن کی چال بڑی سے بڑی ہو گی جبکہ دسواں جھٹکہ عین واقع ہونیکو ہو ۔

۱٦ ۔ برف ایک چھت پر مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے ۔ اگر اس کی کمیت پھسلنا شروع کرے اور جاتے ہوئے ایکساں عرض کا راستہ بناتے ئے تو ثابت کرو کہ اس کا اسراع مستقل ہے اور اس اسراع کے ایک ثلث کے ا وی ہے جو اس کمیت کا ہو گا جو آزادانہ چھت کے نیچے پھسلے ۔

۱۷ ۔ ایک وزنی اور کامل ملائم یکساں ڈوری انتصاباً لٹک رہی ہے راس کا زیر ترین نقطہ ایک بے لچک افقی مستوی کے اوپر ارتفاع ف پر ، ۔ اگر اس کو مستوی پر گرنے کے لیے دفعتاً چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب ر پر ڈوری کا طول لا گر پڑتا ہے تو میز پر دباؤ

(۳ لا + ۲ ف) ک ء

ے ۔

۱۸ ۔ اگر دو مساوی گولے رفتاروں $\frac{۱ + چ}{۱ - چ}$ و اور ۔ و کے ساتھ صادم ہوں تو ثابت کرو کہ اول الذکر ساکن ہو جائے گا ۔

۱۹ ۔ ثابت کرو کہ ایک کرہ کی وہ کمیت ک جو کمیت ک کے ایک ا کن کرہ اور رفتار و سے ٹھیک اس کی جانب حرکت کرنے والے کمیت ک کے

ایک دوسرے کُرہ کے درمیان رکھی رہنی چاہئے تاکہ اول الذکر کرہ تصادم سے بڑی سے بڑی رفتار حاصل کرسکے $\sqrt{ک\, کَ}$ ہوگی اور حاصل کردہ رفتار

$$\frac{کَ\, و\, (۱ + ج)^۲}{ک + کَ + ۲ک}$$

ہوگی۔

(۵۴) ۲۰ — ایک لچکدار گولے کو ایک سخت فرش پر ارتفاع ف فٹ سے انتصاباً گرایا گیا ہے اور گولہ فرش سے جس رفتار سے ٹکراتا ہے ہر دفعہ اُس کی ج گنی رفتار سے انتصاباً بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ گولہ ساکن ہونے سے پیشتر

$$\sqrt{\frac{۲ف}{ج}}\ \frac{۱ + ج}{۱ - ج} \text{ ثانیوں میں ، } \frac{۱ + ج^۲}{۱ - ج^۲}\ \text{ف فٹ}$$

طے کرے گا۔

ف = ۱ ، ج = $\frac{۴}{۵}$ کے لیے اِس کا حساب لگاؤ۔

۲۱ — ارتفاع ف کے ایک مینار کی چوٹی سے ایک گولہ گرایا گیا ہے اور اسی وقت مساوی وزن کے ایک دوسرے گولے کو رفتار $\sqrt{۲\, ج\, ف}$ کے ساتھ مینار کے قاعدے سے اوپر وار پھینکا گیا ہے جو گرتے ہوئے گولے کے ساتھ راست متصادم ہوتا ہے۔ اگر عود کی قدر ج ہو تو ثابت کرو کہ گرتا ہوا گولہ بازگشت میں ارتفاع ف ـ $\frac{ف}{۴}$ (۱ − ج^۲) تک اُچھلے گا۔

۲۲ — ایک لڑکا ریل کے ایک ڈبے کی افقی چھت پر جو پُل کے نیچے سے رفتار ۵ امیل فی گھنٹہ سے جارہا ہے ایک گولے کو چھوڑتا ہے۔ اگر چھت اور گولے کے درمیان ہ = $\frac{۱}{۲}$ ، ج = $\frac{۲}{۳}$ تو چھت کے اوپر لڑکے کے ہاتھ کا کم ازکم ارتفاع معلوم کرو تاکہ گولے کی دوسری بازگشت چھت کے اُسی نقطہ سے ہو جس سے پہلی بازگشت ہوئی تھی۔

اگر لڑکے کا ہاتھ اِس سے زیادہ ارتفاع پر ہے تو کیا واقع ہوگا۔

۲۳ — ایک کامل طور پر لچکدار ذرہ کو پھینکا گیا ہے، یہ ذرہ ایک گردشی سطح کے اندرونی حصہ سے ٹکراتا ہے، گردشی سطح کا محور ایک معلومہ انتصابی

ہے ۔ ثابت کرو کہ اُن سب مکافیوں کے راس جو متواتر بازگشتوں سے مرتسم
تے ہیں ایک سطح پر واقع ہوتے ہیں جس کی شکل گردشی سطح کی شکل پر منحصر نہیں ہوتی ۔

۲۴ ۔ ثابت کرو کہ قطر ا کے ایک چکنے بلیرڈ گولے کی حرکت کی سمت میں
ے دوسرے ساکن مساوی گولے پر تصادم کے ذریعہ زیادہ سے زیادہ ممکن
رف پیدا کرنے کے لیے قبل الذکر کو ایک ایسی سمت میں پھینکنا ہوگا جو مرکزوں
انے والے خط (طول ج) کے ساتھ زاویہ

$$\text{جب}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ج}}\sqrt{\frac{1-\text{ج}}{3-\text{ج}}}\right)$$

ئے ۔

۲۵ ۔ ایک رقاص اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا لنگر ایک چکنے انتصابی
دی کو عین مس کرتا ہے ۔ لنگر کو ایک جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ وہ پہلے کی
بت ۵ انچ زیادہ بلند ہوا اور پھر اس کو چھوڑ دیا گیا تاکہ مستوی سے عماد کی سمت
ٹکرائے، پہلی بازگشت میں وہ انتصاباً ۴ انچ اچھلتا ہے ۔ اگر رقاص کو اسی زاویے
سے ایک جانب کھینچا جائے لیکن اس طور پر کہ لنگر مستوی سے ایسے زاویے
ئے جو عماد کے ساتھ 60° کا زاویہ بنائے تو بازگشت میں لنگر انتصاباً کتنا
ھلے گا ۔

دسواں باب

(۲۵۴)

متغیر قوت کے تحت ذرہ کی حرکت

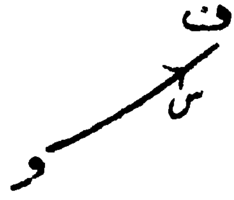
۲۰۳ — ابتک ہم نے ذرہ کی حرکت کی صرف اُن صورتوں پر بحث کی ہے جن میں ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں اس کی حرکت کے پورے راستہ میں مستقل تھیں اور اس لیے ذرہ کا اسراع مستقل تھا۔ اب ہم ایک ایسے ذرہ کی حرکت پر غور کریں گے جس پر وہ قوتیں عمل کرتی ہیں جو ذرہ کے راستے پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہیں۔

اس قسم کی حرکت کے مسائل دو جماعتوں میں تقسیم کئے جا سکتے ہیں، ایک تو وہ جس میں راستہ جو ذرہ طے کرتا ہے مسئلہ کے معطیات کے طور پر دیا گیا ہو اور دوسری وہ جس میں یہ راستہ نامعلوم ہو۔ اول الذکر جماعت سادہ ترین ہے اور اس لیے اول ہم اسی پر غور کریں گے۔ اس میں وہ صورتیں شامل ہیں جو نمونتاً حسب ذیل ہیں: رقاص کی حرکت جس میں رقاص کا لنگر، رقاص کے لٹکانے کی میکانیت کی وجہ سے ایک دائرہ مرتسم کرنے پر مجبور ہے، تار میں پروئے ہوئے منکے کی حرکت جس میں منکا وہ راستہ طے کرنے پر مجبور ہے جو تار سے نشان زدہ ہے۔

حرکت کی مساوات

۲۰۴ — فرض کرو کہ ذرہ اپنے راستہ کا فاصلہ س کسی لمحہ ت پر طے کرتا ہے،

یہ فاصلہ راستہ کے کسی ثابت نقطہ و سے پیمائش کیا جاتا ہے۔ اب راستہ پر ذرہ کی رفتار $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ ہے۔ اِس کو د سے تعبیر کرنے سے ذرہ کا اسراع $\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}}$ یا $\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2}$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل (۱۲۹)

اگر عمل کرنے والی قوتیں معلوم ہوں تو بھی ہم اسراع کی قیمت معلوم کرسکتے ہیں۔ چنانچہ اِس کے لیے تمام قوتوں کو جو ذرہ پر عمل کرتی ہیں راستہ کی سمت میں تحلیل کرنا چاہیے۔ اگر اِس سمت میں قوت کا جزو ترکیبی س ہے تو حرکت (د ۲۵)
کے دوسرے قانون کی رُو سے ذرہ کی حرکت کی مساوات

$$\text{س} = \text{ک}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} \qquad (۹۰)$$

یا

$$\text{س} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} \qquad (۹۱)$$

ہوگی۔

ہم فرض کریں گے کہ قوت کا میدان دائمی ہے اور اِس لیے مقدار س کے متعلق یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ صرف اُسی محل پر منحصر ہوتی ہے جو ذرہ اپنے راستہ پر اختیار کرتا ہے اور اس لمحہ پر منحصر نہیں ہوتی جس پر وہ وہاں پہنچتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر س، س کا ایک تفاعل ہے نہ کہ ت کا۔ مساوات (۹۱) س اور ت میں ایک تفرقی مساوات ہے اور اگر ہم اِس کو حل کرسکیں تو ذرہ کی حرکت کا پورا علم ہو جائیگا بشرطیکہ اِس کا راستہ معلوم ہو۔

یہ مساوات دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے لیکن اِس کو آسانی کے ساتھ پہلے رتبہ کی مساوات میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرد}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{د}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرس}}$$

اس لیے مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$\text{س} = \text{ک}\,\text{و}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرس}}$$

اب چونکہ س، س کا تفاعل ہے اِس مساوات کو س کے لحاظ سے تفرق کیا جا سکتا ہے، چنانچہ

$$\text{م} + \int \text{س}\ \text{فرس} = \tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{و}^2 \qquad (۹۲)$$

جہاں م تکمل کا مستقل ہے۔

چونکہ و، $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ کے مساوی ہے اسلیے اِس مساوات کو شکل

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \sqrt{\frac{2}{\text{ک}}\left(\text{م} + \int \text{س}\ \text{فرس}\right)} \qquad (۹۳)$$

میں رکھا جا سکتا ہے اور یہ درجۂ اول کی مساوات ہے۔ اگر یہ حل ہو سکے تو مسئلہ مکمل طور پر حل ہو جائے گا۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۲) کی بائیں جانب، ذرہ کی توانائی بالحرکت (۲۵۶)
ہے۔ نیز چونکہ ذرہ کے راستہ کی سمت میں اِس کی حرکت میں مزاحم قوت س ہے اس لیے ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$- \int \text{س}\ \text{فرس}$$

ہے۔ پس مساوات (۹۲) سے واضح ہے کہ توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ مستقل رہتا ہے، یہ مساوات ذرہ کی حرکت کے لیے توانائی کی مساوات ہے۔ اگر ہمیں ذرہ کی حرکت کے کسی لمحہ پر کُل توانائی معلوم ہو تو ہم مستقل م متعین کر سکتے ہیں اور پھر مساوات (۹۳) کو تکمل کیا جا سکتا ہے اگر وہ ممکن ہے۔

توضیحی مثال

یہ تسلیم کر کے کہ جاذبہ کی قیمت، زمین کے مرکز سے فاصلہ کے

مُربع کے بالعکس بدلتی ہے ایک مرمی کی حرکت معلوم کرو جس کو ہوا میں انتصاباً پھینکا گیا ہے، جاذبہ کی تخفیف کا لحاظ رکھو۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ا ہے اور اس کی سطح پر جاذبہ کی قیمت ج ہے تب زمین کے مرکز سے ر فاصلہ پر جاذبہ کی قیمت $\frac{ج ا^2}{ر^2}$ ہوگی۔

چونکہ ذرہ، زمین کے مرکز سے کھینچے ہوئے ایک نصف قطر پر حرکت کرتا ہے اس لیے ہم تمام فاصلوں کو زمین کے مرکز سے پیمائش کر سکتے ہیں اور دفعہ ۲ کے محدد س کی بجائے فاصلہ ر لے سکتے ہیں۔ قوت س کی قیمت، مرمی کے راستہ کی سمت میں تحلیل شدہ، $-\frac{ک ج ا^2}{ر^2}$ ہے اور اس نئے حرکت کی مساوات

$$ک \frac{ف^2 ر}{ف ت^2} = -\frac{ک ج ا^2}{ر^2}$$

ہے۔ توانائی کی مساوات بموجب مساوات (۹۲) حسب ذیل ہے:

$$م - \int \frac{ک ج ا^2}{ر^2} ف ر = \frac{1}{2} ک و^2$$

یا

$$م + \frac{ک ج ا^2}{ر} = \frac{1}{2} ک و^2 \quad (ا)$$

فرض کرو کہ ذرہ کو زمین کی سطح سے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا تھا۔ مساوات (ا) میں ر = ا رکھنے سے و کی قیمت و حاصل ہونی چاہئے اور اس لیے

$$م + ک ج ا = \frac{1}{2} ک و^2 \quad (ب)$$

اس مساوات سے م معلوم ہوگا۔ مساواتوں (ا) اور (ب) سے م کو ساقط کیا جائے تو

$$ج ا \left(1 - \frac{ا}{ر}\right) = \frac{1}{2}\left(و^2 - و^2\right)$$

$$\therefore \quad و = \sqrt{و^2 - 2 ج ا \left(1 - \frac{ا}{ر}\right)} \quad (ج)$$ (۲۵۷)

اِس سے کسی نقطہ پر رفتار معلوم ہو گی۔ نیز چونکہ $\text{و} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}$ اس لیے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} = \sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا}\left(۱ - \frac{\text{ا}}{\text{ر}}\right)} \qquad (\text{د})$$

اِس لیے

$$\text{ت} = \int \frac{\text{فر ر}}{\sqrt{\text{و}^{۲} - ۲\,\text{ج}\,\text{ا} + \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{\text{ر}}}} \qquad (\text{ع})$$

تکمل کے عمل کی تکمیل کرنے سے وہ وقت معلوم ہو سکتا ہے جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم حل کے مختلف نمونوں پر غور کرتے ہیں۔

ہم مساوات (ج) سے دیکھتے ہیں کہ و معدوم ہوتا ہے جبکہ

$$\text{ر} = \frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{۲\,\text{ج}\,\text{ا} - \text{و}^{۲}}$$

اِس لیے اگر $\text{و}^{۲} < ۲\,\text{ج}\,\text{ا}$ تو $+\text{ا}$ اور $+\infty$ کے درمیان ر کی ایک مثبت قیمت ہے جس کے لیے رفتار معدوم ہوتی ہے۔ پس اگر $\text{و}^{۲} < ۲\,\text{ج}\,\text{ا}$ تو مرمی اُس نقطہ تک جاتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے $\frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{۲\,\text{ج}\,\text{ا} - \text{و}^{۲}}$ ہے اور پھر زمین پر واپس گرتا ہے۔ اگر $\text{و}^{۲} > ۲\,\text{ج}\,\text{ا}$ تو ر کی کوئی مثبت قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کے لیے و معدوم ہو اور اِس لیے ذرہ لاتناہی تک چلا جاتا ہے، وہ زمین کے جاذبہ سے صاف بچ نکلتا ہے۔

اگر $\text{و}^{۲} = ۲\,\text{ج}\,\text{ا}$ تو رفتار لاتناہی پر معدوم ہوتی ہے، اِس لیے ذرہ زمین کی کشش سے عین بچ جاتا ہے لیکن صرف صفر رفتار کے ساتھ۔ پھینکنے میں اس کی توانائی بالحرکت زمین کی کشش پر غالب آنے میں عین کافی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول اِس خاص صورت $\text{و}^{۲} = ۲\,\text{ج}\,\text{ا}$ پر غور کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (ع)

$$\text{ت} = \int \frac{\text{فر ر}}{\sqrt{\frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^{۲}}{\text{ر}}}}$$

$$=\frac{۲}{۳}\,\frac{ر^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{۲ج\,ا^{۲}}}+مَ$$

میں تحویل ہوتی ہے جہاں مَ تکمل کا ایک نیا مستقل ہے۔
اگر ہم وقت کو پھینکنے کے لمحہ سے شمار کریں تو ت = ۰ حاصل ہونا چاہیئے جبکہ ر = ا اور اس لیے

$$۰=\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{ا}{۲ج}}+مَ$$

اور مَ کو ساقط کرنے پر

$$ت=\frac{۲}{۳\,ا\sqrt{۲ج}}\left(ر^{\frac{۳}{۲}}-ا^{\frac{۳}{۲}}\right) \qquad (ف)$$

(۲۵۸) اُس صورت میں جبکہ $و^{۲}>۲ج\,ا$ مساوات (ع) کو تکمل کرنے کے بعد حاصل ہوتا ہے

$$ت=-\frac{ج\,ا^{۲}}{و^{۲}-۲ج\,ا}\left\{\frac{۱}{\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا}}\;لوک\;\frac{\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا+\frac{۲ج\,ا^{۲}}{ر}}-\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا}}{\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا+\frac{۲ج\,ا^{۲}}{ر}}+\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا}}\right.$$

$$\left.+\frac{ر}{۲ب}\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا+\frac{۲ج\,ا^{۲}}{ر}}\right\}+مَ \qquad (گ)$$

جہاں مَ تکمل کا ایک نیا مستقل ہے۔ اگر وقت کو اُس لمحہ سے شمار کیا جائے جبکہ ذرہ کو پھینکا گیا تھا تو ت = ۰ کے لیے ر = ا حاصل ہونا چاہیئے، اور اس لیے

$$۰=-\frac{ج\,ا^{۲}}{و^{۲}-۲ج\,ا}\left\{\frac{۱}{\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا}}\;لوک\;\frac{و-\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا}}{و+\sqrt{و^{۲}-۲ج\,ا}}+\frac{ا\,و}{۲ب}\right\}+مَ$$

اور مَ کو ساقط کرنے پر ہم پھر وہ وقت معلوم کر سکتے ہیں جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں مطلوب ہوتا ہے۔ صورت $و^{۲}<۲ج\,ا$ پر بھی اسی طرح بحث کی جا سکتی ہے۔

اس کو طالب علم پر بطور مشق کے چھوڑا جاتا ہے ۔

مثالیں

۱ ۔ پچھلی توضیحی مثال میں فرض کرو $ع^2 < ۲ ج ا$ اور معلوم کرو

(ا) بلند ترین ارتفاع جہاں تک ذرہ پہنچتا ہے،

(ب) ذرہ کی پرواز کا وقت

۲ ۔ ایک شہاب زمین پر گرتا ہے ۔ فرض کرو کہ وہ لا متناہی سے صفر رفتار کے ساتھ نکلا تھا اور راست زمین پر گرا ۔ زمین کی سطح پر جس رفتار سے وہ پہنچتا ہے اس کو معلوم کرو ۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو شہاب اس نقطہ سے زمین کی سطح پر گرنے میں لیتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے ر ہے ۔

۳ ۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے قوت کے ایک مرکز پر گرتا ہے جو قانون $\frac{م}{ر^2}$ کی بموجب کشش کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ راستہ کے نصف حصہ پر اوسط رفتار کو راستہ کے دوسرے نصف حصہ پر اوسط رفتار کے ساتھ حسب ذیل نسبت ہے:

$$\pi - ۲ : \pi + ۲$$

۴ ۔ قوت کے ایک مرکز پر گرنے کا وقت معلوم کرو جو قانون $م\, ر^{-\frac{۵}{۳}}$ کی بموجب کشش رکھتی ہے ۔

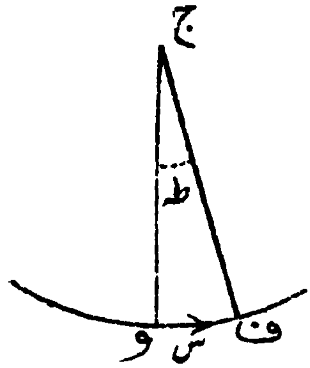
۵ ۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے کشش کے ایک مرکز کی جانب خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے ۔ قوت کا قانون $\frac{م}{ر^3}$ ہے ۔ ثابت کرو کہ مرکز تک پہنچنے میں جو وقت مطلوب ہے وہ $\frac{ا^2}{\sqrt{م}}$ ہے ۔

۶ ۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے ایک ثابت مرکز کی جانب حرکت کرنا شروع کرتا ہے ۔ قوت کا مرکز قانون م ر کی بموجب دفع کرتا ہے ۔ اگر ذرہ کی ابتدائی رفتار $\sqrt{م}\, ا$ ہے تو ثابت کرو کہ وہ ثابت مرکز کی جانب مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس تک کبھی بھی نہ پہنچیگا ۔

سادہ رقاص (۲۵۷)

۲۰۵ ـــ متغیر قوت کی اہم ترین صورتوں میں سے ایک 'سادہ رقاص' کی

حرکت سے مہیا ہوتی ہے۔ پہلا تقرب حاصل کرنے کے لیے ہم فرض کرسکتے ہیں کہ رقاص کا پورا وزن اِس کے لنگر میں مرتکز ہے جس کو ایک ذرہ خیال کیا جا سکتا ہے۔ اِس لنگر کو ایک ثابت نقطہ سے ایک بے وزن ڈوری یا ڈنڈے کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے اور اِس لیے وہ ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرنے پر مجبور رہوتا ہے۔



شکل (۱۳۰)

فرض کرو کہ اِس دائرہ پر ذرہ جو فاصلہ طے کرتا ہے اُس کو س سے تعبیر کیا گیا ہے جہاں س کو زیرترین نقطہ و سے پیمائش کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری اور انتصابی کے درمیان زاویہ ف ج و،طہ سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے س = ا طہ جہاں ا ڈوری کا طول ہے۔ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت اِس کے وزن اور ڈوری کے تناؤ پر مشتمل ہے۔ بعد الذکر اُس سمت میں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے کوئی جزو ترکیبی نہیں رکھتی۔ اول الذکر کا جزو ترکیبی اِس سمت میں۔ ک ج جب طہ ہے۔ اِس لیے حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2 \text{س}}{\text{فر ت}^2} = -\text{ج جب طہ} \qquad (۹۴)$$

جہاں $\text{طہ} = \frac{\text{س}}{\text{ا}}$۔

۲۰۶ — اِس مساوات کو ابتدائی ریاضی کے ذریعہ حل نہیں کیا جا سکتا اِلاّ اُس سادہ صورت کے جس میں زاویہ طہ چھوٹا ہو یعنے جس میں رقاص انتصابی سے ایک چھوٹے زاویہ سے زیادہ نہ جھولنے پائے۔ اِس صورت پر اپنی توجہ محدود رکھنے سے ہم جب طہ کی بجائے طہ رکھ سکتے ہیں اور طہ کی

بجائے $\frac{س}{ا}$ ۔ چنانچہ حرکت کی مساوات شکل

$$\frac{ف^2 س}{ف ت^2} = -\left(\frac{ج}{ا}\right) س$$

میں لکھی جا سکتی ہے ۔

اِس طرح رقاص کے لنگر کا اسراع ، و کی جانب او . و سے اِس کے فاصلے کے متناسب ہوتا ہے ۔

(۲۶۰) مساوات کو شکل

$$و \frac{ف و}{ف س} = -\left(\frac{ج}{ا}\right) س$$

میں لکھنے اور س کے لحاظ سے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و^2 = م - \left(\frac{ج}{ا}\right) س^2 \qquad (۹۵)$$

صریحاً مستقل م کو مثبت ہونا چاہئے اور رفتار معدوم ہو گی جوں ہی س ایسی قیمت پر پہنچے کہ

$$م = \left(\frac{ج}{ا}\right) س^2$$

فرض کرو کہ اِس مساوات کو پورا کرنے والی س کی قیمتیں ± س. سے تعبیر ہوتی ہیں ، تب لنگر کی حرکت صریحاً اُن نقطوں کے اندر مقید رہتی ہے جو نقطہ و سے اِس کی مخالف سمتوں میں فاصلہ س. پر ہیں ۔ ہم س. کو اہتزاز کا حیطہ کہہ سکتے ہیں ۔

م کی بجائے $\left(\frac{ج}{ا}\right) س.^2$ رکھنے سے مساوات (۹۵) ہو جاتی ہے

$$و^2 = \frac{ج}{ا}\left(س.^2 - س^2\right)$$

اس لیے $$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}(\text{س}_0^2 - \text{س}^2)}$$

اور اس مساوات کا تکملہ ہے

$$\text{ت} = \int \frac{\text{فرس}}{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}(\text{س}_0^2 - \text{س}^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ \text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}_0}\right) + \text{صہ}$$

جہاں صہ تکمل کا مستقل ہے۔

اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}_0}\right) = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ (\text{ت} - \text{صہ})$$

اس لیے $$\text{س} = \text{س}_0\ \text{جم}\left\{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ (\text{ت} - \text{صہ})\right\}$$

(۲۶۱) اس مساوات میں مسئلہ کا پورا حل شامل ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ س کی قیمتیں وقت ت_0 کے وقفوں سے مسلسل تکرار پاتی ہیں جہاں ت_0، مساوات

$$\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ \text{ت}_0 = ۲\pi$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح رقاص کی حرکت لاانتہا مرتبہ خود تکرار پاتی ہے۔ اُن دو لمحات کے درمیان وقفہ جن پر رقاص ایک ہی محل میں ہوتا ہے یعنے وقفہ ت_0 مساوات

$$\text{ت}_0 = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اِس کو رقاص کا دَور کہتے ہیں ۔

۲۰۷ ۔ ثانیوں کا رقاص ۔ اُس رقاص کو بنانے کے لیے جو ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرے ہم اکو ایسا لیتے ہیں کہ ت، دو ثانیوں کے مساوی ہو کیونکہ ثانیوں کا رقاص ایسا رقاص ہونا چاہیئے جو بائیں جانب سے سیدھی جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ اور پھر سیدھی جانب سے بائیں جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ لے ۔ اس لیے

$$\pi \sqrt{\frac{ا}{ج}} = ۱$$

فٹ ثانیہ اکائیوں میں ہم لندن کے لیے ج = ۳۲٫۱۹ لے سکتے ہیں اور اس طرح حاصل ہوتا ہے

ا = ۳۹٫۱۴ انچ

یعنے لندن کے لیے ثانیوں کے رقاص کا طول ۳۹٫۱۴ انچ ہونا چاہیئے ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ کسی رقاص کا دَور اِس کے طول کے جذر المربع کے متناسب ہوتا ہے ۔ مثلاً اُس رقاص میں جو نصف ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرتا ہے اِس کا طول ثانیوں کے رقاص کے طول کا صرف ایک چوتھائی ہوگا اور اِس لیے لندن میں ۹٫۷۸ انچ ۔

چونکہ ج کی قیمت زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے اِس لیے ثانیوں کے رقاص کا طول بھی متغیر ہوگا ۔ اگر ہم رقاص کا طول دیکھیں اور نیز وقت پیما سے اِس کا دَور معلوم کریں تو ہم اُس مقام پر جہاں تجربہ کیا جارہا ہے ج کی قیمت محسوب کر سکتے ہیں، فی الحقیقت یہ طریقہ زمین کی سطح کے کسی نقطہ پر ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے سب سے زیادہ آسان اور صحیح ترین ہے ۔

توضیحی مثال

(۲۶۲) ایک رقاص نیویارک میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں کے ذریعہ ظاہر

کرتا ہے، اس کو فیلیڈلفیا لیجانے پر معلوم ہوا کہ وہ وہاں ۲ ثانئے فی یوم تیز رہتا ہے۔ نیو یارک اور فیلیڈلفیا پر ج کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

فیلیڈلفیا میں رقاص $۲۴ \times (۶۰)^۲$ ثانیوں میں $۲۴ \times (۶۰)^۲ + ۲$ بار ضربیں ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے ایک ضرب کا وقت

$$\frac{۲۴ \times (۶۰)^۲}{۲۴ \times (۶۰)^۲ + ۲}$$

ہے اور یہ $\pi \sqrt{\frac{ا}{ج}}$ کے مساوی ہے جہاں ا، رقاص کا طول ہے اور ج، فیلیڈلفیا میں جاذبہ کی قیمت ہے۔ اگر نیو یارک میں جاذبہ کی قیمت ج̣ سے تعبیر ہو تو

$$ج̣ = \pi^۲ ا$$

$$ج = \pi^۲ ا \left[\frac{۲۴ \times (۶۰)^۲ + ۲}{۲۴ \times (۶۰)^۲}\right]$$

$$= \pi^۲ ا \left(۱ + \frac{۴}{۲۴ \times (۶۰)^۲}\right) \text{تقریباً}$$

اس لیے $ج = ج̣ \left(۱ + \frac{۴}{۲۴ \times (۶۰)^۲}\right)$

$$= ج̣ \left(۱ + \frac{۱}{۲۱۶۰۰}\right) \text{تقریباً}$$

اس طرح نیو یارک کی بہ نسبت فیلیڈلفیا میں جاذبہ تقریباً ۲۱۶۰۰ میں ایک حصہ زیادہ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک رقاص کا طول محسوب کرو جو ایک منٹ میں ۱۰۰ دفعہ ضربوں کے ذریعہ وقت کی پیمائش کرتا ہے۔

۲ — ایک رقاص لندن میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے
اگر یہ رقاص نیویارک میں ہو تو اس سے صحیح وقت کی پیمائش ہوتی ہے اگر اس کے
طول کو بقدر ایک ہزارویں حصہ کے چھوٹا کر دیا جائے۔ لندن اور نیویارک میں
جاذبہ کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

۳ — زمین کی سطح پر عرض بلد ل میں ایک نقطہ پر ج کی قیمت

ج = ج. (۱ − ۰٫۰۰۲۵ جم ۲ ل)

ہے جہاں ج. (= ۳۲٫۱۷) عرض بلد ۴۵° میں ج کی قیمت ہے۔ ثابت کرو کہ
وہ عرض بلد جس میں معلومہ طول کا ایک چھوٹا سفر رقاص گھڑی کی شرح میں بڑی سے
بڑی خطا پیدا کرتا ہے عرض بلد ۴۵° ہے، اس عرض بلد میں خطا فی میل معلوم کرو۔
(عرض بلد کا ایک دقیقہ = ۶۰۷۵ فٹ)

۴ — ایک عمارت میں زمین سے اوپر ف ارتفاع پر جاذبہ کی قیمت

ج. − ۰٫۰۰۰۰۰۳ ف

ہے جہاں ج. عمارت کے پائین پر جاذبہ کی قیمت ہے نیویارک میں ج. = ۳۲٫۱۶
رقاص گھڑی کی شرح میں وہ خطا معلوم کرو جو اس کو زمین سے ۳۰۰ فٹ بلند
عمارت کی چھت پر لیجانے سے پیدا ہوتی ہے۔

۵ — ایک رقاص کا طول ل ہے اور وہ ن ضربیں فی یوم ظاہر کرتا ہے (۲۶۳)
اگر اس کے طول کو ل + ل′ میں بدل دیا جائے تو ثابت کرو کہ رقاص تقریباً

$\frac{ن\,ل'}{ل}$ ضربیں فی یوم کھو دیگا۔

۶ — ایک غبارہ مستقل اسراع کے ساتھ بلند ہوتا ہے اور دو منٹ میں
۲۶۰۰ فٹ کے ارتفاع تک پہنچ جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس چڑھاؤ میں رقاص گھڑی
تقریباً ایک ثانیہ تیز ہو گئی ہوگی۔

۷ — طول ل کے ایک رقاص کو اس کے لنگر کے صرف ایک چھوٹے
حصہ کو حرکت دیکر ٹھیک بنایا جا سکتا ہے، اس حصہ کی کمیت کل لنگر کی کمیت کا
$\frac{۱}{ن}$ ہے۔ اس کو کتنی دور تک حرکت دینی چاہیے کہ ف ثانیے فی یوم کی خطا کی

تصحیح ہو جائے۔

سادہ موسیقی حرکت

۲۰۸ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر کوئی رقاص اِس طور پر حرکت کرے کہ انتصابی کے ساتھ اس کا اعظم میلان چھوٹا ہو تو اس کی کل حرکت میں جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اِس کے راستہ کے وسطی نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے اور اسراع کی سمت اِس نقطہ کی جانب ہوتی ہے۔ اگر کوئی نقطہ اِس طریقہ پر حرکت کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ چنانچہ اگر ایک نقطہ سادہ موسیقی حرکت کرے اور ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ س ہو تو شکل

$$\frac{ف^2 س}{ف ت^2} = -ک^2 س$$

کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جہاں ک ایک مستقل ہے۔

تکمل کرنے سے حسب سابق (مقابلہ کرو مساوات (۹۶) کے ساتھ) مساوات

$$و^2 = ک^2 (س_ا^2 - س^2)$$

حاصل ہوتی ہے اور پھر اِس سے مساوات

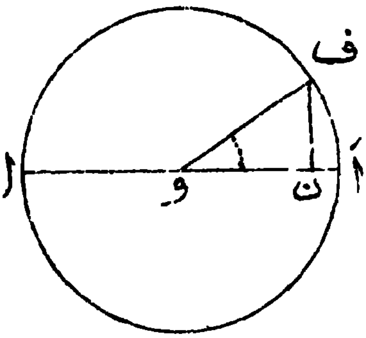
$$س = س_ا \; جم \; ک (ت - صہ) \qquad (۹۷)$$

ملتی ہے۔

مستقل ک کو حرکت کا **تعدد** کہتے ہیں۔ مثلاً کسی سادہ رقاص کا **تعدد** $\sqrt{\frac{ج}{ل}}$ ہے۔

۲۰۹ — سادہ موسیقی حرکت کی ایک آسان ہندسی توجیہ کیجا سکتی ہے اور اِس سے اس حرکت کا پورا علم تکملی احصاء یا تفرقی مساواتوں کے نظریہ کے استعمال کے بغیر ہو جاتا ہے۔ شکل ۱۳۱ میں فرض کرو کہ خط و ف و کے

گرد یکساں زاویائی رفتار ک کے ساتھ گردش کرتا ہے اور اس لیے ف، یکساں رفتار ک ا کے ساتھ نصف قطر ا کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ (۲۶۴)
ف سے ایک ثابت قطر ا اَ پر عمود ف ن کھینچا گیا ہے۔ اب معلوم ہوگا کہ نقطہ ن، خط ا اَ پر سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ آگے اور پیچھے حرکت کرتا ہے۔



شکل (۱۳۱)

ف کا اسراع بموجب دفعہ ۱۲، ف و کی سمت میں ک^۲ ا ہے۔ اس اسراع کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) ن کے لحاظ سے ف کا اسراع جس کو ن ف پر ہونا چاہیے (۲) و کے لحاظ سے ن کا اسراع جس کو و ن پر ہونا چاہیے۔ پس ن کا اسراع، ف کے اسراع کا وہ جزو ترکیبی ہے جو سمت ا اَ میں ہے۔ لیکن یہ جزو ترکیبی ک^۲ ا جم ط یا ک^۲ × و ن ہے اور اس کی سمت ن و ہے۔ و ن کو س کے مساوی لینے سے اسراع ک^۲ س اس سمت میں حاصل ہوتا ہے جس میں س کی پیمائش ہوئی ہے یعنے و ن۔ اس لئے نقطہ ن سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کی اس ہندسی توجیہ سے و اور س کے لیے جملے راست حاصل کئے جا سکتے ہیں، س کی قیمت و ن یا ا جم ط ہے۔ فرض کرو کہ ت = صہ وہ لمحہ ہے جس پر نقطہ ف، دائرہ کے گرد اپنی حرکت میں نقطہ اَ میں سے گذر رہا تھا، تب اس کے بعد کسی لمحہ ت پر وقت ت - صہ ہوگا اور اس لیے و ف سے مرتسم شدہ زاویہ ط = ک (ت - صہ) ہوگا۔ اس لیے

س = و ن = ا جم ک (ت - صہ)   (۹۸)

یہ وہی نتیجہ ہے جو مساوات (۹۷) میں مندرج ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت کا حیطہ س. وہی ہے جو دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور تعدد ک، زاویائی رفتار کے مماثل ہے۔ مساوات (۹۸) کو تفرق کرنے سے رفتار کے لیے فوراً حاصل ہوتا ہے

و = فرس / فرت = ـ ک ا جب ک (ت ـ صہ)

= ک √(ا² ـ س²)

اس نتیجہ کو اس طریقہ پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کہ متحرک نقطہ
(۲۶۵) ف کی رفتار ک ا کو ا اَ کی سمت میں اور اس کے علی القوائم سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اول الذکر صریحاً ا اَ پر ن کی رفتار ہے اور اسکی مقدار ـ ک ا جب طہ یا

و = ـ ک ا جب ک (ت ـ صہ)

= ک √(ا² ـ س²)

حسب سابق فوراً حاصل ہوتی ہے۔

اس حرکت میں سادہ رقاص کی حرکت کی طرح مقدار ا کو حیطہ کہتے ہیں اور وقت ۲π/ک کو جس کے بعد حرکت خود تکرار پاتی ہے دَور کہتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ایک ذرہ، ۱۲ ثانیوں کے دَور کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور ۵ فٹ کا حیطہ رکھتا ہے۔ اس کی اعظم رفتار معلوم کرو اور یہ اعظم رفتار جس لمحہ پر واقع ہوتی ہے اس کے ایک ثانیہ بعد ذرہ کا محل اور اس کی رفتار معلوم کرو۔

۲ — ایک ذرہ جو دَور ت کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اپنے اوسط محل سے فاصلہ ل پر رفتار و رکھتا ہے۔ اِس کا حیطہ معلوم کرو۔

۳ — ایک ذرہ ایک خط ا ب پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اس پر ایک قوت جاذبہ عمل کرتی ہے جو ا ب کے ایک نقطہ ف سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے اور اِس لیے ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کی اوسط توانائی بالحرکت اِس کی اوسط توانائی بالقوۃ کے مساوی ہے۔

۴ — ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اور اس کے اوسط محل سے فاصلوں ۴ اور ۳ فٹ پر اس کی رفتاریں علی الترتیب ۳ اور ۴ فٹ فی ثانیہ ہیں — اِس کا حیطہ اور دَور معلوم کرو۔

۵ — ایک ذرہ ایک فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے اور خود فریم بھی ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے اِن دو حرکتوں کی سمتیں متوازی ہیں اور اِن کے دَور ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے جس کی سمت اور دَور وہی ہیں جو فریم کی حرکت کے ہیں۔

۶ — طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی ایک لچکدار ڈوری سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور اس کو توازن کی حالت میں انتصاباً لٹکنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اب وزن کو انتصاباً نیچے مزید فاصلہ ف تک کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو آزاد چھوڑ دینے پر وہ حیطہ ف کی سادہ موسیقی حرکت رکھیگا بشرطیکہ اِس میں ڈوری کی غیر تنی ہوئی حالت کبھی بھی وقوع پذیر نہ ہو۔ حرکت کا دَور معلوم کرو۔

تدویری رقاص

۲۱۰ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقاص کی حرکت صرف اُس وقت تک سادہ موسیقی حرکت رہتی ہے جب تک کہ حرکت کا

حیطہ چھوٹا رہتا ہے ۔ لیکن جاذبہ کے تحت ذرہ کی حرکت کو اس طریقہ سے مقید کرنا ممکن ہے کہ اس کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہو دراں حالیکہ حیطہ خواہ کتنا ہی بڑا ہو ۔

وہ منحنی معلوم کرنے کے لیے جس میں ذرہ کی حرکت کو مقید کرنا پڑتا (۲۶۶)
ہے فرض کرو کہ ہم مساوات (۹۴) یعنے

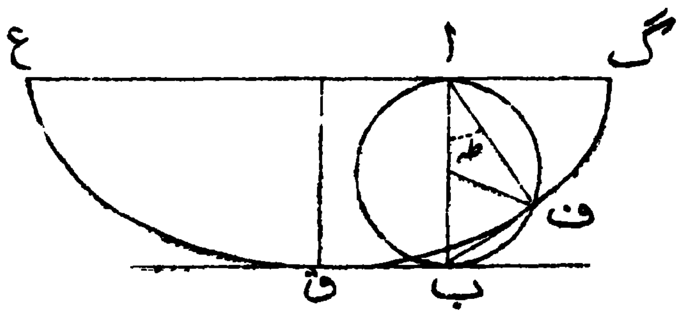
$$\frac{\text{ف}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{ج جب ط}$$

پر غور کرتے ہیں جو ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی مساوات ہے جو کسی منحنی میں حرکت کرنے پر مجبور ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو منحنی کے اُس نقطہ پر کا مماس افقی کے ساتھ بناتا ہے جس کا فاصلہ منحنی پر س ہے ۔ یہ مساوات سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرے گی اگر اسراع $\frac{\text{ف}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}}$ ، ـک^{2} س کے مساوی ہو ۔ اس لیے

$$\text{ج جب ط} = \text{ک}^{2}\,\text{س}$$

اور اس لیے جب ط، س کے متناسب ہونا چاہئے ۔

۲۱۱ ـــ اس ربط سے خط تدویر کی ایک خاصیت معلوم ہوتی ہے یعنے اُس منحنی کی جس کو ایک دائرہ کے محیط پر کا ایک نقطہ فضا میں مرتسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑھک رہا ہو شکل (۱۳۲) میں فرض کرو کہ ایک خط تدویر ہے جو خط ع گ پر ایک دائرہ کے لڑھکنے سے بنا ہے ف کوئی نقطہ ہے



شکل (۱۳۲)

جب متحرک دائرہ کے محیط پر کا نقطہ ' ف پر ہو تو فرض کرو کہ دائرہ کا وہ نقطہ جو خط ع گ کو مس کرتا ہے ا ہے اور فرض کرو کہ ا میں سے گذرنیوالا قطر ا ب ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر دائرہ کے محیط پر کے نقطہ ف کی حرکت خط ا ف پر عمود وار ہے (دیکھو مثال ا صفحہ ۱۳)۔ چونکہ ا ف ب قائمہ زاویہ ہے اس لیے یہ حرکت ب ف پر ہونی چاہئے۔ اِس لیے ب ف خط تدویر کا مماس ہے۔ اگر ع گ کو افقی فرض کیا جائے تو ف پر کے مماس اور افقی کے درمیان زاویہ طہ زاویہ ف ا ب کے مساوی ہے' اور اس لیے ف میں سے گذرنیوالا دائرہ کا نصف قطر انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ طہ بنائے گا۔ (۲۶۷)

فرض کرو کہ دائرہ ع گ پر لڑھکتا ہے تا آنکہ ف پر خط تدویر کا مماس افقی کے ساتھ زاویہ طہ + فرطہ بنائے۔ اب ف پر کے نصف قطر کو انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ (طہ + فرطہ) بنانا چاہیئے اور اس لیے دائرہ زاویہ ۲ فرطہ میں سے گردش کر چکا ہوگا۔ اب چونکہ ف کی حرکت کو ا کے گرد گردش کی حرکت سمجھا جا سکتا ہے اِس لئے راستہ کا وہ چھوٹا عنصر فرس جو ف سے مرتسم ہوتا ہے

فرس = ا ف × ۲ فرطہ

سے حاصل ہوگا۔

اب ا ف = ا ب جم طہ = د جم طہ جہاں د' دائرہ کا قطر ہے۔

اس طرح

فرس = ۲ د جم طہ فرطہ

اور تکمل کرنے پر

س = ۲ د جب طہ

تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے اگر ہم س کو اُس نقطہ سے پیمائش کریں جس پر طہ = ۰ یعنے خط تدویر کا زیر ترین نقطہ۔

خط تدویر کی خاصیت ثابت ہو چکی اور ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۹) ایک نقطہ کی کل حرکت میں درست رہتی ہے جبکہ یہ نقطہ ایک خط تدویر

مرتسم کرتا ہے جس کی تکوین قطر د کے ایک دائرہ کے لڑھکنے سے ہوتی ہے جہاں

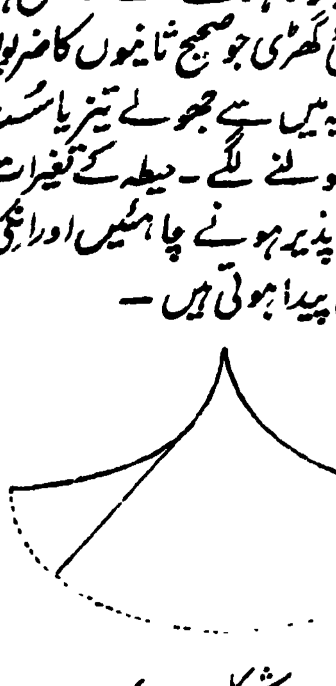
$$۲د = \frac{ج}{ک^{۲}}$$

۲۱۲ — اگر خط تدویر دیا گیا ہو تو سادہ موسیقی حرکت کا تعدد ک، $\sqrt{\frac{ج}{۲د}}$ کے مساوی ہوگا اور دَور $\frac{۲\pi}{ک}$ ہے یعنی

$$۲\pi\sqrt{\frac{۲د}{ج}}$$

اِس لیے حرکت کا دَور وہی ہے جو طول ۲ د کے سادہ رقاص کا ہوتا ہے

۲۱۳ — تدویری حرکت کی اہمیت حسب ذیل ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقاص کی حرکت صرف اُس وقت سادہ موسیقی حرکت ہوتی ہے (۲۶۸) جبکہ حیطہ اِس قدر چھوٹا ہو کہ اِس کو صغیر سمجھا جا سکے۔ محدود حیطوں کے لئے حرکت سادہ موسیقی نہیں ہوتی اور اِس لیے دَور اُس سادہ موسیقی حرکت کے دَور سے مختلف ہوتا ہے جو حیطہ کے بہت چھوٹا ہونے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس دَور حیطہ پر منحصر ہوتا ہے، چنانچہ کوئی گھڑی جو صحیح ثانیوں کا ضربوں کے ذریعہ اظہار کرتی ہے جبکہ رقاص ایک زاویہ میں سے جھولے تیز یا سست ہوگی جبکہ رقاص کسی مختلف زاوئے میں سے جھولنے لگے۔ حیطہ کے تغیرات کسی رقاص کی حرکت کی اثنا میں ہمیشہ وقوع پذیر ہونے چاہئیں اور انکی وجہ سے گھڑی کی وقت نمائی میں بے قاعدگیاں پیدا ہوتی ہیں۔



شکل (۱۳۳)

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ایک ذرہ ایک خط تدویر مرتسم کرے تو دَور حیطہ پر منحصر نہیں ہوتا اور اِس لیے حیطہ کے تغیرات کسی ایسے ذرہ کی وقت نمائی کو متاثر نہیں کر سکتے۔

ذرہ کو ایک خط تدویر میں حرکت کرنے کے لیے مقید کرنے کا سادہ ترین طریقہ عملاً یہ ہے کہ اس کو ایک ثابت نقطہ سے ایک ڈوری کے ذریعہ اس طریقہ پر لٹکایا جاتا ہے کہ ذرہ کی حرکت میں ڈوری دو انتصابی رُخوں پر خود لپٹتی اور کھلتی جاتی ہے۔ اگر ان رُخوں کے منحنی کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جائے تو ذرہ ایک خط تدویر مرتسم کرے گا اور یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اِن رُخوں کے منحنی دو تدویروں کے حصے ہونے چاہئیں جن میں سے ہر ایک اُس تدویر کے مساوی ہو جس کو ذرہ مرتسم کرتا ہے۔

مثالیں

۱۔ تدویری حرکت میں ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ وہ اپنے انتصابی اُتار کا نصف طے کر چکے۔

۲۔ ایک ذرہ جاذبہ کے تحت ایک خط تدویر میں اہتزاز کرتا ہے، حرکت کا حیطہ ب اور دور تہ ہے۔ ثابت کرو کہ سکون کے محل سے پیمائش شدہ وقت ت پر اس کی رفتار $\frac{2\pi ب}{تہ}$ جب $\frac{2\pi ت}{تہ}$ ہوگی۔

۳۔ کمیت ک کا ایک ذرہ ایک چکنے خط تدویر پر اس کے قرن سے پھسلنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر دباؤ ۲ ک ج جم پہ ہے جہاں پہ، ذرہ کی حرکت کی سمت کا میلان اُفقی کے ساتھ ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد ذرہ کی حرکت

فاصلہ کے متناسب قوت

۲۱۴۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ صرف ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی سمت ایک ثابت نقطہ و کی جانب ہے اور جو و سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے حرکت کرتا ہے اور کوئی دوسری قوتیں ذرہ پر عمل نہیں کرتیں۔ (۲۶۹)

و کو مبداء لو اور فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ذرہ کے محل ف کے محدد لا، ما، ی ہیں۔ فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت مہ × و ف ہے جس کی سمت ف و ہے اور مہ ایک مستقل ہے۔ اِس قوت کے اجزائے ترکیبی محددوں کے محوروں کے متوازی

$$-\text{مہ لا}،\quad -\text{مہ ما}،\quad -\text{مہ ی}$$

ہیں اور اسراع کے اجزائے ترکیبی حسب دفعہ ۱۷

$$\frac{\text{فز}^2\,\text{لا}}{\text{فز ت}^2}،\quad \frac{\text{فز}^2\,\text{ما}}{\text{فز ت}^2}،\quad \frac{\text{فز}^2\,\text{ی}}{\text{فز ت}^2}$$

ہیں۔

پس ذرہ کی حرکت کی مساواتیں حسب ذیل ہوتی ہیں:

$$\text{ک}\,\frac{\text{فز}^2\,\text{لا}}{\text{فز ت}^2} = -\text{مہ لا} \qquad (100)$$

$$\text{ک}\,\frac{\text{فز}^2\,\text{ما}}{\text{فز ت}^2} = -\text{مہ ما} \qquad (101)$$

$$\text{ک}\,\frac{\text{فز}^2\,\text{ی}}{\text{فز ت}^2} = -\text{مہ ی} \qquad (102)$$

یہ تین مساواتیں ایک ہی نمونے کی ہیں یعنی اُس نمونے کی جو سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرتا ہے۔ اِس لیے اُس عمود کا پائین جو متحرک ذرہ سے محددوں کے محوروں میں سے کسی ایک پر کھینچا گیا ہو سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ مساوات (۱۰۰) کا حل

$$\text{لا} = \text{ا جم ف}\,(\text{ت} - \text{صہ})$$

ہے جہاں $\text{ف}^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{ک}}$ ۔ اس کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{لا} = \text{ا جم ف صہ جم ف ت} + \text{ا جب ف صہ جب ف ت}$$

یا

$$\text{لا} = \text{ج جم ف ت} + \text{د جب ف ت}$$

(۲۷۰) جہاں ج اور د نئے مستقل ہیں جو ا جم ف صہ اور ا جب ف صہ کی جگہ رکھے گئے ہیں۔ دوسری دو مساواتوں کے حل اسی کے مشابہ ہیں اور اس لیے مکمل حل حسب ذیل ہے:

لا = ج جم ف ت + د جب ف ت (۱۰۳)

ما = جَ جم ف ت + دَ جب ف ت (۱۰۴)

ی = جً جم ف ت + دً جب ف ت (۱۰۵)

ہم ہمیشہ مساواتوں

ج + ر جَ + س جً = ۰ (۱۰۶)

د + ر دَ + س دً = ۰ (۱۰۷)

کو حل کر سکتے ہیں اور ر اور س کی ایسی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں جو ان مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم مساواتوں (۱۰۴) اور (۱۰۵) کو ر اور س کی ان قیمتوں سے ضرب دیتے ہیں اور متناظر طرفوں کو مساوات (۱۰۳) کی متناظر طرفوں میں جمع کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

(لا + ر ما + س ی) = (ج + ر جَ + س جً) جم ف ت
+ (د + ر دَ + س دً) جب ف ت = ۰

(۱۰۸)

کیونکہ مساواتیں (۱۰۶) اور (۱۰۷) پوری ہوتی ہیں۔ مساوات (۱۰۸) کے یہ معنے ہیں کہ ت کی تمام قیمتوں کے لیے ربط لا + ر ما + س ی = ۰ درست ہے اور اس لیے ذرہ کی پوری حرکت میں وہ اس مستوی میں رہتا ہے جس کی یہ مساوات ہے۔

محددوں کے محور اختیاری طور پر منتخب ہوتے ہیں۔ ہم ہمیشہ ان محوروں کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ مستوی جس میں پوری حرکت وقوع پذیر ہوتی ہے لا ما کا مستوی ہو۔ تب حرکت حسب ذیل دو مساواتوں سے معلوم ہوگی:

لا = ج جم ف ت + د جب ف ت،

ما = جَ جم ف ت + دَ جب ف ت

اِن مساواتوں کو جب ف ت اور جم ف ت کے لیے حل کرنے سے

جب ف ت = (جَ لا − ج ما) / (جَ د − ج دَ)

جم ف ت = (دَ لا − د ما) / (جَ د − ج دَ)

اس لئے مربع لینے اور جمع کرنے سے

(جَ لا − ج ما)^2 + (دَ لا − د ما)^2 = (جَ د − ج دَ)^2 (۲۷۱)

یہ قطع ناقص کی مساوات ہے۔

اِس لئے وہ عام ترین حرکت جو ذرہ کے لیے ممکن ہے ایک ہی قطع ناقص کو بار بار مرتسم کرنے پر مشتمل ہوتی ہے۔ اِس حرکت کا دور $\frac{2\pi}{\text{ف}}$ ہے اور یہ وہ وقت ہے جو جم ف ت اور جب ف ت کو اپنی قیمتیں دُہرانے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔

۲۱۵ — محاور لا، ما ابتک غیر متعین ہیں۔ فرض کرو کہ ہم انہیں قطع ناقص کے صدر محاور خیال کرتے ہیں۔

اب اگر ہم فرض کریں کہ وقت کی پیمائش اُس لمحہ سے کی گئی ہے جس پر ذرہ محورِ اعظم کے سروں میں سے ایک پر تھا تو ہمیں شکل ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی:

لا = ا جم ف ت،

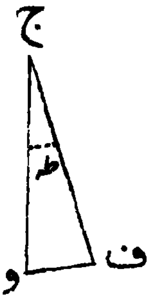
ما = ب جب ف ت

اس طرح ذرہ جس قطع ناقص کو مرتسم کرتا ہے اِس کا خارج المرکز زاویہ ف ت ہے اور اس لیے یہ زاویہ یکساں زاوئی رفتار ف یا $\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{ل}}}$ کے ساتھ بڑھتا ہے۔ حرکت تکرار پاتی ہے جب، ف، ۲π تک بڑھ جاتا ہے

اِس لئے تعدد ف یا $\sqrt{\dfrac{\text{مہ}}{\text{ک}}}$ ہے اور دَور ۲ π $\sqrt{\dfrac{\text{ک}}{\text{مہ}}}$ ہے۔

۲۱۶ ـ اِس حرکت کی مثال اُس رقاص کی حرکت سے مل سکتی ہے جو ایک انتصابی مستوی میں حرکت کرنے پر مجبور نہ ہو لیکن انتصابی سے اِس کے انحراف چھوٹے ہوں۔

فرض کرو کہ رقاص کا طول ل ہے اور فرض کرو کہ اس کا لنگر اپنے توازن کے محل و سے قریب کے محل ف تک ہٹا ہے اتنا کہ زاویہ ف ج و کو چھوٹا سمجھا جا سکتا ہے۔



شکل (۱۳۴)

اِس زاویہ کو طہ سے تعبیر کرو تو لنگر کے وزن کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، (۱) ک ج جم طہ سمت ج ف میں (۲) ک ج جب طہ سمت ف و میں۔ (۱) کی تعدیل ڈوری کے تناؤ سے ٹھیک طور پر ہو جاتی ہے۔ پس (۲) میں اگر طہ چھوٹا ہے تو جب طہ کو طہ کے مساوی اور اِس لیے $\dfrac{\text{وف}}{\text{ل}}$ کے مساوی رکھا جا سکتا ہے۔ اِس لیے لنگر پر ایک قوت $\dfrac{\text{ک ج}}{\text{ل}}$ وف سمت و ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جا سکتی ہے۔ اِس لیے حرکت اُس قسم کی ہے جس کو اوپر بیان کیا گیا ہے، مہ کی قیمت $\dfrac{\text{ک ج}}{\text{ل}}$ ہے اور اِس لئے ف کی قیمت $\sqrt{\dfrac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ ہے۔ اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر کسی لٹکے ہوئے وزن کو اس کے توازن کے محل سے ہٹا کر کسی (۲۰۲) طریقہ پر پھینکا جائے تو وہ ہمیشہ اُس افقی مستوی میں ایک قطع ناقص مرتسم کرے گا جس میں وہ حرکت کرنے میں آزاد ہے اور وہ نقطہ اِس

قطع ناقص کا مرکز ہوگا جو اُس نقطہ کے عین نیچے ہے جس سے وزن لٹکایا گیا ہے۔
انگلستان کے دیہاتی میلوں میں بعض اوقات ایک ایسا انتظام دیکھا جا سکتا ہے جس میں تماشہ گر بڑی ہوشیاری سے اِس نتیجہ سے فائدہ اٹھاتا ہے۔ ایک وزن ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہوتا ہے اور فرش پر ٹھیک اُس نقطہ کے نیچے جس سے وزن لٹکا ہوا ہے ایک اسکیٹل (لکڑی کی چھوٹی ٹیخ) رکھی ہوتی ہے تماشہ گر تماش بینوں سے کہتا ہے: آؤ، داخلہ کی فیس دیکر اندر آؤ اور انعام کیلئے ایک مقابلہ میں شریک ہو جو اُس شخص کو دیا جائے گا جو وزن کو اِس طریقہ سے پھینکے کہ وہ واپس ہوتے ہوئے اسکیٹل سے ٹکرائے۔ بلاشبہ یہ مسئلہ اُتنا ہی ناممکن ہے جتنا ایک ایسے قطع ناقص کو بنانے کا ہے جو خود اپنے مرکز میں سے گذرتا ہو۔

۲۱۷ — ایک اور طریقہ جس کے ذریعہ متذکرۂ بالا حرکت کی مثال مل سکتی ہے حسب ذیل ہے: طبعی طول ل کی ایک لچکدار ڈوری کے ایک سرے سے ایک چھوٹا ذرہ بندھا ہوتا ہے اور یہ ذرہ ایک چکنی افقی میز پر حرکت کرنے میں آزاد رہتا ہے۔ ڈوری کا دوسرا سرا میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتا ہے اور ایک ثابت نقطے سے جس کا فاصلہ سوراخ سے ل ہے بندھا ہوتا ہے۔ اگر ذرہ کو سوراخ سے فاصلہ ر تک کھینچا جائے تو ڈوری کا کُل طول ل + ر ہوگا اور اس لیے اِس کا تناؤ $\frac{ر}{ل}$ لہ ہوگا جہاں لہ لچک کا مقیاس ہے۔ اِس لیے ذرہ پر عمل کرنے والی قوت یعنی ڈوری کا تناؤ اُس فاصلے کے متناسب ہے جو ذرہ کا ایک ثابت نقطہ یعنی سوراخ سے ہے اور اِس قوت کی سمت سوراخ کی جانب ہے۔ اِس کو چھوڑ دینے پر ذرہ میز پر ایک قطع ناقص میں حرکت کرے گا۔

مثالیں

۱۔ نقطہ ف ایک قطع ناقص کو ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی

سمت مرکز کی جانب ہے مرتسم کر رہا ہے اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطہ ف ہے۔ ثابت کرو کہ ف اس امدادی دائرہ کے گرد یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔

۲۔ ایک ذرہ قوت کے ایک مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے' کشش راست فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص کے مرکز سے ذرہ تک جو سمتی نصف قطر کھینچا جائے وہ مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے۔

۳۔ ایک ذرہ ایک قوت کے تحت جو فاصلے کے متناسب ہے ایک قطع ناقص مرتسم کر رہا ہے' اس پر ناقص کے محور اعظم کی متوازی سمت میں ایک دھکہ پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ نئے مدار کا محور اصغر وہی ہے جو پرانے مدار کا تھا اور بتاؤ کہ محور اعظم میں پیدا شدہ تبدیلی کس طرح معلوم کی جا سکتی ہے۔

۴۔ ایک ذرہ قوت کے متعدد مرکزوں کی کششوں کے زیر عمل ہے جن میں سے ہر کشش فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔ (۲۷۳)

اس حرکت کی تمثیل کے لیے میکانیکی نمونہ کس طرح بنایا جا سکتا ہے۔

۵۔ ایک ذرہ ایک دفائی قوت کے زیر عمل ہے جو قوت کے مرکز سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع زائد مرتسم کرتا ہے۔

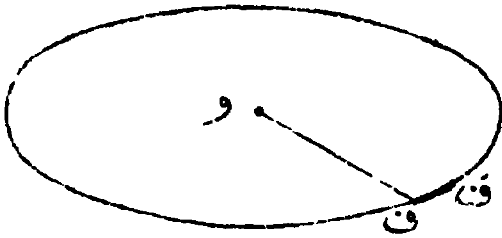
۶۔ مثال ماسبق میں ثابت کرو کہ ذرہ اور قوت کے مرکز کو ملانے والا سمتی نیم قطر مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد حرکت کا عام نظریہ

۲۱۸ ۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ ہے جس پر صرف ایک قوت عمل کرتی ہے جس کی سمت قوت کے ایک ثابت مرکز کی جانب ہے اور اس قوت کی مقدار اس فاصلہ کا کوئی تفاعل ہے جو ذرہ کا ثابت مرکز سے ہے۔

فرض کرو کہ قوت کا مرکز د ہے اور کسی لمحہ پر ذرہ کا محل ف ہے

اور اس لمحہ پر ذرہ کی رفتار کی سمت ف فَ ہے۔ اب مستوی و ف فَ میں ذرہ کی رفتار اور نیز اس کا اسراع واقع ہیں، رفتار ف فَ پر اور اور اسراع ف و پر ہے۔ پس کسی چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کی رفتار پھر بھی مستوی و ف فَ میں ہوگی۔ نیز ذرہ بھی اسی مستوی میں ہوگا (فرض کرو نقطہ فَ پر) اور اس لیے اسراع بھی جو فَ و پر ہے اسی مستوی میں ہوگا۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک اور چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کا محل، رفتار، اور اسراع سب کے سب مستوی و ف فَ میں ہوں گے اور علیٰ ہذا اس عمل کو جہاں تک چاہیں جاری رکھا جا سکتا ہے۔



شکل (۱۳۵)

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ذرہ مستوی و ف فَ کو کبھی بھی نہیں چھوڑے گا اور اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

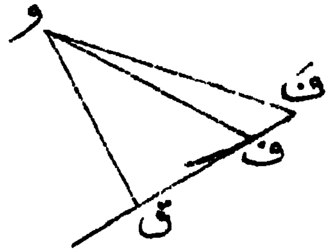
وہ مدار جس کو ایک ذرہ قوت کے ایک ثابت مرکز کے گرد مرتسم کرتا ہے کلاً ایک مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۴۱ میں اس مسئلہ کی ایک تمثیل دی جا چکی ہے، یہ تمثیل اس مدار سے متعلق ہے جس کو ذرہ ایسی کشش کے تحت مرتسم کرتا ہے جو مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہے۔

رفتار کا معیار

(۲۷۴) **۲۱۹** — کسی نقطہ کی رفتار ایک سمتی ہے اور اس سمتی کے خط عمل کو وہ خط سمجھا جا سکتا ہے جو متحرک نقطہ میں سے اس کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہو۔ ہم رفتار کے معیار کی عین اسی طریقہ پر تعریف کر سکتے ہیں جس طریقہ پر قوت کے معیار کی تعریف کی جا چکی ہے۔ مزید بریں قوت کے

معیاروں کے تمام خواص اِس واقعہ سے مستنبط کیے گئے تھے کہ قوتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے اور اِس لیے وہی خواص رفتاروں کے معیاروں کے لیے بھی درست ہوں گے کیونکہ رفتاروں کو بھی قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔



شکل (۱۳۶)

فرض کرو کہ ف ایک ذرہ ہے جو و کے گرد ایک مدار مرتسم کر رہا ہے اور فرض کرو کہ و سے اُس خط پر جو ف میں سے گذرتا ہے اور ذرہ کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہے عمود و ق نکالا گیا ہے۔ پس ذرہ کی رفتار کا معیار و کے گرد و ق × (ذرہ کی رفتار) ہے۔

فرض کرو کہ وقت کے چھوٹے وقفہ فرت کے بعد ذرہ فَ پر ہے۔ فَ پر اِس کی رفتار ف پر اِس کی رفتار اور ف پر اِس کے اسراع کے فرت گنا سے مرکب ہے۔ اِس لیے

(فَ پر رفتار کا معیار و کے گرد)

= (ف پر رفتار کا معیار و کے گرد)

+ [(فرت × ف کا اسراع) کا معیار و کے گرد]

ف پر اسراع کی سمت ف و ہے اور اِس لیے اِس مساوات کی آخری رقم صفر ہے اور اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ف اور فَ پر کی رفتار کے معیار و کے گرد مساوی ہیں۔

ہم اِس کی توسیع پچھلے مسئلہ کی طرح نقطہ بہ نقطہ کر سکتے ہیں اور بالآخر حسب ذیل مسئلہ پر پہنچتے ہیں:

اگر ایک ذرہ و کے گرد ایک مدار مرتسم کر رہا ہو تو ذرہ کی

رفتار کا معیار و کے گرد مستقل ہوتا ہے۔

۲۲۰ — ہم نے فرض کیا ہے کہ ذرہ ف سے فَ تک وقت فرت میں حرکت کرتا ہے اور اس لیے ف پر اس کی رفتار و ہو تو ف فَ = و فرت۔ جب ذرہ اپنا مدار مرتسم کرتا ہے تو اس اثناء میں خط و ف مدار کے مستوی میں ایک رقبہ مرتسم کرتا ہے۔ وقت فرت میں مرتسم شدہ رقبہ چھوٹے مثلث و ف فَ کا رقبہ ہے۔ چنانچہ (۲۰۵)

وقت فرت میں مرتسم شدہ رقبہ

= رقبہ و ف فَ

= $\frac{1}{2}$ وق × ف فَ

= $\frac{1}{2}$ وق × و فرت

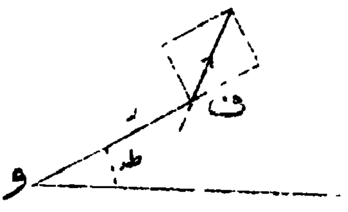
= $\frac{1}{2}$ فرت × رفتار کا معیار و کے گرد

پس فی اکائی وقت مرتسم شدہ رقبہ، و کے گرد رفتار کے معیار کا نصف ہے اور پچھلے دفعہ کی رو سے یہ مستقل ہے۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

مساوی رقبے مساوی وقتوں میں مرتسم ہوتے ہیں۔

مدار کی تفرقی مساوات

۲۲۱ — اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ اور توانائی کے بقاء کے مسئلہ کو ایک ساتھ لینے سے ہم اُس مدار کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ اس مساوات کو سب سے زیادہ سہولت کے ساتھ قطبی محددوں میں بیان کیا جا سکتا ہے جبکہ قوت کے



شکل (۳۷)

مرکز کو مبداء فرض کیا گیا ہو۔

اگر ذرہ کے محدد ر، طہ ہوں تو رفتار کو دو رفتارں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) رفتار $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}$ سمت وف میں، (۲) رفتار $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$ سمت وف کے علی القوائم۔

اِس لیے رفتار

$$\text{و}^{۲} = \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \text{ر}^{۲}\left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^{۲}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

و کے گرد رفتار کا معیار دوسرے جزو ترکیبی کے معیار کے مساوی ہے کیونکہ پہلے جزو ترکیبی کا معیار معدوم ہوتا ہے۔ اس لئے و کے گرد رفتار کا معیار $\text{ر} \times \text{ر} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$ ہے اور چونکہ اِس کی قیمت مستقل ہے (فرض کرو ھ) اِس لیے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ر}^{۲} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}} = \text{ھ} \qquad (۱۰۹)$$

(۲۷۶) اگر ذرہ کی کمیت ک ہو اور اگر فی اکائی کمیت کشش ف (ر) ہو جبکہ ذرہ و سے فاصلہ ر پر ہے تو ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$\text{ک} \int_{\infty}^{\text{ر}} \text{ف (ر) فر ر}$$

ہے اور توانائی بالحرکت $\frac{۱}{۲}$ ک $\text{و}^{۲}$ یا

$$\frac{۱}{۲}\text{ک}\left[\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \text{ر}^{۲}\left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^{۲}\right]$$

ہے۔ اب چونکہ مجموعی توانائی مستقل ہوتی ہے اس لیے

$$\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^2 + \text{ر}^2 \left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^2 + 2 \int \text{ف (ر) فر ر} = \text{ع} \qquad (110)$$

جہاں ع مستقل ہے۔

مساواتوں (۱۰۹) اور (۱۱۰) سے مدار کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ ر اور طہ دونوں ت کے تفاعل ہیں اس لیے

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} \cdot \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$$

اور اس لیے مساوات (۱۱۰) کو شکل

$$\left[\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^2 + \text{ر}^2\right] \left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^2 + 2 \int \text{ف (ر) فر ر} = \text{ع}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ اور پھر اس مساوات اور (۱۰۹) سے $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$ کو ساقط کرنے سے مدار کی تفرقی مساوات

$$\left[\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^2 + \text{ر}^2\right] \frac{\text{ص}^2}{\text{ر}^4} + 2 \int \text{ف (ر) فر ر} = \text{ع} \qquad (111)$$

حاصل ہوتی ہے۔

معکوس مربع کا قانون

۲۲۲۔ اب فرض کرو کہ کشش، فاصلے کے معکوس مربع کے قانون کے تابع ہے اور اس لیے

$$\text{ف (ر)} = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}$$

جہاں مہ مستقل ہے۔ تب

$$\int \text{ف (ر) فر ر} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ر}} \qquad (112)$$

(۲۷۷) اور مساوات (۱۱۱) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{ھ}^2}{\text{ر}^4}\left[\left(\frac{\text{فر}}{\text{فط}}\right)^2+\text{ر}^2\right]-\frac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}}=\text{ع}$$

اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فط}=\frac{\text{ھ}\ \text{فر}}{\text{ر}\sqrt{\text{ع}\,\text{ر}^2+2\,\text{مہ}\,\text{ر}-\text{ھ}^2}}$$

اور تکمل کرنے سے

$$\text{ط}=\text{جب}^{-1}\frac{\frac{\text{ھ}}{\text{ر}}-\frac{\text{مہ}}{\text{ھ}}}{\sqrt{\text{ع}+\frac{\text{مہ}^2}{\text{ھ}^2}}}+\text{صہ}$$

جہاں صہ تکمل کا مستقل ہے۔
مختصر کرنے پر

$$\frac{\text{ھ}}{\text{ر}}-\frac{\text{مہ}}{\text{ھ}}=\sqrt{\text{ع}+\frac{\text{مہ}^2}{\text{ھ}^2}}\ \text{جب}(\text{ط}-\text{صہ}) \qquad (۱۱۳)$$

اور اگر ہم مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}}-1=\text{ز}\ \text{جم}\ \text{ط}$$

کے ساتھ اس کا مقابلہ کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۱۱۳) ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ مبداء ہے اور وتر خاص $\text{ل}=\frac{\text{ھ}^2}{\text{مہ}}$ اور خروج المرکز $\text{ز}=\sqrt{1+\frac{\text{ع}\,\text{ھ}^2}{\text{مہ}^2}}$ خط ط = ۰ کو مخروطی کے محور اعظم پر منطبق کرنے کے لیے صہ کی قیمت کو $-\frac{\text{ط}}{2}$ کے مساوی رکھنا چاہئے۔

۲۲۴ — ہم دیکھتے ہیں کہ اگر

ع مثبت ہو تو ز > ۱ اور مدار قطع زائد ہے،
ع صفر ہو تو ز = ۱ اور مدار قطع مکافی ہے،
ع منفی ہو تو ز < ۱ اور مدار قطع ناقص ہے۔

اس لئے مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف ع کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے
ھ کی قیمت پر منحصر نہیں ہوتی ۔ یہ معلوم رہے کہ اگر وہ نقطہ معلوم ہو جس سے
پھینکا گیا ہے اور نیز پھینکتے وقت ذرہ کی رفتار بھی معلوم ہو تو ع کی قیمت
بن ہو جاتی ہے کیونکہ مساوات (۱۱۰) کی رو سے

$$ع = و^2 - \frac{۲ مہ}{ر}$$

(۲۷۸) پس مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف پھینکنے کی رفتار پر منحصر ہوتی ہے
مت پر منحصر نہیں ہوتی، مخروطی ایک قطع زائد، قطع مکافی، یا قطع ناقص
بموجب اس کے کہ

$$و^2 > = یا < \frac{۲ مہ}{ر}$$

اصلی خروج المرکز، ع اور ھ دونوں پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ اگر
خروج المرکز ہو تو

$$ز^2 = ۱ + \frac{ع ھ^2}{مہ^2}$$

۲۱ — اگر ذرہ کو ایک دائرہ مرتسم کرنا ہے تو حاصل ہونا چاہئے
= ۰ اور اس لئے

$$۱ + \frac{ع ھ^2}{مہ^2} = ۰$$

ع = $و^2 - \frac{۲ مہ}{ر}$ اور ھ = ف و رکھنے سے (اس لئے ف
عمود ہے جو قوت ر کے مرکز سے پھینکنے کی سمت پر کھینچا گیا ہے)
وات بالا

$$\frac{مہ^{2}}{ف^{2}} - \frac{2\,مہ}{ر}\,و^{2} + و^{4} = 0$$

یا $$\left(و^{2} - \frac{مہ}{ر}\right)^{2} + مہ^{2}\left(\frac{1}{ف^{2}} - \frac{1}{ر^{2}}\right) = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

چونکہ ف، ر سے بڑا نہیں ہو سکتا اِس لیے اِن دو رقموں میں سے کوئی منفی نہیں ہو سکتی۔ اِس لیے اِس مساوات کے پورا ہونے کے لیے دونوں رقمیں معدوم ہونی چاہئیں اور حاصل ہونا چاہیے

$$ف = ر \quad \text{اور} \quad و^{2} = \frac{مہ}{ر}$$

پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ ذرہ کو پھینکنے کی سمت اُس خط کے علی القوائم ہونی چاہیے جو ذرہ کو قوت کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دوسری مساوات جس کو شکل

$$\frac{و^{2}}{ر} = \frac{مہ}{ر^{2}}$$

میں لکھا جا سکتا ہے اِس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ تجاذبی قوت کو عین اتنا اسراع پیدا کرنا چاہیے جو نصف قطر ر کے ایک دائرہ میں حرکت کے لیے مناسب ہے۔

۲۲۵ — ناقصی مدار کے لیے مدت دَوران وہ ہے جو رقبہ π ا ب مرتسم کرنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے جہاں ا، ب، ناقص کے نیم محور ہیں۔ چونکہ رقبہ بشرح $\frac{1}{2}$ ھ فی اکائی وقت سے مرتسم ہوتا ہے اِس لیے مدت دَوران ت، (۲۷۹)

$$ت = \frac{\pi\,ا\,ب}{\frac{1}{2}\,ھ}$$

ہوگی لیکن نیم وترِ خاص $ل = \frac{ب^{2}}{ا}$ اور نیز $= \frac{ھ^{2}}{مہ}$، اِس لیے

$$ب = \sqrt{ا\,ل} = ھ\sqrt{\frac{ا}{مہ}}$$

اِس لیے $$ت = \frac{۲\pi\, ا\, ب}{ھ} = \frac{۲\pi\, ا^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{مہ}} \qquad (۱۱۴)$$

چونکہ ت، خروج المرکز پر منحصر نہیں ہے اِس لیے یہ ظاہر ہے کہ کسی مدار کی مدت دَوران وہی ہے جو اُس دائری مدار کی ہے جس کا نصف قطر نیم محور اعظم کے مساوی ہو۔

۲۲۶ — معکوس مربع کا قانون تجاذب کا قانون ہے، اِس لیے وہ قانون جس کی تحقیق میں ہم مصروف تھے وہ ہے جس کے تحت سورج کے گرد سیارے اپنے مداروں میں اور نیز شہاب اور دمدار ستارے حرکت کرتے ہیں۔ ان اسباب کی تشریح یہاں نہیں کی جا سکتی جن کی بنا پر سیاروں سے مرتسم شدہ مخروطی سب کے سب چھوٹے خروج المرکز کے قطعات ناقص ہیں۔ دُمدار ستاروں کے مداروں میں زیادہ وسعت پائی جاتی ہے۔ یہ اجرام بالعموم نظام شمسی کے باہر بہت دُور سے آتے ہیں۔ تقریبی طور پر ہم سمجھ سکتے ہیں کہ وہ لاتناہی سے چلے آرہے ہیں اور انہوں نے نسبتاً چھوٹی رفتار سے حرکت کی ابتدا کی ہے۔ اِس صورت میں مدار تقریباً مکافی ہوتا ہے۔

کپلر کے قوانین

۲۲۷ — سیاروں کے مداروں کے نظریہ کے انکشاف سے بہت پہلے جس کو نیوٹن نے باقاعدہ محسوب کیا تھا، کپلر نے وہ تین خاص قوانین تجربی طور پر معلوم کئے تھے جن کے تحت سیاروں کی حرکتیں جاری ہیں۔ کپلر کے یہ تین قوانین حسب ذیل ہیں:

قانون (۱) — ہر سیارہ ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے

جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہوتا ہے۔

قانون (۲) ۔ وہ رقبے جو سیارہ اور سورج کو ملانے والا (۲۸۰)
نصف قطر سیارہ کے مدار میں مرتسم کرتا ہے اُن وقتوں کے متناسب ہوتے ہیں جن میں یہ رقبے مرتسم ہوتے ہیں۔

قانون (۳) ۔ اِن مختلف مداروں کے دَوری مدتوں کے مربع اِن کے محاورِ اعظم کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

اِن میں سے پہلے قانون سے نیوٹن نے ثابت کیا کہ سیاروں اور سورج کے درمیان قوت کا قانون معکوس مُربع کا قانون ہونا چاہیئے۔ تیسرے قانون سے اُسی واقعہ کا اظہار ہوتا ہے جس کو مساوات (۱۱۴) بیان کرتی ہے۔

دو ذرّوں کی حرکت ایک دوسرے کے گرد

۲۲۸ ۔ اجرام کا وہ زوج جس کو دُوہرا تارہ کہتے ہیں آسمان میں عام طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ یہ تارہ دو ستاروں پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک دوسرے کے گرد مدار مرتسم کرتے ہیں اور اِن میں سے کوئی ثابت نہیں ہوتا۔

نویں باب میں ثابت شدہ مسئلوں سے اِن دو ستاروں کا مرکز ثقل یا تو ساکن رہنا چاہیئے یا ایکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرنا چاہیئے اور اِس صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اِس کو ثابت سمجھا جا سکتا ہے اگر تمام حرکت کو ایک ایسے حوالے کے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا جائے جو اِس نقطہ کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر اِن دو ستاروں کے محل ا، ب ہیں اور فرض کرو کہ اِن کا مرکز ثقل ث ہے۔ فرض کرو کہ ستاروں کی کمیتیں ک، کَ ہیں

اور فرض کرو کہ ث سے اِن کے فاصلے ا، ب ہیں۔ اب

$$\frac{ک}{ب} = \frac{کَ}{ا} = \frac{ک + کَ}{ا + ب} \qquad (115)$$

تجاذب کا پورا قانون، قانون

$$ف = جہ \frac{ک\,کَ}{ر^2}$$

میں بیان ہو جاتا ہے جہاں ک، کَ کمیتیں ہیں اور اِن کے درمیان فاصلہ ر ہے اور جہ ایک مستقل ہے جس کی قیمت تجربہ سے معلوم کی جا سکتی ہے اور اِن دو کمیتوں کے درمیان تجاذبی قوت ف ہے۔ پس ستارہ ب پر عمل کرنے والی قوت

$$ف = جہ \frac{ک\,کَ}{(ا + ب)^2}$$

(۲۸۱) ہے اور اس کی سمت ب ا ہے۔ اِس قوت کے متعلق ہمیشہ یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ ثابت نقطہ ث سے عمل کر رہی ہے کیونکہ اس کا خطِ عمل ہمیشہ ب ث رہتا ہے۔ نیز اِس قوت کی مقدار، ستارہ ب کی فی اکائی کمیت پر

$$\frac{جہ\,ک}{(ا + ب)^2}$$

ہے یا رشتوں (۱۱۵) کی مدد سے

$$\frac{جہ\,ک^3}{(ک + کَ)^2\,ب^2}$$

ہے۔ یہ ایک قوت $\frac{مہ}{ر^2}$ ہے جو ث کی جانب عمل کرتی ہے اگر ہم رکھیں

$$مہ = \frac{جہ\,ک^3}{(ک + کَ)^2}$$

پس اِن دو ستاروں میں سے ہر ایک، مشترک مرکز ثقل ث کے گرد ایک مخروطی مرتسم کرتا ہے ۔ اِن مخروطیوں کے مداروں کی مدت دوراں ت اور خا و را اعظم کی قیمتوں کا ہیئتی طور پر مشاہدہ کرنا ممکن ہے ۔ اِن مقداروں سے ہم مہ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے

$$\frac{ک^{۳}}{(ک + کَ)^{۲}} \quad ، \quad \frac{کَ^{۳}}{(ک + کَ)^{۲}}$$

کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں اور پھر اِن سے ک، کَ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ۔ اِس طریقہ پر بعض ستاروں کی کمیتیں معلوم کرنا ممکن ہے ۔

مثالیں

(تجاذبی مستقل جہ کو سنتی میتر گرام ثانیہ اکائیوں میں $۶٫۶۶ \times ۱۰^{-۹}$ کے مساوی لو)

۱ ۔ اگر زمین جذب کرے گویا کہ اِس کی کمیت اِس کے مرکز پر مرتکز ہے اور اگر خطِ اِستوا پر حس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے $۶٫۳۷۸ \times ۱۰^{۸}$ سنتی میتر ہے ج کی قیمت ۹۷۸٫۱ سنتی میتر فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو زمین کی کمیت معلوم کرو ۔

۲ ۔ زمین اور چاند کی کمیتوں کو علی الترتیب $۶٫۱۴ \times ۱۰^{۲۷}$ اور $۷٫۹۴ \times ۱۰^{۲۵}$ گرام لیکر اور اِن کے درمیان فاصلہ $۳٫۸۴ \times ۱۰^{۱۰}$ تسلیم کر کے چاند کی مدت دوران معلوم کرو ۔

۳ ۔ سورج کی کمیت کو ۲×۱۰^{۳۳} گرام اور سال کو ۳۶۵٫۲۴ یوم لیکر زمین کے مدار کا نیم محور اعظم معلوم کرو جبکہ سورج کو قوت کا ثابت مرکز سمجھا گیا ہو ۔

۴ ۔ اگر سورج کی کمیت زمین کی کمیت کا ۳۲۴۰۰۰ گنا ہو تو معلوم کرو کہ سوال (۳) کے نتیجہ کو کس قدر تبدیل کرنا چاہیئے جبکہ سورج کی حرکت کا بھی لحاظ رکھا جائے ۔

۵ ۔ مشتری کی کمیت کو سورج کی کمیت کا $\frac{۱}{۱۰۸۰}$ اور سورج سے اِس کے بڑے سے بڑے فاصلہ کو ۴۹۸۵۰۰۰۰۰ میل لیکر ثابت کرو کہ مشتری کی کشش کی (۲۸۲)

وجہ سے سورج ایک قطع ناقص مرتسم کرے گا جس کا نیم محور اعظم تقریباً ۴۶۱۰۰۰ میل کے مساوی ہوگا۔ نیز مشتری کے سال کا طول معلوم کرو۔

۶۔ وہ اعظم رفتار جو زمین اپنے مدار میں حاصل کرتی ہے ۳۰۰۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے اور اس کی اقل رفتار ۲۹۲۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے۔ زمین کے مدار کا خروج المرکز معلوم کرو۔

عام مثالیں

۱۔ ایک ذرہ جس کو ڈوری کے ذریعہ ایک نقطہ سے باندھ دیا گیا ہے ایک انتصابی دائرے میں مکمل گردشیں کرنے کے لیے عین توانائی رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ صفر ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر ہوگا لیکن ذرہ کے وزن کا چھ گنا ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے زیر ترین نقطہ پر ہوگا۔

۲۔ ایک ذرہ ایک چکنی دائری قوس کے محدب رُخ پر نیچے پھسلتے ہوئے جاذبہ کے تحت ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرتا ہے۔ اگر اس کی رفتار وہ ہو جو مرکز کے اوپر ارتفاع ف کی وجہ سے ہو سکتی ہے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ سے اُڑ کر نکل جائے گا جبکہ اُس کا ارتفاع مرکز کے اوپر $\frac{۲}{۳}$ ف ہو جائے۔

۳۔ اگر زاویہ عہ جس میں سے ایک سادہ رقاص انتصابی کی ہر ایک جانب جھولتا ہے چھوٹا ہو مگر صغیر نہ ہو تو ثابت کرو کہ پہلے تقرب تک اہتزاز کا وقت

$$۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}} \left(۱ + \frac{۱}{۱۶} عہ^{۲}\right)$$

ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ وہ رقاص جو ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے جبکہ وہ صغیر اہتزاز کر رہا ہو تقریباً ۴۰ ثانیہ فی یوم سست ہو جائے گا اگر اس کو ایک گھڑی میں لگا دیا جائے جو اس کو انتصابی کی ہر ایک جانب °۵ اہتزاز کرنے پر مجبور کرے۔

۴۔ ایک ٹرین ایک منحنی کے گرد ۶۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے

حرکت کر رہی ہے، اور اس کے ایک ڈبے میں ثانیوں کا ایک رقاص دو دقیقوں میں ۱۲۱ دفعہ ضربوں کا اظہار کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کا نصف قطر تقریباً ایک چوتھائی میل ہے۔

۵۔ ایک لچکدار ڈوری کا طبعی طول ا اور لچک کا مقیاس لہ ہے۔ اس کے ایک سرے کو چکنے اُفقی میز کے ایک ثابت نقطہ سے باندھا گیا ہے اور اس کا دوسرا سرا کمیت ک کے ایک ذرہ سے بندھا ہے جو میز پر ساکن پڑا ہے۔ اگر ڈوری کے دوسرے سرے سے اس کمیت کو فاصلہ ۲ ا تک کھینچکر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ ذرہ اپنے ابتدائی محل پر باقاعدہ وقفوں $۲(\pi+۲)\sqrt{\frac{اک}{لہ}}$ کے بعد واپس ہوتا جائے گا۔

۶۔ دو گولے جن کے وزن $و_1$ اور $و_2$ ہیں ایک تاگے سے جس کا طول ا ہے مربوط ہیں۔ $و_1$ کو ہاتھ میں پکڑ کر $و_2$ کو گول گھمایا گیا ہے۔ اگر $و_1$ کو اس وقت چھوڑ دیا جائے جبکہ $و_2$ ارتفاع عہ پر رفتار ط سے حرکت کر رہا ہو تو ظہور پذیر حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ہوا میں تاگے کا تناؤ (۲۸۳)

$$\frac{و_1 و_2}{و_1+و_2}\,\frac{ط^2}{ج\,ا}\ \text{پونڈ}$$

ہے۔

۷۔ دو کمیتیں $ک_1$ اور $ک_2$ ایک بے وزن کمانی سے مربوط ہیں جس کی طاقت ایسی ہے کہ جب $ک_1$ کو مضبوط پکڑا جاتا ہے تو $ک_2$، ن ارتعاش فی ثانیہ کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $ک_2$ کو مضبوط پکڑ لیا جائے تو $ک_1$، $ن\sqrt{\frac{ک_2}{ک_1}}$ ارتعاش فی ثانیہ کرے گا اور جب دونوں کمیتیں آزاد ہوں تو وہ $ن\sqrt{\frac{ک_1+ک_2}{ک}}$ ارتعاش فی ثانیہ کرینگی۔ ہر صورت میں ارتعاش کمانی کے خط میں واقع ہوتے ہیں۔

۸۔ کمیت ک کا ایک ذرہ کسی شکل کی ایک چکنی منحنی نلی میں حرکت کرکے دو لچکدار ڈوریوں کے تناؤں کے تحت جو نلی میں ہیں توازن میں ہے، ان ڈوریوں کے

طبعی طول ل، لَ اور لچک کے مقیاس لہ، لہَ ہیں اور ان کے دوسرے سرے نلی کے ثابت نقطوں سے بندھے ہوئے ہیں۔ اگر ذرہ نلی میں اہتزاز کرے چھوٹے یا بڑے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت

$$۲\pi \sqrt{\frac{ک}{\frac{لہ}{ل} + \frac{لہَ}{لَ}}}$$

ہے۔

۹ — ایک ڈوری ایک چکنے افقی میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتی ہے اور اس کے سروں سے مساوی ذرے بندھے ہوئے ہیں جن میں سے ایک انتصاباً لٹک رہا ہے اور دوسرا میز پر سوراخ سے فاصلہ ا پر پڑا ہے۔ اس دوسرے ذرہ کو ڈوری کے عمود وار رفتار $\sqrt{ج ا}$ کے ساتھ اچھالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لٹکتا ہوا ذرہ ساکن رہے گا اور یہ کہ اگر اس حالت سکون میں خفیف طور پر خلل پڑے تو چھوٹے اہتزاز کی مدت $۲\pi \sqrt{\frac{۲ا}{۳ج}}$ ہوگی۔

۱۰ — ایک ذرہ نصف قطر ا کی ایک دائری نالی میں ایک کشش $\frac{م}{ر^۲}$ کے تحت جو نقطہ ف کی جانب ہے حرکت کرتا ہے، نقطہ ف دائرہ کے مستوی میں ہے اور اس کے مرکز سے فاصلہ ب پر ہے۔ ذرہ کو رفتار و کے ساتھ دائرہ کے اُس نقطہ سے پھینکا گیا ہے جو ف سے قریب ترین ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ مکمل گردشیں کرے گا اگر $و^۲$، $\frac{۴مب}{ا^۲ - ب^۲}$ سے کم نہ ہو۔

۱۱ — ایک چکنے قطع ناقص کے نیم محور ا اور ب ہیں، اس کو اس طور پر رکھا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصابی ہے۔ ایک ذرہ کو ناقص کی قوس کے مقعر رُخ پر ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو مرکز کے اوپر ارتفاع ف کی باعث پیدا ہو سکتی ہے۔ وہ نقطہ معلوم کرو جس پر ذرہ قوس کو چھوڑ دے گا اور نیز ثابت کرو کہ وہ ناقص کے مرکز میں سے گذرے گا اگر

$$ف = \frac{۸ ا^۲ + ب^۲}{۶ ا \sqrt{۳}}$$

۱۲۔ ایک ذرہ نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں کشش مہ ر فی اکائی کمیت کے تحت حرکت کرنے کے لیے مقید ہے، کشش دائرہ کے اندر ایک نقطہ کی جانب ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے۔ اگر ذرہ کو اس نقطہ سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر رکھکر صغیر رفتار سے متحرک کیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ کے دوسرے ربع پر سے وقت (۲۸۴)

$$\sqrt{\frac{ا}{مہ ف}} \text{ لوک } (\sqrt{۲} + ۱)$$

میں گذر جائے گا۔

۱۳۔ ایک ذرہ ایک ناقص کو قوت کے ایک مرکز کے گرد جو ماسکہ پر ہے مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ محور اصغر کے سرے پر کی رفتار کسی قطر کے سروں پر کی رفتاروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۱۴۔ ایک مُدار تارہ ایک قطع مکافی کو مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسکی رفتار جو اس کے مدار کے محور پر عمود ہے سورج سے سمتی نیم قطر کے بالعکس متناسب ہے۔

۱۵۔ کمیت ک کا ایک مُدار تارہ جو سورج کے گرد ایک قطع مکافی مرتسم کر رہا ہے مساوی کمیت ک کے ایک ساکن ذرہ سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں کمیتیں باہم حرکت کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مرکز ثقل سورج کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرے گا جس کا مرکز سورج ہوگا۔

۱۶۔ یہ مان کر کہ ایک مرمی جاذبہ کے تغیرات کی رعایت رکھنے کے بعد زمین کے مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا ایک ماسکہ زمین کے مرکز پر ہے ثابت کرو کہ نقطہ رمید گی میں سے گذرنے والے ایک افقی مستوی پر معلومہ رفتار د کے لیے بڑے سے بڑا ٹپہ

$$\frac{۴ ج د^۲ ر^۲}{۴ ج^۲ ر^۲ - د^۴}$$

ہے جہاں س زمین کے مرکز سے نقطہ میدگی کا فاصلہ ہے۔

۱۷۔ جب زمین اپنے مدار کے محور اعظم کے سرے پر پہنچتی ہے تو ایک چھوٹا شہاب جس کی کمیت سورج کی کمیت کا م واں حصہ ہے اچانک سورج میں گرتا ہے۔ ثابت کرو کہ سال کا طول بقدر اپنے پہلے طول کے $\frac{1}{۲م}$ ویں حصے کے گھٹ جائے گا۔

۱۸۔ ایک سیارہ ث پر جو سورج س کے گرد حرکت کر رہا ہے ایک چھوٹا شہاب گرتا ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار بقدر اپنی پہلی رفتار کے $\frac{1}{ن}$ ویں حصہ کے گھٹ جاتی ہے اگرچہ اس کی سمت نہیں بدلتی۔ ن کو چھوٹا سمجھ کر ثابت کرو کہ سیارہ کے مدار کا خروج المرکز بقدر ۲ ن (ز + جم ط) کے گھٹ جائے گا جہاں ط وہ زاویہ ہے جو س ث اور مدار کے محور اعظم کے درمیان ہے۔

نیز ثابت کرو کہ نیا محور اعظم پرانے محوروں کے ساتھ زاویہ $\frac{\text{۲ن جب ط}}{\text{ز}}$ بنائیگا۔

۱۹۔ ایک ذرہ ماسکے کے گرد ایک قطع ناقص کو مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ بڑی سے بڑی اور کم سے کم زاوئی رفتاریں محور اعظم کے سروں پر واقع ہوتی ہیں اور نیز یہ کہ اگر یہ زاوئی رفتاریں عہ اور بہ ہوں تو اوسط زاوئی رفتار

$$\frac{۲(\text{عہ بہ})^{\frac{۳}{۴}}}{\sqrt{\text{عہ}} + \sqrt{\text{بہ}}}$$

ہے۔

(۲۸۴) ۲۰۔ ایک دُمدار تارہ ایک قطع مکافی کو سورج کے گرد مرتسم کرتا ہے اور اس کا سورج سے قریب ترین فاصلہ زمین کے مدار کے نصف قطر کا ایک ثلث ہے جہاں زمین کے مدار کو دائری فرض کیا گیا ہے۔ زمین کے مدار کے اندر کتنے دنوں تک دُمدار تارہ رہے گا؟

۲۱۔ اگر ایک ذرہ پر کشش ایسی بدلے جیسے قوت کے مرکز و سے فاصلے کے مربع کے بالعکس تو ثابت کرو کہ دو سمتیں ہیں جن میں کسی ذرہ کو ایک دئے ہوئے نقطہ ف سے اس طور پر پھینکا جا سکتا ہے کہ اس کے مدار کا محور اعظم معلومہ

محورِ اعظم ہو۔ اگر و ف = ج اور اگر عہ، عہ وہ زاوئے ہوں جو پھینکنے کی سمتیں و ف کے ساتھ بناتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$م\ عہ_1\ م\ عہ_2 = \frac{ج}{ا} - 1$$

جہاں ا نیم محورِ اعظم ہے۔

۲۲۔ ایک ذرہ کو ایک نقطہ ف سے ایک قوت کے تحت جو ایک ثابت نقطہ س کی جانب ہے جس کا فاصلہ ف سے ر ہے اس طور پر پھینکا گیا ہے کہ ذرہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جو س میں سے گذرتا ہے۔ ابتدائی رفتار و ہے اور رفتار کا معیار س کے گرد ہ ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ وقت

$$\frac{ر^2}{۴ ہ^3}\left(\pi\ و^2 ر^2 \pm ۴ ہ \sqrt{و^2 ر^2 - ہ^2}\right)$$

میں ایک نیم دائرہ مرتسم کرے گا۔

۲۳۔ کمیت ک کا ایک کندہ جس کے بالائی اور زیریں رُخ چکنے افقی مستوی ہیں متوازی مستوی میں ایک نالی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور کمیت ک کا ایک ذرہ اِس کے بالائی رُخ میں ایک ثابت نقطہ پر ایک لچکدار ڈوری سے بندھا ہوا ہے جس کا طبعی طول ا اور مقیاس لہ ہے۔ اگر یہ نظام سکون سے حرکت میں آئے جبکہ ذرہ اِس کے بالائی رُخ پر ہو اور ڈوری نالی کے متوازی اپنے طبعی طول کا ا + ن گنا تنی ہوئی ہو تو ثابت کرو کہ کندہ حیطہ

$$\frac{(ن + ا)\ ا\ ک}{ک + ک}$$

اور دَور

$$۲\left(\pi + \frac{۲}{ن}\right)\sqrt{\frac{ا\ ک\ ک}{لہ\ (ک + ک)}}$$

کے اہتزاز کرے گا۔

(۲۸۶)

گیارھواں باب

اُستوار اجسام کی حرکت

۲۲۹ — اس باب میں اُستوار اجسام کی حرکت سے بحث کی جائے گی جبکہ حرکت ایسی ہو کہ اجسام ذرے متصور نہ ہو سکیں۔

دفعہ ۶۶ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ اُستوار اجسام کی عام سے عام ممکن حرکت حرکت انتقال اور گردشی حرکت سے مرکب ہوتی ہے۔ کسی قسم کی قوتوں کے زیر عمل کسی اُستوار جسم کی عام حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر گردشی حرکت کے خواص کا پہلے سے زیادہ تفصیل کے ساتھ امتحان کرنا مناسب ہوگا۔

زاویُ رفتار

۲۳۰ — ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۶۶) کہ کسی اُستوار جسم کی ہر حرکت کے لئے جس میں ایک نقطہ ف ثابت رہے گردش کا ایک محور رہتا ہے جو ف میں سے گذرنے والا ایک خط ہے جس کا ہر نقطہ ثابت رہتا ہے۔ اگر اُستوار جسم مسلسل حرکت کر رہا ہو تو ہم اس کی حرکت کی تحلیل حسب ذیل طریقہ پر کر سکتے ہیں۔ ہم اُستوار جسم کا ایک معیّن نقطہ ف منتخب کرتے ہیں اور حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیتے ہیں جس میں

نقطہ ف مبدا ہوتا ہے اور جو (فریم) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ہمیشہ اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتا ہے۔ اس فریم کے لحاظ سے کسی دو لمحات کے درمیان جسم کی حرکت ف کے گرد گردشی حرکت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ وقفہ فرت کی اثنا میں جسم کی گردش، گردش کے محور ف ق کے گرد زاویہ فرطہ ہے۔ تب شرح $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کی انتہا کو جبکہ فرت (۲۸۷)

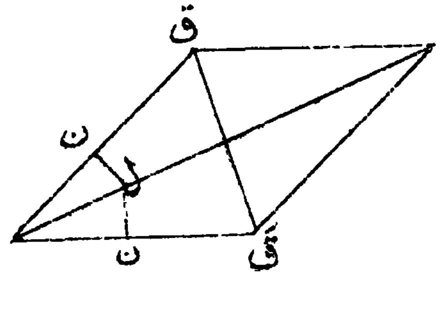
لا انتہا چھوٹا بنا دیا گیا ہو جسم کی زاویٔ رفتار کہتے ہیں۔ اس زاویٔ رفتار سے اس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم فی اکائی وقت گھومتا ہے۔ اس لیے کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم کی حرکت کا پورا علم حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل امور معلوم ہونے چاہئیں:

(ا) حوالے کے فریم کے لیے منتخب شدہ نقطہ ف کی رفتار کی سمت اور مقدار،

(ب) ف میں سے گذرنے والے گردش کے محور کی سمت،

(ج) گردش کے محور کے گرد زاویٔ رفتار کی مقدار۔

۲۳۱ — زاویٔ رفتار کے ساتھ دو چیزیں وابستہ ہوتی ہیں: سمت — گردش کا محور — اور مقدار۔ اس لیے اس کو ایک خط سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ وہ ایک سمتی ہے یعنی یہ کہ زاویٔ رفتاروں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔



شکل (۱۳۶)

فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم ف کے گرد گردش کرتا ہے جو (ا) ایک محور ف ق کے گرد زاویٔ رفتار سہ کی

ایک گردش اور (ب) ایک دوسرے محور ف قَ کے گرد زاویٰی رفتار سَہ کی ایک گردش سے مرکب ہے۔ فرض کرو کہ طول ف ق اور ف قَ، سہ اور سَہ کے متناسب لیے گئے ہیں اور اس لیے خطوط ف ق اور ف قَ اُسی پیمانہ پر زاویٰی رفتاروں کی سمتوں اور مقداروں کو تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع ف ق ر قَ کی تکمیل کی گئی ہے اور فرض کرو کہ اس کے وتر ف ر پر کوئی نقطہ ل ہے۔ فرض کرو کہ ف ق اور ف قَ پر ل سے عمود ل ن اور ل نَ کھینچے گئے ہیں پہلی زاویٰی رفتار کی وجہ سے اُستوار جسم وقت فرت میں ف ق کے گرد زاویہ سہ فرت میں سے گھومتا ہے۔ اس گردش کا اثر یہ ہوگا کہ جسم کا وہ ذرہ جو ابتداً ل پر منطبق تھا مُستوی ف ل ن کے علی القوائم فاصلہ ل ن × سہ فرت میں سے حرکت کرے گا۔ اسی طرح ف قَ کے گرد گردش کا یہ اثر ہوگا کہ وہی ذرہ مستوی کے علی القوائم فاصلہ ل نَ × سَہ × فرت میں سے حرکت کرے گا لیکن اُس سمت میں جو پہلی حرکت کی (۲۰۸)
سمت کے مخالف ہے۔ اس لیے ذرہ کا کُل ہٹاؤ

ل ن سہ فرت ـ ل نَ سَہ فرت (۱۱۶)

ہے۔

اب چونکہ ل، متوازی الاضلاع کے وتر پر ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ف ل ق کا رقبہ، مثلث ف ل قَ کے رقبہ کے مساوی ہے اور اس لیے

ل ن × ف ق = ل نَ × ف قَ

نیز چونکہ ف ق : ف قَ = سہ : سَہ اس لیے یہ مساوات شکل

ل ن × سہ = ل نَ × سَہ

میں لکھی جا سکتی ہے اور اس کا مقابلہ مساوات (۱۱۶) کے ساتھ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ ل کا ہٹاؤ معدوم ہوتا ہے۔

نقطہ ف مبدا ہوتا ہے اور جو (فریم) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ہمیشہ اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتا ہے۔ اس فریم کے لحاظ سے کسی دو لمحات کے درمیان جسم کی حرکت، ف کے گرد گردشی حرکت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ وقفہ فرت کی اثناء میں جسم کی گردش، گردش کے محور

ف ق کے گرد زاویہ فرطہ ہے۔ تب شرح $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کی انتہا کو جبکہ فرت (۲۸۷)

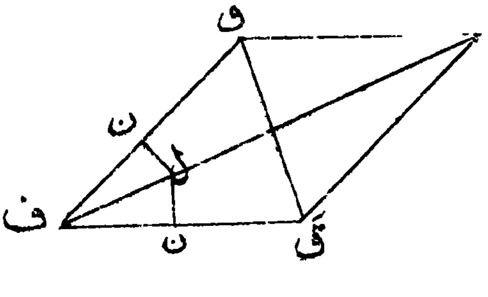
لا انتہا چھوٹا بنا دیا گیا ہو جسم کی زاویائی رفتار کہتے ہیں ۔ اس زاویائی رفتار سے اُس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم فی اکائی وقت گھومتا ہے اس لیے کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم کی حرکت کا پورا علم حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل اُمور معلوم ہونے چاہئیں :

(ا) حوالے کے فریم کے لیے منتخب شدہ نقطہ ف کی رفتار کی سمت اور مقدار،

(ب) ف میں سے گذرنے والے گردش کے محور کی سمت،

(ج) گردش کے محور کے گرد زاویائی رفتار کی مقدار۔

۲۳۱ ۔ زاویائی رفتار کے ساتھ دو چیزیں وابستہ ہوتی ہیں : سمت ۔ گردش کا محور ۔ اور مقدار ۔ اس لیے اس کو ایک خط سے تعبیر کیا جا سکتا ہے ۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ وہ ایک سمتی ہے یعنے یہ کہ زاویائی رفتاروں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم ف کے گرد گردش کرتا ہے جو (ا) ایک محور ف ق کے گرد زاویائی رفتار سہ کی



شکل (۱۳۶)

ایک گردش اور (ب) ایک دوسرے محور ف قَ کے گرد زاوی رفتار سَہ کی ایک گردش سے مرکب ہے۔ فرض کرو کہ طول ف ق اور ف قَ، سہ اور سَہ کے متناسب لیے گئے ہیں اور اس لیے خطوط ف ق اور ف قَ اُسی پیمانہ پر زاوی رفتاروں کی سمتوں اور مقداروں کو تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع ف ق ر قَ کی تکمیل کی گئی ہے اور فرض کرو کہ اس کے وتر ف ر پر کوئی نقطہ ل ہے۔ فرض کرو کہ ف ق اور ف قَ پر ل سے عمود ل ن اور ل نَ کھینچے گئے ہیں پہلی زاوی رفتار کی وجہ سے اُستوار جسم وقت فرت میں ف ق کے گرد زاویہ سہ فرت میں سے گھومتا ہے۔ اس گردش کا اثر یہ ہوگا کہ جسم کا وہ ذرہ جو ابتداً ل پر منطبق تھا مستوی ف ل ن کے علی القوائم فاصلہ ل ن × سہ فرت میں سے حرکت کرے گا۔ اسی طرح ف قَ کے گرد گردش کا یہ اثر ہوگا کہ وہی ذرہ مستوی کے علی القوائم فاصلہ ل نَ × سَہ (۲۰۰)
× فرت میں سے حرکت کرے گا لیکن اُس سمت میں جو پہلی حرکت کی سمت کے مخالف ہے۔ اس لیے ذرہ کا کل ہٹاؤ

$$\text{ل ن سہ فرت} - \text{ل نَ سَہ فرت} \qquad (۱۱۶)$$

ہے۔

اب چونکہ ل، متوازی الاضلاع کے وتر پر ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ف ل ق کا رقبہ مثلث ف ل قَ کے رقبہ کے مساوی ہے اور اس لیے

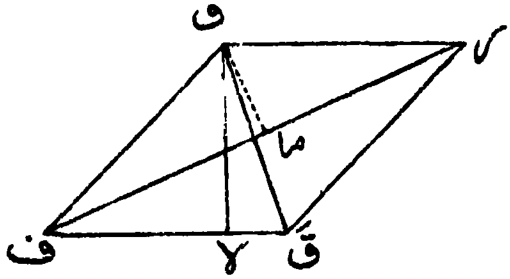
$$\text{ل ن} \times \text{ف ق} = \text{ل نَ} \times \text{ف قَ}$$

نیز چونکہ ف ق : ف قَ = سہ : سَہ اس لیے یہ مساوات شکل

$$\text{ل ن} \times \text{سہ} = \text{ل نَ} \times \text{سَہ}$$

میں لکھی جا سکتی ہے اور اس کا مقابلہ مساوات (۱۱۶) کے ساتھ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ ل کا ہٹاؤ معدوم ہوتا ہے۔

اس لیے مفروضہ دو زاویائی رفتاروں کا حاصل ایک ایسی حرکت ہے کہ نقطے ف اور ر دونوں ساکن رہتے ہیں۔ اس لیے یہ حرکت وہ زاویائی رفتار ہے جس کی گردش کا محور متوازی الاضلاع کا وتر ف ر ہے۔
اس کے بعد زاویائی رفتار کی مقدار معلوم کرنی چاہئے۔ فرض کرو کہ یہ مقدار طا سے تعبیر ہوتی ہے۔ ق سے ف قَ اور ف ر پر عمود ق لا، ق ما کھینچو۔



شکل (۱۳۹)

ذرہ ق کا ہٹاؤ وقت فرت میں ق ما × طا فرت ہوگا اور یہ ہٹاؤ مستوی کے علی القوائم ہوگا۔ لیکن اس ہٹاؤ کو ان ہٹاؤں کے مرکب کرنے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جو زاویائی رفتاروں سہ، سہَ سے پیدا ہوتے ہیں۔ اول الذکر رفتار سے پیدا شدہ ہٹاؤ صفر ہے کیونکہ ق گردش کے محور پر ہے، اور ثانی الذکر سے پیدا شدہ ہٹاؤ ق لا سہَ فرت ہے۔ اس لیے

ق ما × طا فرت = ق لا × سہَ فرت (۱۱۰)

لیکن ق ما × ف ر = ق لا × ف قَ

کیونکہ ہر ایک متوازی الاضلاع کے رقبہ کے مساوی ہے، اس لیے اس کو ربط (۱۱۰) کے ساتھ لینے سے

$$\frac{\text{طا}}{\text{ف ر}} = \frac{\text{سہَ}}{\text{ف قَ}}$$

اس طرح اگر سہَ کو ف قَ سے تعبیر کیا گیا ہے تو طا اسی
پیمانہ پر ف ر سے تعبیر ہوگا۔ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ (۲۸۹)
ایک متوازی الاضلاع ف ق ر قَ کے اضلاع

ف ق، ف قَ سے تعبیر شدہ دو زاوئی رفتاروں کا حاصل ایک زاوئی رفتار ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر ف ر سے تعبیر ہوتی ہے۔

پس زاوئی رفتار ایک سمتی ہے اور اس کے وہی خواص ہیں جو تمام سمتیوں کے لیے ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۲۳۲ — پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گردش کے ایک محور کے گرد جس کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں زاوئی رفتار طا ہو تو طا کی بجائے تین زاوئی رفتاریں سہ۱، سہ۲، سہ۳ محددوں کے محوروں کے گرد لی جا سکتی ہیں ایسی کہ

$$سہ_۱ = ل\ طا،\quad سہ_۲ = م\ طا،\quad سہ_۳ = ن\ طا \qquad (۱۱۸)$$

مربع لیکر جمع کرنے سے

$$طا^۲ = سہ_۱^۲ + سہ_۲^۲ + سہ_۳^۲ \qquad (۱۱۹)$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ کسی اُستوار جسم کی حرکت معلوم ہو جاتی ہے اگر

(ا) نقطہ ف کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط

اور (ب) زاوئی رفتار کے اجزائے ترکیبی سہ۱، سہ۲، سہ۳

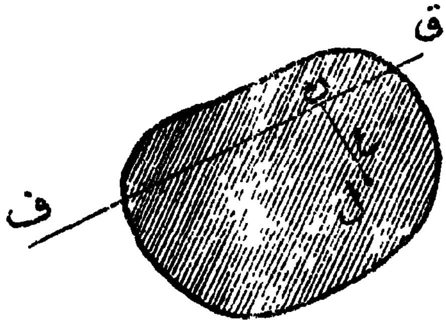
معلوم ہوں —

گردش کی توانائی بالحرکت

۲۳۳ — فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم گردش کے ایک محور ف ق کے گرد زاوئی رفتار طا کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور اس کی کمیت ک ہے۔

فرض کرو کہ ف ق پر عمود ل ن کھینچا گیا ہے اور اس کا طول ع ہے۔



شکل (۱۴۰)

اب ذرہ ل کی رفتار ع طا ہے اور اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{ع}^2\,\text{طا}^2$ ہے۔ جمع کرنے پر پورے جسم کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\left(\Sigma\,\text{ک}\,\text{ع}^2\right)\text{طا}^2$$

حاصل ہوتی ہے۔

مقدار $\Sigma\,\text{ک}\,\text{ع}^2$ (۲۹۰)
کو محور ف ق کے گرد جمود کا معیار کہتے ہیں۔
اگر ہم مقدار گ داخل کریں ایسی کہ

$$\text{گ}^2 = \frac{\Sigma\,\text{ک}\,\text{ع}^2}{\Sigma\,\text{ک}}$$

یعنے گ² ، ع² کی وہ اوسط قیمت ہے جو جسم کے تمام ذروں پر اوسطاً لی گئی ہے تو گ کو محور ف ق کے گرد گھماؤ کا نصف قطر کہتے ہیں۔
اب توانائی بالحرکت کو شکل

$$\frac{1}{2}\left(\Sigma\,\text{ک}\,\text{ع}^2\right)\text{طا}^2 = \frac{1}{2}\,\Sigma\left(\text{ک}\right)\text{گ}^2\,\text{طا}^2$$

میں لکھا جا سکتا ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت وہی ہے گویا کہ جسم کی کل کمیت ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ گردش کے محور سے گ ہے مرتکز ہے۔

اُستوار جسم کی توانائی بالحرکت

۲۳۴ — نقطہ ف اختیاری ہے اور اس لیے فرض کرو کہ یہ وہ نقطہ ہے جو جسم کا مرکز ثقل ہے۔ اب جسم کی عام سے عام حرکت (۱) ایک حرکت انتقال اور (۲) گردش کی ایک حرکت سے مرکب ہو سکتی ہے۔

حرکت (۱) مرکز ثقل کی حرکت انتقال کے مماثل ہے اور حرکت (۲) مرکز ثقل میں سے گذرنے والے ایک محور گرد گردشی حرکت ہے۔

فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار و ہے، مرکز ثقل میں سے گذرنیوالے گردش کے محور کے گرد زاوئی رفتار طا اور گھماؤ کا نصف قطر گ ہے۔

فرض کرو کہ جسم کی کل کمیت $\sum$ ک = ک۔

دفعہ ۱۸۶ کے مسئلہ کی رو سے جسم کی کل توانائی بالحرکت دو اجزا، کا مجموعہ ہے:

(ا) کمیت ک کے ایک واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو جسم کے مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہو،

(ب) مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت۔

جزو (ا) کی قیمت $\frac{1}{2}$ ک و^2 ہے اور جزو (ب) کی $\frac{1}{2}$ ک گ^2 طا^2

پس مجموعی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\text{ک}\left(\text{و}^2+\text{گ}^2\,\text{طا}^2\right) \qquad (120)$$

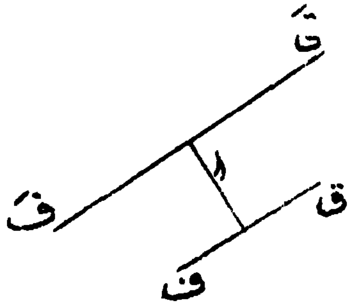
ہے ۔ یہ جملہ خود بڑی اہمیت رکھتا ہے لیکن یہ اس وجہ سے بھی دلچسپ ہے کہ اس کی مدد سے حسب ذیل مسئلہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(۲۹۱) **۲۳۵ — مسئلہ — فرض کرو کہ مرکز ثقل میں سے گذرنیوالے کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ ہے اور فرض کرو کہ اس گھماؤ کے محور سے فاصلہ ا پر کے ایک متوازی محور کے گرد گھماؤ کا محور گَ ہے تو**

$$\text{گَ}^2=\text{گ}^2+\text{ا}^2$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل ث میں سے گذرنے والا کوئی محور ف ق ہے اور فرض کرو کہ اس محور سے فاصلہ ا پر کوئی متوازی محور فَ قَ ہے۔

فرض کرو کہ فَ قَ کے گرد اُستوار جسم گردش کی حرکت رکھتا ہے اور اسکی زاویٔ رفتار طا ہے۔



شکل (۱۴۱)

اب ث کی رفتار ا طا ہے اور حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) رفتار ا طا کی حرکت انتقال اور (۲) محور ف ق کے گرد گردش طا کی حرکت۔ ضابطہ (۱۲۰) کی رو سے توانائی بالحرکت ہے

$$\frac{1}{2} ک (ا^2 طا^2 + گ^2 طا^2)$$

نیز وہ $\frac{1}{2}$ ک $گَ^2 طا^2$ کے مساوی بھی ہے جہاں گَ، فَ قَ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے۔ اِس لیے

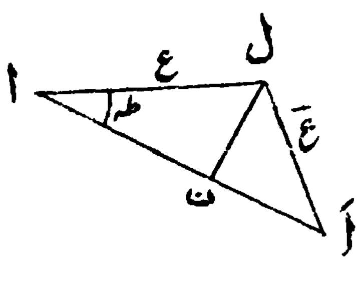
$$\frac{1}{2} ک گَ^2 طا^2 = \frac{1}{2} ک (ا^2 طا^2 + گ^2 طا^2)$$

اور $\frac{1}{2}$ ک $طا^2$ سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۳۶ ـ متبادل ثبوت

ـ اِس مسئلہ کو ہندسی طور پر بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور فرض کرو کہ شکل (۱۴۲) کا مُستوی وہ مُستوی ہے جو ل میں سے گذرتا ہے اور گردش کے دو محوروں کے علی القوائم ہے اور یہ محور مُستوی کو علی الترتیب نقطوں ا، اَ پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ل ا = ع، ل اَ = عَ اور فرض کرو کہ ل ن،



شکل (۱۴۲)

اا َ پر عمود کھینچا گیا ہے۔ تب ک گ َ ۲ = ؏ ک ع َ ۲ اور نیز

ک گ ۲ = ؏ ک ع ۲

= ؏ ک (ع َ ۲ + اا َ ۲ - ۲ ع × اا َ جم ط)

= ک گ َ ۲ + ک × اا َ ۲ - ۲ اا َ (؏ ک × ان)

اب ان، خط اا َ پر اُس خط کا ظِل ہے جو ل سے مرکزِ ثقل تک کھینچا گیا ہے۔ اِس لیے ؏ ک × ان = ۰ اور اِس لیے

ک گ ۲ = ک گ َ ۲ + ک × اا َ ۲

اِس کو ک سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۳۷ — اوپر کے ثابت شدہ مسئلے سے نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی محور کے (۲۹۲)
گرد گھماؤ کا نصف قطر فوراً معلوم ہو سکتا ہے اگر ہمیں مرکزِ ثقل میں سے گذرنے والے متوازی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم ہو اور اِس کے بالعکس۔ اب ہم گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنے کی چند مثالیں دیں گے۔

گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنا

۲۳۸ — یکساں تپلا ڈنڈا۔ فرض کرو کہ ڈنڈے اب کا طول ۲ ا ہے اور فرض کرو کہ اِس کے عمود وار ا میں سے گذرنے والے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ ہے۔ فرض کرو کہ ڈنڈے کی کمیت فی اکائی طول تہ ہے اور فرض کرو کہ لا وہ محدد ہے جو ا سے فاصلوں کو پیمائش کرتا ہے۔ اُس عنصر کی کمیت جو لا سے لا + فرلا تک ہے تہ فرلا ہے اور گردش کے محور سے اِس کا عمودی فاصلہ لا ہے۔ اِس لیے



شکل (۱۴۳)

$$\text{گ}^2 = \frac{\Sigma \text{ک ع}^2}{\Sigma \text{ک}} = \frac{\int_0^{2\text{ا}} (\text{ثہ فرلا})\, \text{لا}^2}{\int_0^{2\text{ا}} \text{ثہ فرلا}} = \frac{\frac{8}{3}\, \text{ثہ}\, \text{ا}^3}{2\, \text{ثہ}\, \text{ا}} = \frac{4}{3}\text{ا}^2$$

اس لیے گھماؤ کا نصف قطر $\frac{2\text{ا}}{\sqrt{3}}$ ہے۔

مرکزِ ثقل کے گرد جس کا فاصلہ ا سے ا ہے گھماؤ کا نصف قطر

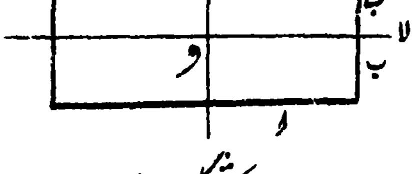
$$\text{گ}^2 = \frac{4}{3}\text{ا}^2 - \text{ا}^2 = \frac{\text{ا}^2}{3}$$

سے حاصل ہوگا اور اس لیے مرکزِ ثقل کے گرد گھماؤ کا نصف قطر $\frac{\text{ا}}{\sqrt{3}}$ ہے۔

۴۳۶ — **مستطیلی پترا**۔ فرض کرو کہ پترے کے کنارے ۲ا، ۲ب ہیں اور ہم اُس محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کے مستوی پر عمود ہے۔ شکل (۱۴۴) کے مطابق محور لو اور فرض کرو کہ فی اکائی رقبہ کمیت ثہ ہے۔ تب

$$\text{گ}^2 = \frac{\Sigma \text{ک ع}^2}{\Sigma \text{ک}} = \frac{\iint (\text{ثہ فرلا فرما})(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)}{4\,\text{ا ب ثہ}}$$

تکمل پورے پترے پر لینا چاہئے اور اس لیے حدود لا = ا سے لا = −ا، (۲۹۲)
ما = ب سے ما = −ب تک ہیں۔



شکل (۱۴۴)

تکمل کرنے پر

$$\text{گ}^2 = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{3}$$

ب = ۰ لینے پر پترا ایک پتلا ڈنڈا ہو جاتا ہے اور نتیجہ وہی حاصل ہوتا ہے جو پچھلے دفعہ میں حاصل ہوا تھا۔

۲۴۰ ـ متجانس ٹھوس ناقص نما۔ فرض کرو کہ ناقص نما کے نیم محور ا، ب، ج ہیں اور فرض کرو کہ ہم محورِ اعظم کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرتے ہیں۔ ناقص نما کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لینے سے اور ناقص نما کی کثافت کو غ سے تعبیر کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{گ}^2 = \frac{\Sigma\, \text{ک}\, \text{ع}^2}{\Sigma\, \text{ک}} = \frac{\iiint (\text{غ فرلا فرما فری})(\text{ما}^2 + \text{ی}^2)}{\iiint \text{غ فرلا فرما فری}}$$

جہاں تکمل ناقص نما کے پورے حجم پر لیا گیا ہے۔ تکملات کی تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے:۔

$$\text{گ}^2 = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}{5}$$

مثالیں

۱ ـ ایک ڈنڈا ۱۲ انچ لمبا ہے۔ اُس نقطہ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو جس کا فاصلہ ایک سرے سے ۴ انچ ہے۔

۲ ـ ایک دائری قرص کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو:

(ا) اُس محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے گذرے اور اس کے مستوی پر عمود ہو،

(ب) ایک قطر کے گرد۔

۳ ـ ثابت کرو کہ نصف قطر ا کے ایک کرہ کا گھماؤ کا نصف قطر کسی قطر کے گرد $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ا ہے اور کسی مماس کے گرد $\sqrt{\frac{7}{5}}$ ا ہے۔

۴ ـ ایک مکعب کا گھماؤ کا نصف قطر ایک کنارے کے گرد معلوم کرو۔

۵ ـ ایک مربع پترے کا گھماؤ کا نصف قطر ایک وتر کے گرد معلوم کرو۔

۶۔ ایک ٹھوس دائری اسطوانے کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو:
(ا) ایک محور کے گرد،
(ب) ایک کون کے گرد،
(ج) ایک سرے کے ایک قطر کے گرد۔
۷۔ ثابت کرو کہ ایک ٹھوس مخروطی نکلے کا گھماؤ کا نصف قطر اس کے محور کے گرد $\sqrt{\frac{۲}{۱۰}}$ ا ہے جہاں ا، قاعدے کا نصف قطر ہے۔

راؤتھ کا قاعدہ

(۲۹۴)

۱۴۲ ــــ حسب ذیل سہولت بخش قاعدہ سے جس کو ڈاکٹر راؤتھ نے (Rigid Dynamics, 8) بیان کیا ہے گھماؤ کے مختلف نصف قطروں کو یاد رکھنے کا آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ اس قاعدہ کا اطلاق خطی، مستوی اور ٹھوس اجسام پر جو
(ا) قائم الزاویہ (ڈنڈا، پترا، یا متوازی السطوح)
(ب) ناقصی یا دائری (قرص یا پترا)
(ج) ناقص نما، کرہ نما، یا کروی (مجسم، ٹھوس)
ہوں ہوتا ہے۔ یہ قاعدہ حسب ذیل ہے:
مرکز ثقل میں سے گذرنے والے تشاکل کے کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ، مساوات

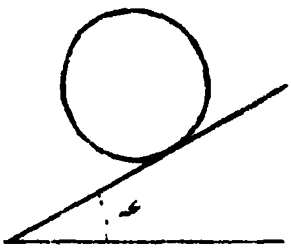
$$گ^۲ = \frac{\text{عمودی نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ}}{۳،\ ۴،\ یا\ ۵}$$

سے حاصل ہوگا جہاں نسب نما ۳، ۴، یا ۵ ہے بموجب اس کے کہ جسم تقسیم (ا)، (ب)، یا (ج) کے تحت ہو۔

توضیحی مثال

ایک سکہ ایک مائل مُستوی پر لڑھکتا ہے۔ کسی فاصلے کے بعد اِس کی رفتار اور نیز اِس کا اسراع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سکے کو ایک یکساں دائری قرص سمجھا گیا ہے اور فرض کرو کہ اِس کا نصف قطر $ا$ ہے۔ جب اِس کی رفتار مُستوی کے نیچے $و$ ہوتی ہے تو اِس کی زاوئی رفتار $\frac{و}{ا}$ ہوگی۔ گردش کا محور سکہ کے مُستوی پر عمود ہے۔ اِس کے تشاکل کے نیم محور $ا$، $ا$ ہوں گے جبکہ اِس کو پتلا سمجھا جائے۔ مرکز میں سے گذرنے والے گردش کے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر $ر$ راؤتھ کے قاعدے کی بموجب



شکل (۱۴۵)

$$گ^۲ = \frac{ا^۲ + ا^۲}{۴} = \frac{۱}{۲} ا^۲$$

ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت

$$\frac{۱}{۲} ک \left[و^۲ + \frac{۱}{۲} ا^۲ \left(\frac{و}{ا} \right)^۲ \right] = \frac{۳}{۴} ک و^۲$$

ہے۔

مُستوی کے نیچے فاصلہ س تک لڑھکنے کے بعد سکہ کا مرکز ثقل فاصلہ س جب عہ تک گر چکتا ہے اور اس لئے توانائی کے بقا کے اصول سے

$$ک ج س جب عہ = \frac{۳}{۴} ک و^۲$$

اور اس لیے رفتار مساوات

$$و^۲ = \frac{۴}{۳} س ج جب عہ$$

سے حاصل ہوگی۔

ضابطہ (۴۸) سے مقابلہ کیا جائے یعنے $و^۲ = ۲ ع س$ سے (ع = اسراع)

جہاں حرکت یکساں اسراع کے تحت ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ سکہ مُستوی کے نیچے یکساں اسراع $\frac{۲}{۳}$ ج جب عہ کے ساتھ لڑھکتا ہے ۔

مثالیں

۱ ـــ ثابت کرو کہ ایک حلقہ کا اسراع جو میلان عہ کی ایک پہاڑی پر سے (۲۹۵)
نیچے لڑھک رہا ہے $\frac{۱}{۲}$ ج جب عہ ہے ۔

۲ ـــ لوکوموٹف پہیئوں کے ایک جوڑے کا اسراع معلوم کرو جو ۵۰ میں ا ڈھال نیچے دوڑ رہے ہیں، ہر پہیہ میں ایکساں موٹائی کی ایک کور اور آرے لگے ہوئے ہیں، کور کا وزن آروں کے وزن کا دُگنا ہے اور محور کا وزن ایک پہیہ کے وزن کا نصف ہے ۔ (محور کی موٹائی نظر انداز کرو) ۔

۳ ـــ دو سیکل سوار جن کی سیکلیں ایک دوسرے کے ٹھیک مشابہ ہیں ایک پہاڑی کے نیچے اس کی چوٹی سے مساوی رفتاروں کے ساتھ حرکت کی ابتدا کر کے اُترتے ہیں ۔ رگڑ کی قوتوں اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ زیادہ بھاری سوار پہاڑی کے دامن میں پہلے پہنچے گا ۔

۴ ـــ ایٹوود مشین کی چرخی کمیت ک کی ایک ایکساں قرص ہے ۔ اگر کمیتیں $ک_۱$ ، $ک_۲$ ڈوری کے سِروں سے لٹکائی جائیں تو ثابت کرو کہ $ک_۱$ کا اسراع

$$\frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲ + \frac{۱}{۲} ک}$$

ہے ۔

۵ ـــ دو کُرّے جن میں سے ایک کھوکھلا خول ہے اور دوسرا متجانس ٹھوس پہاڑی کی چوٹی سے ایک ساتھ حالت سکون سے نکل کر باہم پہاڑی کے نیچے لڑھکتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ راستے کے کسی حصہ پر اُن کے اوقات ۵ : $\sqrt{۲۱}$ کی نسبت میں ہوں گے ۔

۶ ـــ اگر ایک گاڑی کے پہیوں کی کمیتوں کو کور پر جمع شدہ فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ گاڑی کی توانائی جبکہ وہ رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہو $\frac{۱}{۲}$ ک و

ہے جہاں ک پوری گاڑی اور پہیوں کے وزنوں کا مجموعہ ہے ۔

۷ ۔۔ یکساں تار کے ایک سیدھے ٹکڑے کو ایک سرے پر انتصاباً استادہ کیا گیا اور گرنے چھوڑ دیا گیا ۔ وہ کس رفتار سے زمین سے ٹکرائے گا ۔

۸ ۔۔ سگار کی شکل کا ایک متجانس ٹھوس کرہ نما (نیم محور ا اور ب) اس کی نوک کے بل ایک افقی مستوی پر استادہ کیا گیا اور لڑھکنے کے لیے چھوڑ دیا گیا ۔ اسکی زاوئی رفتار معلوم کرو جبکہ اس کے محور اصغر کا سرا مستوی کے ساتھ تماس میں ہو اور اس لمحہ پر مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو ۔

معیار حرکت کا معیار

۲۴۲ ۔۔ فرض کرو کہ کمیت ک کے کسی ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہیں ۔ فرض کرو کہ کل حاصل قوت کے جو ذرہ پر عمل کرتی ہے اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہیں ۔ تب حرکت کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :

$$ک \frac{فر^{۲} لا}{فرت^{۲}} = لا ،$$

$$ک \frac{فر^{۲} ما}{فرت^{۲}} = ما ،$$

$$ک \frac{فر^{۲} ی}{فرت^{۲}} = ے$$

ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا معیار محور لا کے گرد ما ے ۔ ی ما ہے (۲۹۶) اور اوپر کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$ما ے ۔ ی ما = ک \left(ما \frac{فر^{۲} ی}{فرت^{۲}} ۔ ی \frac{فر^{۲} ما}{فرت^{۲}} \right) \qquad (۱۲۱)$$

ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی $\frac{فر لا}{فرت}$ ، $\frac{فر ما}{فرت}$ ، $\frac{فر ی}{فرت}$ ہیں اور اس لئے

اِس رفتار کا معیار محور لا کے گرد حسب تعریف دفعہ (۲۱۹)

$$\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

ہے۔

ذرہ کا معیار حرکت اِس کی رفتار کا ک گُنا ہے اور اِس لیے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد، رفتار کے معیار کا ک گُنا ہے اور اس لیے

$$\text{ک}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)$$

ہے۔ تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\text{ک}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\right]$$

$$= \text{ک}\left[\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} + \text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2}\right) - \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ی}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}\right)\right]$$

$$= \text{ک}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2} - \text{ی}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}\right)$$

$$= \text{ما}\,\text{ے} - \text{ی}\,\text{ما} \qquad (۱۲۲)$$

مساوات (۱۲۱) سے۔

پس ہم نے ثابت کردیا کہ

کسی محور کے گرد ایک ذرہ کے معیار حرکت کے معیار کی تبدیلی کی شرح، اُسی محور کے گرد اُس معیار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا ہے۔

۲۴۳ — مساوات (۱۲۲)، اجسام کے کسی نظام کے ہر ذرہ کے لیے درست ہے۔ فرض کرو کہ ہم تمام ذروں کے لیے ایسی مساواتیں معلوم

کرتے ہیں اور اِن کو جمع کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر}{فرت}\left[\Sigma ک\left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}\right)\right] = \Sigma (ما ے - ی ما) \quad \ldots\ldots (۱۲۳)$$

اِس مساوات کی بائیں جانب وہ جملہ ہے جو جسم پر یا اجسام پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اندرونی قوتیں مساوی اور مخالف قوتوں کے جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور (۲۹۷)
اِس لیے اِس کا جملۂ بالا میں کوئی حصہ نہیں ہے۔

جملہ $\Sigma ک\left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}\right)$ کو جو جداگانہ ذرات کے معیارِ حرکت کے معیاروں کا مجموعہ ہے **نظام کے معیارِ حرکت کا معیار** کہتے ہیں۔

اس طرح مساوات (۱۲۳) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

کسی محور کے گِرد کسی نظام کے معیارِ حرکت کے معیار میں تبدیلی کی شرح، اِس محور کے گِرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۴۴ — اِس مسئلہ سے متعدد اہم نتیجے نکلتے ہیں:

۱ — اگر اجسام کے کسی نظام پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو ہر محور کے گِرد معیارِ حرکت کا معیار مستقل رہتا ہے۔

اِس سے وہ اصول بیان ہوتا ہے جس کو **زاوئی معیارِ حرکت کا بقا** کہتے ہیں۔

اِس کی ایک مثال سورج سے مہیا ہوتی ہے جس کے متعلق عملاً یہ فرض

کیا جا سکتا ہے کہ اِس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں۔ بالعموم یہ فرض کیا جاتا ہے کہ سورج حجم میں سُکڑ رہا ہے، اگر ایسا ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اِس کے محور کے گرد اِس کی گردش کی رفتار مسلسل بڑھنی چاہئے تاکہ اِس کا معیارِ حرکت کا معیار مستقل رہ سکے۔

۲ ـــ اگر ایک نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہوں یا اِس خط کو قطع کریں تو نظام کے معیارِ حرکت کا معیار اِس خط کے گرد مستقل رہنا چاہئے۔

ایک لٹو پر صرف کیل پر کا تعامل اور جاذبہ عمل کرتے ہیں۔ ثانی الذکر کا معیار لٹو کے کیل میں سے گذرنے والے انتصابی خط کے گرد معدوم ہوتا ہے اور اول الذکر کا معیار تقریبی طور پر معدوم فرض کیا جا سکتا ہے اِس لئے لٹو کے کیل میں سے گذرنیوالے خط کے گرد معیارِ حرکت کا معیار مستقل رہے گا، تقریبی طور پر۔

۳ ـــ اگر ایک اُستوار جسم ایک ثابت محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہو اور اگر کسی لمحہ پر اِس کی زاوئی رفتار سہ ہو تو

$$ک گ^2 \frac{ف سہ}{ف ت} = ل$$

جہاں ک گ²، ثابت محور کے گرد جمود کا معیار ہے اور ل، اِس محور کے گرد تمام بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ہے۔

اِس کی تصدیق کے لیے صرف یہ دیکھنا ضروری ہے کہ کمیت ک کا (۲۹۸)
ایک ذرہ جو محور سے فاصلہ ف پر ہے معیارِ حرکت ک ف سہ رکھتا ہے اور اس لیے پورے نظام کے معیارِ حرکت کا معیار

$$\sum ک ف^2 سہ = ک گ^2 سہ$$

ہوگا اور چونکہ ک اور گ² وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتے اِس لیے زاویٔ معیارِ حرکت کی تبدیلی کی شرح $\text{ک گ}^2 \, \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$ ہوگی۔

رقاص کا اہتزاز

۲۴۵ — پچھلے مسئلہ کا ایک اہم اطلاق یہ ہے کہ کسی قسم کے رقاص کے اہتزاز کا وقت معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ و وہ نصاب ہے جس کے گرد رقاص گردش کرتا ہے، فرض کرو کہ اِس کا مرکز ثقل ث ہے اور و ث = ھ اور فرض کرو کہ خط و ث انتصابی کے ساتھ کسی لمحہ پر زاویہ طہ بناتا ہے اور اس لیے رقاص کی زاویٔ رفتار اِس کے محور کے گرد $\text{سہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ہے۔

فرض کرو کہ پورے رقاص کی کمیت ک ہے اور گردش کا نصف قطر اِس کے محور کے گرد گ ہے۔



شکل (۱۴۶)

اب حرکت کی مساوات ہے

$$\text{ک گ}^2 \, \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \text{ل}$$

جس میں $\text{سہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$، ل کی قیمت و میں سے گذرنے والے محور کے گرد وزن کے معیار کے مساوی ہے اور اِس لئے ک ج ھ جب طہ کے مساوی ہے۔

اِس لئے حرکت کی مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ک گ}^2 \, \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \text{ک ج ھ جب طہ}\text{،}$$

یا $$\frac{\text{گ}^2}{\text{ھ}}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{طہ}}{\text{فرت}^2} = \text{ج جب طہ}$$

طول ل کے سادہ رقاص کے لیے حرکت کی مساوات (۲۹۹)

$$\text{ل}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{طہ}}{\text{فرت}^2} = \text{ج جب طہ}$$

ہے اور اِس لیے مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت وہی ہے جو طول $\text{ل} = \frac{\text{گ}^2}{\text{ھ}}$ کے سادہ رقاص کی ہوتی ہے ۔

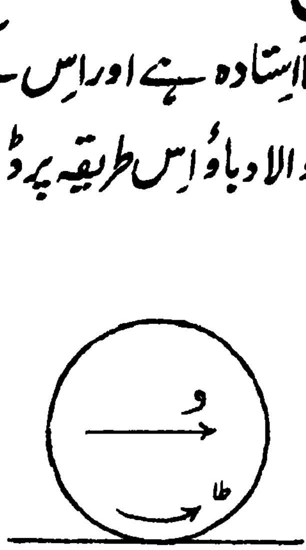
مثلاً چھوٹے اہتزازوں کا مکمل دَور

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{گ}^2}{\text{ج ھ}}}$$

ہے ۔

توضیحی مثال

ایک انگوٹھی ایک میز پر انتصاباً اِستادہ ہے اور اِس کے ایک نقطہ پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ اِس طریقہ پر ڈالا گیا ہے کہ جس نقطہ پر انگوٹھی میز کو مس کرتی ہے اُس کے میز پر پھسلنے سے توازن ٹوٹتا ہے ۔ انگوٹھی کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو ۔



شکل (۱۴۷)

مثال (۲) صفحہ ۱۵۸ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ متذکرہ صدر طریقہ پر دباؤ ڈالنا ممکن ہے۔

فرض کرو کہ انگوٹھی جب اُنگلی کو چھوڑتی ہے تو یہ مشاہدہ کیا گیا کہ انگوٹھی رفتار و کے ساتھ آگے حرکت کرتی ہے اور گردش طا کے ساتھ اُس سمت کے مخالف گھومتی ہے جس میں وہ گھومتی اگر بغیر پھسلے وہ لڑھکتی۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر رفتار اور گردش کی قیمتیں و اور سہ ہیں جن کی پیمائش علی الترتیب و اور طا کی سمتوں میں کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ انگوٹھی کا نصف قطر ا اور کمیت ک ہے۔ اِس پر عمل کرنیوالی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اِس کا وزن ک ج،

(ب) میز کے ساتھ اِس کے تعامل کا انتصابی جزو ترکیبی جو ک ج کے مساوی ہے کیونکہ انگوٹھی کا مرکز ثقل کوئی انتصابی اسراع نہیں رکھتا،

(ج) انگوٹھی کے زیرترین نقطہ پر فرکی تعامل، جو ک ج مہ کے مساوی ہے جب تک کہ پھسلن واقع ہوتی ہے۔

دفعہ (۱۸۰) کے مسئلہ کی رُو سے

$$ک \frac{فر و}{فر ت} = - ک ج مہ \qquad (ا)$$

ہم ایک اور مساوات دفعہ ۲۴۳ کے مسئلہ سے حاصل کرسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ لمحہ ت پر انگوٹھی کا جو محور ہے اِس کو ہم محور لیتے ہیں۔ اِس لمحہ پر جمود کا معیار ک $ا^2$ ہے۔ معیار حرکت کا معیار حاصل کرنے کے لیے ہم کل حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب سمجھتے ہیں: (۱) مرکز ثقل کی حرکتِ انتقال (رفتار و) اور (۲) مرکز ثقل میں سے گذرنے والے ایک محور کے گرد گردش کی حرکت (رفتار سہ)۔ اوّل الذکر کا کوئی اثر معیار حرکت کے معیار پر نہیں ہے (۳۰۰) اور اِس لیے معیار حرکت کا کل معیار

ک ا۲ سہ

ہے ۔

چھوٹے وقفہ فرت کے ختم پر انگوٹھی فاصلہ و فرت تک آگے حرکت کر چکی ہوگی اور اس لیے اب ہم ایک ایسے محور کے گرد جمود کے معیار پر غور کر رہے ہیں جو انگوٹھی کے مرکز ثقل سے فاصلہ و فرت پر ہے اور اس لیے حسب دفعہ ۲۳۵ وقفہ فرت کے بعد جمود کا معیار

ک [ا۲ + (و فرت)۲]

ہے ۔

لیکن ہم دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار (فرت)۲ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور جمود کے معیار کو مستقل اور ک ا۲ کے مساوی سمجھ سکتے ہیں ۔ اس لیے معیار حرکت کے معیار کے اضافہ کی شرح ک ا۲ $\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$ ہے ۔

بیرونی قوتوں کا معیار اُس محور کے گرد اور راسی سمت میں

۔ک ج مہ ا

ہے اور اس لیے مساوات

ک ا۲ $\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$ = ۔ک ج مہ ا (ب)

یا ا $\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$ = ۔ مہ ج (ج)

حاصل ہوتی ہے اور مساوات (ا)

$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ = ۔ مہ ج (د)

میں تحویل ہوتی ہے ۔

اِن رشتوں سے و اور سہ کے گھٹاؤ کی شرحیں حاصل ہوتی ہیں جب تک پھسلن واقع ہو رہی ہو ۔ صریحاً پھسلن رُک جاتی ہے جوں ہی و + سہ ا = ۔ کیونکہ

و + سہ ا، انگوٹھی کے زیرترین نقطہ کی آگے وار رفتار ہے۔ مساواتوں (ج) اور (د) سے حاصل ہوتا ہے

ف / ف ت (و + سہ ا) = − ۲ مہ ج

اور ابتداً و + سہ ا کی قیمت و + طا ا ہے۔ اِس لیے و + ا کو صفر میں تحویل ہونے کے لیے وقت

و + طا ا / ۲ مہ ج

مطلوب ہے۔ اِس وقفہ کے بعد پھسلن رک جاتی ہے۔ اِس لمحہ پر انگوٹھی کی رفتار و حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے:

و = و − سہ ج (و + طا ا / ۲ مہ ج)

= ½ (و − طا ا)

اِس لیے حرکت آگے وار یا پیچھے وار ہوگی بموجب اِس کے کہ ابتدائی رفتار و > یا < طا ا۔ پھسلن ایک دفعہ رُک جانے کے بعد اِس کو پھر شروع کرنے کے لئے کوئی قوت نہیں ہے اور اِس لیے انگوٹھی صرف یکساں رفتار و کے ساتھ لڑھکتی جائے گی۔ اگر و > طا ا تو وہ اپنے ابتدائی نقطۂ حرکت سے دُور لڑھکتی جائے گی لیکن اگر و < طا ا تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت پر واپس آئے گی۔

مثالیں (۳۰۱)

ا۔ ایک دروازہ کے قبضوں کا خط انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور دروازہ اپنے توازن کے محل کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کی حرکت وہی ہے جو ایک خاص سادہ رقاص کی ہے۔ اِس رقاص کا طول معلوم کرو۔

۲۔ ایک نشانہ دہات کی ایک مربع تختی سے بنا ہے جس کا کنارہ ا اور

کمیت ک ہے۔ اِس کے بلند ترین کنارہ پر قبضہ لگا ہوا ہے اور یہ کنارہ افقی ہے۔ نشانہ کی سُکون کی حالت میں اِس پر ایک گولی کی ضرب پڑتی ہے جس کی کمیّت ک ہے اور جو رفتار ﻭ کے ساتھ حرکت کرتی ہوئی نشانہ کے ایک ایسے نقطہ پر لگتی ہے جو قبضوں کے خط کے نیچے گہرائی گ پر ہے۔ نشانہ کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو۔

۳۔ ایک متجانس کرہ کو بغیر گردش کے ایک کھردرے مائل مُستوی پر پھینکا گیا ہے، مُستوی کا میلان ع ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ وقت جس کی اثناء میں کرہ مُستوی پر چڑھتا ہے وہی ہے جو ہوتا اگر مُستوی چکنا ہوتا، نیز ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں کرہ پھسلتا ہے اُس وقت کے ساتھ جس میں وہ لڑھکتا ہے نسبت ۲ مس ع : ۷ مہ رکھتا ہے۔

۴۔ نصف قطر ا کا ایک کرہ، نصف قطر ب کے ایک کروی پیالے کی مقعر سطح پر کے ایک نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ اِس کو اچانک آزاد چھوڑ کر سطح پر نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ اِن دو کروں کے مرکزوں کو ملانیوالا خط اُسی طریقہ پر جھولتا ہے جس طرح طول $\frac{۷}{۵}$ (ب ـ ا) کا ایک سادہ رقاص۔

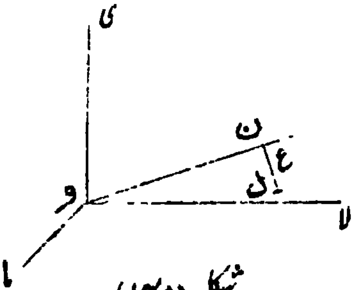
۵۔ نصف قطر ا کے ایک کرہ کو نصف قطر ب کے ایک کرہ کی کھردری محدب سطح کے بلند ترین نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ پھر اِس کو آزاد چھوڑ کر اِس کو کرہ کی سطح کے نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ کرے جدا ہوں گے جبکہ اِن کے مرکزوں کو ملانے والا خط انتصابی کے ساتھ زاویہ جم$^{-۱}$ $\frac{۱۰}{۱۷}$ بنائے۔ صورت ب = ۰ کا امتحان کرو۔

۶۔ ایک دائری حلقہ ایک چکنے افقی مُستوی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے، اِس پر ایک چھوٹی انگوٹھی جس کی کمیت حلقہ کی کمیت کا $\frac{۱}{ن}$ واں حصہ ہے پھسلتی ہے اور اِن دونوں کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ابتداً حلقہ ساکن تھا اور انگوٹھی حلقہ کے گرد زاوئی رفتار سہ کے ساتھ حرکت کر رہی تھی ثابت کرو کہ انگوٹھی وقت $\frac{۱+ن}{مہ\ سہ}$ کے بعد حلقہ کے لحاظ سے ساکن ہو جائے گی۔

جمود کے معیاروں کا عام نظریہ

جمود کے سر

۲۲۶ — فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم گردش کے ایک محور کے گرد گردش کر رہا ہے اور گردش کے محور کی سمتی جیوب التمام کسی تین ثابت محوروں کے حوالے سے ل، م، ن ہیں۔ فرض کرو کہ گردش کے محور پر کوئی نقطہ و مبدا لیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ل، کمیت ک کا کوئی ذرّہ ہے جس کا فاصلہ گردش کے محور سے ع ہے۔ فرض کرو کہ ل کے محدد لا، ما، ی ہیں اور ل ن (= ع)، ل سے گردش کے محور پر عمود ہے۔



شکل (۱۴۸)

چونکہ

(۳۰۲) و ل^2 = لا^2 + ما^2 + ی^2

اور و ن^2 = (ل لا + م ما + ن ی)^2

اسلیے ع^2 = و ل^2 − و ن^2

= لا^2 + ما^2 + ی^2 − (ل لا + م ما + ن ی)^2

= لا^2(م^2 + ن^2) + ما^2(ن^2 + ل^2) + ی^2(ل^2 + م^2)
− ۲ م ن × ما ی − ۲ ن ل × ی لا − ۲ ل م × لا ما

= ل^2(ما^2 + ی^2) + م^2(ی^2 + لا^2) + ن^2(لا^2 + ما^2)
− ۲ م ن × ما ی − ۲ ن ل × ی لا − ۲ ل م × لا ما

پس جمود کا معیار مہ، مساوات

مہ = Σ ک ع^2

$$= ل^2 \sum ک\,(ما^2 + ی^2) + م^2 \sum ک\,(ی^2 + لا^2) + ن^2 \sum ک\,(لا^2 + ما^2)$$

$$- ۲ م ن \sum ک\, ما ی - ۲ ن ل \sum ک\, ی لا - ۲ ل م \sum ک\, لا ما$$

$$= ل^2 ا + م^2 ب + ن^2 ج - ۲ م ن د - ۲ ن ل ع - ۲ ل م ف \qquad \text{..........(۱۲۴)}$$

سے حاصل ہوگا جہاں

$$ا = \sum ک\,(ما^2 + ی^2) \text{، وغیرہ}$$

$$د = \sum ک\, ما ی \text{، وغیرہ}$$

یہ معلوم ہوگا کہ مقداریں ا، ب، ج علی الترتیب محوروں لا، ما، ی کے گرد جمود کے معیار ہیں۔ مقداروں د، ع، ف کو جمود کے حاصل ضرب کہتے ہیں۔

مساوات (۱۲۴) میں ل، م، ن کو مختلف قیمتیں دینے سے و میں سے گذرنے والے کسی خط کے گرد جمود کا معیار معلوم ہو سکتا ہے جب کہ چھ سروں ا، ب، ج، د، ع، ف کی قیمتیں معلوم ہو جائیں۔

جمود کا ناقص نما

۲۴۷ — مساوات

$$ا لا^2 + ب ما^2 + ج ی^2 - ۲ د ما ی - ۲ ع ی لا - ۲ ف لا ما = ک$$

جہاں ک کوئی مستقل ہے ایک مخروطی نما کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ وہ دوسرے درجہ کی مساوات ہے۔ اگر سمتی جیوب التمام ل، م، ن کا سمتی نیم قطر ر ہو تو

ر۲ (ال۲ + ب م۲ + ج ن۲ - ۲ د م ن - ۲ ع ن ل - ۲ ف ل م) = ک

یا مساوات (۱۲۴) سے

$$ر^2 = \frac{ک}{م} \quad (۱۲۵)$$

(۳۰۳) چونکہ ل ، م ، ن کی تمام قیمتوں کے لیے م مثبت ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سمتی نیم قطر کی تمام سمتوں کے لیے ر۲ مثبت ہے ۔ اِس لیے مخروطی نما ، ایک ناقص نما ہے ۔

اِس ناقص نما کو نقطہ و کا **جمود کا ناقص نما** کہتے ہیں ۔

مساوات (۱۲۵) کو لکھا جا سکتا ہے

$$م = \frac{ک}{ر^2}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ و میں سے گذرنے والے کسی محور کے گرد جمود کا معیار ، جمود کے ناقص نما کے متوازی سمتی نیم قطر کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتا ہے ۔

جمود کے صدر محاور

۲۴۸ — ناقص نما کی اِس طبیعی خاصیت سے یہ ظاہر ہے کہ ناقص نما خود وہی رہتا ہے خواہ محددوں کے محور کوئی بھی منتخب کئے جائیں ۔ ناقص نما کے تین صدر محور ہیں جو باہم علی القوائم ہیں ۔ اِن محوروں کی سمتوں کو نقطہ و پر جمود کے صدر محاور کہا جاتا ہے ۔

اگر نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لیا جائے تو ناقص نما کی مساوات میں م ای ، ی لا ، لا ما کے سر غائب ہونے چاہئیں اِس لیے

$$د = ع = ف = ۰$$

پس و پر جمود کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لینے سے مساوات

(۱۲۴) شکل ذیل اختیار کرتی ہے:

$$\text{م} = \text{ل}^2\,\text{ا} + \text{م}^2\,\text{ب} + \text{ن}^2\,\text{ج}$$

زاویٔی رفتار طا کی گردش کی توانائی بالحرکت

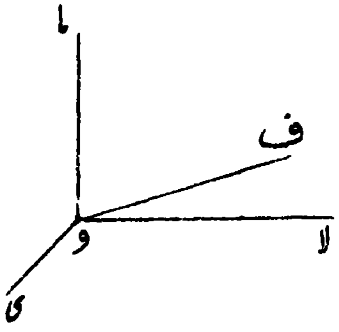
$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{طا}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\text{ل}^2\,\text{ا} + \text{م}^2\,\text{ب} + \text{ن}^2\,\text{ج}\right)\text{طا}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}\,\text{س}_1^2 + \text{ب}\,\text{س}_2^2 + \text{ج}\,\text{س}_3^2\right) \qquad (۱۲۶)$$

ہے جہاں طا کے اجزائے ترکیبی س_1، س_2، س_3 ہیں (دیکھو دفعہ ۲۳۲)۔

اُستوار جسم کی حرکت کی عام مساواتیں (۳۰،۴)

۲۴۹ — فرض کرو کہ اُستوار جسم کا کوئی نقطہ و ہے اور فرض کرو کہ ولا، وما، وی محوروں کا ایک جٹ ہے جو حرکت کرتا ہے اس طریقہ پر کہ نقطہ و اُستوار جسم میں اپنا محل قائم رکھتا ہے اور محاور اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتے ہیں۔



شکل (۱۴۹)

فرض کرو کہ و کی رفتار کے اجزائے ترکیبی اِن محوروں پر ع، و، ط ہیں۔ اِن محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کی حرکت کسی محور وف کے گرد جو و میں سے گذرے گردش کی حرکت ہوگی۔

فرض کرو کہ یہ گردش، تین محوروں کے گرد گردشوں $\text{س}_{\text{لا}}$، $\text{س}_{\text{ما}}$، $\text{س}_{\text{ی}}$ سے مرکب ہے۔

فرض کرو کہ اِن محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کے کسی نقطہ کے

محدد لا، ما، ی ہیں۔ اُس فریم کے لحاظ سے جو و کے ساتھ حرکت کرنے والے محوروں سے فراہم ہوتا ہے نقطہ لا، ما، ی کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}،\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}،\quad \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$$

ہیں اور فضا میں اِس فریم کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

ع، و، ط

ہیں۔ اِس لیے نقطہ لا، ما، ی کی کُل رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\text{ع} + \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}،\quad \text{و} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}،\quad \text{ط} + \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$$

ہیں۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر محوروں لا، ما، ی کے گرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعے علی الترتیب ل، م، ن سے تعبیر ہوتے ہیں تو حسب دفعہ (۲۴۳)

$$\text{ل} = \Sigma\,(\text{ما}\,\text{ے} - \text{ی}\,\text{ما})\text{، وغیرہ}$$

نقطہ لا، ما، ی پر کمیت ک کے ذرہ کے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد

$$\text{ک}\left[\text{ما}\left(\text{ط} + \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right) - \text{ی}\left(\text{و} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\right]$$

ہے۔ پس دفعہ (۲۴۳) کے مسئلہ کی رُو سے

$$\text{ل} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\Sigma\,\text{ک}\left[\text{ما}\left(\text{ط} + \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right) - \text{ی}\left(\text{و} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\right] \quad (۱۲۷)$$ (۳۰۵)

علیٰ ہذا دوسرے محوروں کے لیے مشابہ مساواتیں ہیں۔

۲۵۰۔ محددوں کے متحرک محوروں کے لحاظ سے ذرہ ک کے محدد لا، ما، ی ہیں اور اِس لیے و لا کے گرد گردش سے لا سے ذرہ کی جو رفتار حاصل ہوتی ہے اُس کے اجزائے ترکیبی

٠ ، - سہ_ز ی ، - سہ_ی ما

ہیں —

اسی طرح گردشوں سہ_ما ، سہ_ی سے جو رفتاریں حاصل ہوتی ہیں ان کے اجزائے ترکیبی

سہ_ما ی ، ٠ ، - سہ_ما لا

اور - سہ_ی ما ، سہ_ی لا ، ٠

ہیں —

ان رفتاروں کو مرکب کرنے سے حاصل رفتار کے اجزائے ترکیبی متذکرہ محوروں کے لحاظ سے حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{ی} - \text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{ما} ،$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{لا} - \text{سہ}_{\text{لا}}\,\text{ی} ،$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{لا}}\,\text{ما} - \text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{لا}$$

اس طرح

$$\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{لا}}\,(\text{ما}^2+\text{ی}^2) - \text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{سہ}_{\text{ی}}\,\text{لا}\,\text{ی}$$

اور ت کے لحاظ سے اس مساوات کو تفرق کرنے پر مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے ایک حصہ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\Big[\Sigma\,\text{ک}\,(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}})\Big]$$

$$= \Sigma\,\text{ک}\,(\text{ما}^2+\text{ی}^2)\,\frac{\text{فرسہ}_{\text{لا}}}{\text{فرت}} - \Sigma\,\text{ک}\,\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{فرسہ}_{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \Sigma\,\text{ک}\,\text{لا}\,\text{ی}\,\frac{\text{فرسہ}_{\text{ی}}}{\text{فرت}}$$

$$- \Sigma\,\text{ک}\,\text{ما}\,\text{ی}\,(\text{سہ}_{\text{ما}}^2 - \text{سہ}_{\text{ی}}^2) + \Sigma\,\text{ک}\,(\text{ما}^2 - \text{ی}^2)\,\text{سہ}_{\text{ما}}\,\text{سہ}_{\text{ی}}$$

$$- \sum \text{ک ی لا} \,\text{سہ}\,\bar{\text{سہ}}_{\text{لا}} + \sum \text{ک لا ما}\, \text{سہ}_{\text{ی}}\, \bar{\text{سہ}}_{\text{لا}}$$

$$= \text{ا} \frac{\text{فر}\,\bar{\text{سہ}}_{\text{لا}}}{\text{فرت}} - \text{ف} \frac{\text{فر}\,\bar{\text{سہ}}_{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \text{ع} \frac{\text{فر}\,\bar{\text{سہ}}_{\text{ی}}}{\text{فرت}}$$

$$- \text{د} (\text{سہ}_{\text{ما}}^{2} - \text{سہ}_{\text{ی}}^{2}) - (\text{ب} - \text{ج})\, \text{سہ}_{\text{ما}}\, \text{سہ}_{\text{ی}} - \text{ع}\, \text{سہ}_{\text{ما}}\, \bar{\text{سہ}}_{\text{لا}}$$

$$+ \text{ف}\, \text{سہ}_{\text{ی}}\, \text{سہ}_{\text{لا}}$$

(۳۰۶) **۲۵۱** — فرض کرو کہ اُستوار جسم کے مرکز ثقل کے محدد لاَ ، ماَ ، یَ ہیں اور اس کی کل کمیت ک ہے ۔ اب

$$\sum \text{ک لا} = \text{ک}\,\bar{\text{لا}} \text{، وغیرہ}$$

اس لیے مساوات (۱۲۷) کے وائیں جانبی رکن کے بقیہ حصہ کی قیمت حسب ذیل ہے :

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \sum \text{ک} (\text{ماط} - \text{ی و}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{ک}\,\bar{\text{ما}}\text{ط} - \text{ک}\,\bar{\text{ی}}\text{و})$$

$$= \text{ک} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\bar{\text{ما}}\text{ط} - \bar{\text{ی}}\text{و})$$

پس مساوات (۱۲۷) حسب ذیل شکل اختیار کرتی ہے :

$$\text{ک} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\bar{\text{ما}}\text{ط} - \bar{\text{ی}}\text{و}) + \text{ا} \frac{\text{فر}\,\bar{\text{سہ}}_{\text{لا}}}{\text{فرت}} - \text{ف} \frac{\text{فر}\,\bar{\text{سہ}}_{\text{ما}}}{\text{فرت}}$$

$$- \text{ع} \frac{\text{فر}\,\bar{\text{سہ}}_{\text{ی}}}{\text{فرت}} - \text{د} (\text{سہ}_{\text{ما}}^{2} - \text{سہ}_{\text{ی}}^{2}) - (\text{ب} - \text{ج})\, \text{سہ}_{\text{ما}}\, \text{سہ}_{\text{ی}}$$

$$- \text{ع}\, \text{سہ}_{\text{ما}}\, \text{سہ}_{\text{لا}} + \text{ف}\, \text{سہ}_{\text{ی}}\, \text{سہ}_{\text{لا}} = \text{ل} \qquad (۱۲۸)$$

اگر محوروں پر کُل اجزائے ترکیبی $\sum$ لا ، $\sum$ ما ، $\sum$ ے سے

تعبیر ہوں تو دفعہ (۱۸۰) کی رو سے حسب شکل ذیل مزید مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

$$ک \frac{فر}{فرت} (۶+ \frac{فر لا}{فرت}) = \Sigma\, ل \qquad (۱۲۹)$$

مساواتیں (۱۲۸) اور (۱۲۹) اور ان کے متناظر دوسرے دو محوروں کے لحاظ سے مساواتوں کے دو دو سرے زوج ایک استوار جسم کی حرکت کی مساواتیں ہیں جبکہ یہ جسم کسی قوتوں کے تحت حرکت کر رہا ہو۔

یولر کی مساواتیں

۲۵۲ — اب فرض کرو کہ محوروں کا ایک دوسرا جٹ ہے جس کو ہم ۱، ۲، ۳ سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ یہ محور حرکت کرتے ہیں اس طور پر کہ ان کا محل استوار جسم کا ہمیشہ وہی رہتا ہے، نقطہ و (جس کے متعلق ہم فرض کر چکے ہیں کہ وہ ہمیشہ استوار جسم میں ایک ہی محل پر قائم رہتا ہے) ان محوروں کا مبدا ہے۔ فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر محاور ۱، ۲، ۳ محوروں لا، ما، ی پر منطبق ہوتے ہیں۔ تب محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے جمود کے سروں کی جو قیمتیں حاصل ہوں گی وہ وہی ہونگی جو محوروں لا، ما، ی کے حوالے سے حاصل ہوئی تھیں یعنے ا، ب، ج، د، ع، ذ۔ مزید برآں وہ تمام رفتاریں جن کا حوالہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے ذریعہ دیا گیا ہو وہی قیمتیں رکھیں گی جو وہ رکھتیں اگر ان کا حوالہ محوروں لا، ما، ی سے دیا جاتا۔ فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد گردشیں سہ۱، سہ۲، سہ۳ ہیں تو زیر بحث لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$سہ_۱ = سہ_{لا} \text{،} \quad سہ_۲ = سہ_{ما} \text{،} \quad سہ_۳ = سہ_{ی}$$

اس کا کسی لمحہ پر درست ہونا ضروری نہیں ہے الا اس لمحہ کے جس پر محور منطبق ہوتے ہیں اور اس لیے وقت کے لحاظ سے ان مساواتوں کا

تفرق کرنا اور اِس سے

$$\frac{\text{فر}\,\text{سہ}_{\text{ا}}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}\,\text{سہ}_{\text{لا}}}{\text{فرت}} \quad \text{وغیرہ}$$

اخذ کرنا دُرست نہیں ہے ۔ تاہم یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ آخری نتیجہ زیرِ بحث لمحہ پر درست ہے ۔ فرض کرو کہ و میں سے گذرنے والا کوئی خط وق سے تعبیر ہوتا ہے، فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے لحاظ سے اِس خط کی سمتی جیوب التمام جم عہ، جم بہ، جم جہ ہیں اور فرض کرو کہ وف کے گرد زاویائی رفتار کا جزوِ ترکیبی طاق ہے ۔ اگر ایک محور وف کے گرد کلی سمتی جیوب التمام محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے ل، م، ن ہیں حاصل زاویائی رفتار کی مقدار طا ہو تو

$$\text{طاق} = \text{طا جم ف و ق}$$

$$= \text{طا}\,(\text{ل جم عہ} + \text{م جم بہ} + \text{ن جم جہ})$$

$$= \text{سہ}_{\text{ا}}\,\text{جم عہ} + \text{سہ}_{\text{۲}}\,\text{جم بہ} + \text{سہ}_{\text{۳}}\,\text{جم جہ}$$

خط وق خواہ کوئی ہو یہ مساوات ہمیشہ درست ہوگی، اِس لیے ہم اِس کو وقت کے لحاظ سے تفرق کر سکتے ہیں اور اِس طرح حاصل کرتے ہیں

$$\frac{\text{فر طاق}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}\,\text{سہ}_{\text{ا}}}{\text{فرت}}\,\text{جم عہ} + \frac{\text{فر}\,\text{سہ}_{\text{۲}}}{\text{فرت}}\,\text{جم بہ} + \frac{\text{فر}\,\text{سہ}_{\text{۳}}}{\text{فرت}}\,\text{جم جہ}$$

$$- \text{سہ}_{\text{ا}}\,\text{جب عہ}\,\frac{\text{فر عہ}}{\text{فرت}} - \text{سہ}_{\text{۲}}\,\text{جب بہ}\,\frac{\text{فر بہ}}{\text{فرت}} - \text{سہ}_{\text{۳}}\,\text{جب جہ}\,\frac{\text{فر جہ}}{\text{فرت}}$$

(۱۳۰) . . . .

اب فرض کرو کہ خط وق، ولا پر منطبق ہوتا ہے تو $\text{طاق} = \text{سہ}_{\text{لا}}$ زیرِ بحث لمحہ پر $\text{بہ} = \text{جہ} = \frac{\pi}{2}$، $\text{عہ} = ۰$ ۔ نیز $\frac{\text{فر بہ}}{\text{فرت}}$ وہ شرح ہے جس سے ولا اور محور ۱ کا درمیانی زاویہ بڑھتا ہے اور صریحاً یہ $\text{سہ}_{\text{۳}}$ ہے ۔ اسی طرح $\frac{\text{فر جہ}}{\text{فرت}} = -\text{سہ}_{\text{۲}}$، اور $\frac{\text{فر عہ}}{\text{فرت}} = ۰$ ۔

(۳۰۸) اِن تمام اندراجات کو عمل میں لانے سے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر جس پر محوروں کے یہ دو جٹ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں مساوات (۱۳۰) شکل

$$\frac{\text{فر سـ}_{\text{لا}}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر سـ}_{1}}{\text{فر ت}} - \text{سـ}_{2} \times \text{سـ}_{3} + \text{سـ}_{3} \times \text{سـ}_{2}$$

$$= \frac{\text{فر سـ}_{1}}{\text{فر ت}}$$

اختیار کرتی ہے۔ پس زیر بحث لمحہ پر رشتے

$$\text{سـ}_{\text{لا}} = \text{سـ}_{1} \text{، وغیرہ}$$

اور نیز

$$\frac{\text{فر سـ}_{\text{لا}}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{فر سـ}_{1}}{\text{فر ت}} \quad \text{وغیرہ}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ مبدا یا تو ایک ثابت نقطہ ہے یا جسم کا مرکز ثقل۔ پہلی صورت میں

$$\text{ع} = \text{و} = \text{ط} = 0 \text{، ہمیشہ}$$

دوسری صورت میں

$$\bar{\text{ا}} = \bar{\text{ما}} = \bar{\text{ی}} = 0 \text{، ہمیشہ}$$

نیز فرض کرو کہ حوالے کے محور، جمود کے صدر محور منتخب کئے گئے ہیں جو مبدا میں سے گذرتے ہیں تو

$$\text{د} = \text{ع} = \text{ف} = 0$$

یہ تمام اندراجات مساوات (۱۲۸) اور اِس کے مشابہ دو مساواتوں میں کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساواتیں شکل

$$\text{ا} \frac{\text{فر سـ}_{1}}{\text{فر ت}} - (\text{ب} - \text{ج})\, \text{سـ}_{2}\, \text{سـ}_{3} = \text{ل} \qquad (۱۳۱)$$

$$\text{ب} \frac{\text{فر سـ}_{2}}{\text{فر ت}} - (\text{ج} - \text{ا})\, \text{سـ}_{3}\, \text{سـ}_{1} = \text{م} \qquad (۱۳۲)$$

$$\text{ج}\,\frac{\text{فرسہ}_3}{\text{فرت}} - (\text{ا} - \text{ب})\,\text{سہ}_1\,\text{سہ}_2 = \text{ن} \qquad (۱۳۳)$$

اختیار کرتی ہیں ۔ اِن مساواتوں کو **یولر کی مساواتیں** کہا جاتا ہے ۔

(۳۰۹)

سیارہ کی گردش

۲۵۳ — اِن مساواتوں کے استعمال کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک اُستوار جسم کی حرکت کا امتحان کرتے ہیں جو ایک محور کے گرد متشاکل ہے اور ایسی قوتوں کے زیرِ عمل ہے جو سب کی سب مرکز ثقل میں سے گذرتی ہیں ۔ یہ شرطیں تقریبی طور پر اُن شرطوں کو تعبیر کرتی ہیں جو حاصل ہوتی ہیں جب کہ ایک سیارہ اپنے مدار میں حرکت کرتا ہے یا ایک ستارہ فضا میں حرکت کرتا ہے ۔

فرض کرو کہ ہم مرکز ثقل کو مبداء اور تشاکل کے محور کو محور ا لیتے ہیں ۔ فرض کرو کہ جمود کے معیار ا، ب، ب ہیں ۔ تب حرکت کی مساواتیں ہیں :

$$\text{ا}\,\frac{\text{فرسہ}_1}{\text{فرت}} = ۰\,، \qquad (۱۳۴)$$

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرسہ}_2}{\text{فرت}} = (\text{ب} - \text{ا})\,\text{سہ}_3\,\text{سہ}_1\,، \qquad (۱۳۵)$$

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرسہ}_3}{\text{فرت}} = -(\text{ب} - \text{ا})\,\text{سہ}_1\,\text{سہ}_2\,، \qquad (۱۳۶)$$

پہلی مساوات سے سہ_1 کا مستقل ہونا فوراً معلوم ہو جاتا ہے ۔ فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے ۔ اب اگر ہم لکھیں

$$\text{گ} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب}}\,\text{طا}$$

تو مساواتیں (۱۳۵) اور (۱۳۶) ہو جاتی ہیں

$$\frac{ف\,س_۲}{ف\,ت} = گ\,س_۳ ، \qquad (۱۳۷)$$

$$\frac{ف\,س_۳}{ف\,ت} = -\,گ\,س_۲ ، \qquad (۱۳۸)$$

اس طرح $\frac{ف^۲\,س_۲}{ف\,ت^۲} = گ\,\frac{ف\,س_۳}{ف\,ت} = -\,گ^۲\,س_۲$

اور اس کا حل ہے

$$س_۲ = ع\ جم\,(گ\,ت + صہ)$$

اور مساوات (۱۳۷) سے اب حاصل ہوتا ہے

$$س_۳ = -\,ع\ جب\,(گ\,ت + صہ)$$

اِس لیے لمحہ ت پر زاویٔ رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$طا ،\ ع\ جم\,(گ\,ت + صہ) ،\ -\,ع\ جب\,(گ\,ت + صہ)$$

ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کا محور ایک مخروط مرتسم کرتا ہے اور اس کا دَور (۳۱۰)

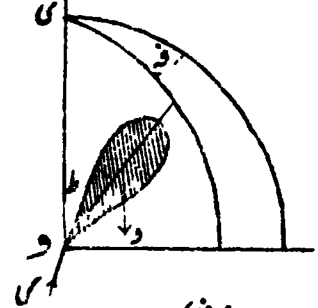
$\frac{۲\pi}{گ}$ یا $\frac{۲\pi}{طا}\,\frac{ب}{ب-ا}$ ہے۔

اگر ب، ا سے بہت قریب ہو تو دَور بہت بڑا ہو سکتا ہے اور اِس لیے حرکت بہت سُست ہوگی۔ یہ زمین کی صورت میں واقع ہوتا ہے، گردش کے محور کی حرکت وہ مظہر پیدا کرتی ہے جس کو عرض بلد کا تغیر کہتے ہیں اور اِس کا دَور تقریباً ۴۲۸ یوم ہے۔ چونکہ دَور $\frac{۲\pi}{طا}$ تقریباً ایک یوم کو تعبیر کرتا ہے اس لیے ہم اِس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زمین کے لیے $\frac{ب-ا}{ب}$ کا رتبہ $\frac{۱}{۴۲۸}$ ہے۔

اِس مقدار کی صحیح قیمت ۰۰۳۲۸ ہے، یہ تناقص زمین کی نا مکمل اُستواریت کا نتیجہ ہے۔

لٹو کی حرکت

۲۵۴ — اِس باب کے طریقوں کی دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک گھومتے ہوئے لٹو کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔ ہم فرض کریں گے کہ لٹو ایک گردشی مجسم ہے جو ایک کیل پر گھوم رہا ہے جس کی نوک ایک نقطہ ہے اور کیل اور اُس سطح کے درمیان تماس جس پر وہ ٹکا ہوا ہے پھسلن کو روکنے کے لیے کافی کھُردرا ہے۔ پس نقطۂ تماس ایک ثابت نقطہ و ہے۔ فرض کرو کہ ہم فضا میں ثابت محور ولا، وما، وی لیتے ہیں جن میں محور وی انتصابی ہے اور نیز فرض کرو کہ جسم میں ثابت محور ۱، ۲، ۳ ہیں جو و میں سے



شکل (۱۵۰)

گذرنے والے جمود کے صدر محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ محور ۱، لٹو کا تشاکل کا محور ہے اور فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد جمود کے معیار ا، ب، ب ہیں۔

یولر کی مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہو جاتی ہے

$$ا \frac{\text{فر} \, \omega_1}{\text{فر} \, ت} = ۰$$

کیونکہ ب = ج اور ل = ۰۔ اِس طرح ω_1 مستقل ہے، فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ لٹو کا محور اُس اکائی کرہ کو جو و کے گرد کھینچا گیا ہے ایک

نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے قطبی محدد ا ' طہ ' فہ ہیں جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو انتصابی اور لٹو کے محور کے درمیان ہے ۔

لٹو کی توانائی بالحرکت بموجب دفعہ (۲۴۸) (۳۱۱)

$$\frac{1}{2}\left[\text{ا طا}^2 + \text{ب}\left(\text{سہ}_1^2 + \text{سہ}_2^2\right)\right]$$

ہے اور توانائی بالقوہ ک ج ھ جم طہ ہے جہاں ھ وہ فاصلہ ہے جو لٹو کے مرکز ثقل اور و کے درمیان ہے ۔ اِس طرح توانائی کی مساوات سے

$$\text{ا طا}^2 + \text{ب}\left(\text{سہ}_1^2 + \text{سہ}_2^2\right) + \text{۲ک ج ھ جم طہ} = \text{ع} \quad (۱۳۹)$$

جہاں ع ایک مستقل ہے ۔ اِس کو ایک مختلف شکل میں رکھا جا سکتا ہے ۔ کیونکہ $\text{سہ}_1^2 + \text{سہ}_2^2$ ' لٹو کے محور کی زاویائی رفتار کا مربع ہے اور اِس لیے اکائی کرہ پر کے نقطہ ا ' طہ ' فہ کی حقیقی رفتار کا مُربع ہے اور اِس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ}_1^2 + \text{سہ}_2^2 = \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{جب}^2\,\text{طہ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$

توانائی کی مساوات اب شکل

$$\text{ا طا}^2 + \text{ب}\left[\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{جب}^2\,\text{طہ}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2\right] + \text{۲ک ج ھ جم طہ} = \text{ع} \quad (۱۴۰)$$

اختیار کرتی ہے ۔

ہم ایک تیسری مساوات اِس واقعہ سے حاصل کر سکتے ہیں کہ انتصابی محور و ی کے گرد زاویائی معیار حرکت مستقل ہے ۔ اِس زاویائی معیار حرکت کو

(ا) معیار حرکت جو محور ا کے گرد گردش طا کی وجہ سے ہے '

اور (ب) معیار حرکت جو لٹو کے محور کی حرکت کی وجہ سے ہے

کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے ۔

محور ا کے گرد گردش طا کو پھر گردشوں طا جب طہ، طا جم طہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جو علی الترتیب افقی اور انتصابی کے گرد ہیں، ان گردشوں سے معیارِ حرکتوں کے معیار، افقی اور انتصابی کے گرد ا طا جب طہ، ا طا جم طہ حاصل ہوتے ہیں ۔ اس لیے معیارِ حرکت کا معیار جو حصہ (ا) سے شامل ہوتا ہے ا طا جم طہ ہے ۔

لٹو کے محور کی حرکت کو دو گردشوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے:

(۱) زاوئی رفتار جب طہ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ کی گردش جو اُس محور کے گرد ہے جو انتصابی کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{۲}$ ـ طہ بناتا ہے،

(۲) زاوئی رفتار $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کی گردش جو ایک افقی محور کے گرد ہے ۔ (۳۱۲)

اول الذکر (۱) کو انتصابی کے گرد گردش جب^{۲} طہ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ اور ایک افقی محور کے گرد گردش جب طہ جم طہ $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے ۔

اِس لیے حرکت کے حصہ (ب) سے انتصابی کے گرد جو معیارِ حرکت کا معیار شامل ہوتا ہے وہ

$$\text{ب جب}^{۲}\text{ طہ } \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$$

ہے اور چونکہ انتصابی کے گرد معیارِ حرکت کا معیار ایک مستقل قیمت رکھتا ہے اِس لیے فرض کرو کہ یہ مستقل گ ہے تو

$$\text{ا طا جم طہ + ب جب}^{۲}\text{ طہ } \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}} = \text{گ} \quad (۱۴۱)$$

اگر ہم $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}$ کو اِس مساوات اور مساوات (۱۴۰) سے ساقط

کریں تو حاصل ہوتا ہے

ب جب^۲ طہ [ا طا^۲ + ب (فرطہ / فرت)^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ - ع]

+ (گ - ا طا جم طہ)^۲ = ۰ (۱۴۲)

اِس مساوات سے طہ کی قیمت کے تغیرات حاصل ہوتے ہیں اور اِس لیے انتصابی کے ساتھ لٹو کے محور کے میلان میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں اِن کو ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

طہ کی اعظم اور اقل قیمتیں، فرطہ / فرت = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں اور اِس لیے یہ قیمتیں مساوات

ب (۱ - جم^۲ طہ) [ا طا^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ - ع]

+ (گ - ا طا جم طہ)^۲ = ۰ (۱۴۳)

کی اصلیں ہیں۔

فرض کرو کہ اِس مساوات کی دائیں جانب کو ہم ف (جم طہ) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب چونکہ ف، تیسرے درجہ کا ایک تفاعل ہے اسلیے جم طہ کی تین اصلیں ہوں گی۔ فرض کرو کہ لٹو کو زاویہ طہ = طہ. پر چلایا گیا ہے اور فرطہ / فرت کی قیمت (فرطہ / فرت). کے مساوی ہے۔ تب مساوات (۱۴۲) سے

ب جب^۲ طہ. [ا طا^۲ + ب (فرطہ / فرت)^۲. + ۲ ک ج ھ جم طہ. - ع]

+ (گ - ا طا جم طہ.)^۲ = ۰

اور اِس لیے ف (جم طہ.) = ب جب^۲ طہ. [ا طا^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ. - ع]

+ (رگ - ا طا جم طہ)^۲ = - ب^۲ جب^۲ طہ (فر طہ / فر ت)^۲

اِس لیے ف (جم طہ) منفی ہے۔ ہم آسانی سے مساوات (۱۴۳) سے معلوم کرتے ہیں کہ (۲۱۴)

ف (۱) = (رگ - ا طا)^۲

اِس لیے ف (۱) مثبت ہے۔

نیز ف (-۱) = (رگ + ا طا)^۲

اِس لیے ف (-۱) مثبت ہے اور

ف (+ ∞) = - ۲ ک ن ∞ ب (+ ∞)^۲

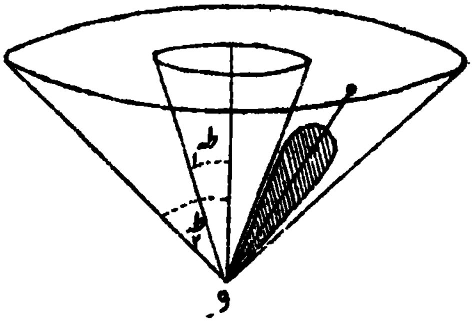
جو منفی ہے۔ اِس طرح ہم دیکھ چکے ہیں کہ

جب، جم طہ = + ∞ تو ف (جم طہ) منفی ہے،
جب، جم طہ = ۱ تو ف (جم طہ) مثبت ہے،
جب، جم طہ = جم طہ. تو ف (جم طہ) منفی ہے،
جب، جم طہ = -۱ تو ف (جم طہ) مثبت ہے۔

اِس لیے کعبی ف (جم طہ) = ۰ کی تین اصلیں حسب ذیل طریقہ پر واقع ہوتی ہیں:

ایک اصل طہ = طہ۱ جو جم طہ = ۱ اور جم طہ = جم طہ. کے درمیان ہے
ایک اصل طہ = طہ۲ جو جم طہ = جم طہ. اور جم طہ = -۱ کے درمیان ہے
ایک اصل وہ ہے جس کے لیے جم طہ عدداً اکائی سے بڑا ہے اور اِس لیے طہ کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی۔

اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ وہ نقطے جن پر فر طہ / فر ت معدوم ہو سکتا ہے صرف طہ = طہ۱ اور طہ = طہ۲ ہیں۔ اِن نقطوں پر فر طہ / فر ت معدوم ہوتا ہے اور چونکہ اِن میں سے کسی نقطہ پر مساوی اصلیں نہیں ہیں اِس لیے



شکل (۱۵۱)

(فرطہ / فرت) اِن نقطوں پر پہنچ کر علامت تبدیل کرتا ہے اور اس لیے طہ، صرف قیمتوں طہ₁ اور طہ₂ کے درمیان تبدیل ہو سکتا ہے۔ پس لٹو کا محور دو مخروطوں طہ = طہ₁ اور طہ = طہ₂ کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔

۲۵۵ — فرض کرو کہ ہم وہ کم سے کم زاویٔ معیارِ حرکت معلوم کرنا چاہتے (۳۱۴)
ہیں جو لٹو کا ہونا چاہیئے تاکہ وہ بغیر گر پڑنے کے گھومتا رہے۔ اس کے لیے ہم مان سکتے ہیں کہ لٹو گرے گا اگر کبھی طہ، ایک خاص حد طہ₃ سے تجاوز کرے خواہ اس کا گرنا کیل کے پھسلنے سے یا اس کا پہلو زمین کو مس کرنے سے وقوع پذیر ہوا ہو۔ وہ شرط کہ لٹو گر نہ پڑے یہ ہے کہ طہ₂ کو طہ₃ سے کم ہونا چاہیئے اور اس لیے ف (جم طہ₃) کو مثبت ہونا چاہیئے۔ اسلئے ع، گ، اور طا کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ

ب جب² طہ₃ (اطا² + ۲ک ج ھ جم طہ₃ − ع) + (گ − اطا جم طہ₃)²

مثبت ہو۔

فرض کرو کہ لٹو کو انتصابی کے ساتھ میلان طہ₀ پر ابتداً گھمایا گیا ہے اور لٹو اپنے محور کے گرد گردش طا کے سوا کوئی اور حرکت نہیں رکھتا۔ اب مساواتوں (۱۴۰) اور (۱۴۱) سے

ع = اطا² + ۲ک ج ھ جم طہ₀،
گ = اطا جم طہ₀.

اس طرح

ف (جم طہ₃) = ب جب² طہ₃ (اطا² + ۲ک ج ھ جم طہ₃ − ع)

+ (۲ گ - أ طا جم طہ۳)^۲

= ب جب^۲ طہ۳ × ۲ ک ج ھ (جم طہ۳ - جم طہ۰) + أ^۲ طا^۲ (جم طہ۳ - جم طہ۰)^۲

= (جم طہ۳ - جم طہ۰) [۲ ک ج ھ ب جب^۲ طہ۳ + أ^۲ طا^۲ (جم طہ۳ - جم طہ۰)]

(۱۴۴) . . . .

چونکہ لٹو کو ایک ایسے محل میں ضرور چلایا گیا ہے جس میں وہ گھوم سکتا ہے اس لیے جم طہ۳ - جم طہ۰ کی قیمت ضرور منفی ہے۔ اس لیے ف (جم طہ۳) کے مثبت ہونے کے لیے

أ^۲ طا^۲ (جم طہ۰ - جم طہ۳) - ۲ ک ج ھ ب جب^۲ طہ۳ (۱۴۵)

کو مثبت ہونا چاہئے یا

(۱۴۶) طا^۲ > ۲ ک ج ھ ب جب^۲ طہ۳ / أ^۲ (جم طہ۰ - جم طہ۳)

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر أ بہت چھوٹا ہے تو طا کی وہ قیمت جو لٹو کو گرنے سے بچانے کیلئے مطلوب ہے بہت بڑی ہے۔ اس لیے چھوٹی عمودی تراش کے لٹو کو گھمانا بہت مشکل ہے مثلاً سیسے کی پنسل یا نوکدار تار لو۔

اگر ہم اس زاویہ کا انتخاب کر سکیں جس پر لٹو گھومنا شروع کرتا ہے تو گویا جم طہ۰ اختیاری ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ طا کی مطلوبہ قیمت کم سے کم ہوگی جبکہ جم طہ۰ اعظم ہو یعنے جبکہ لٹو کو انتصاباً گھمایا گیا ہو۔ اس صورت میں لٹو گھومیگا اگر (۳۱۵)

طا^۲ > ۲ ک ج ھ ب جب^۲ طہ۳ / أ^۲ (۱ - جم طہ۳)

یا اگر طا^۲ > ۲ ک ج ھ ب (۱ + جم طہ۳) / أ^۲

۲۵۶ — بالعموم اگر لٹو انتصاباً گھومنے کی ابتدا کرے اور اس کے محور کے گرد خالص گردش کے سوا کوئی اور رفتار نہ ہو تو مساوات (۱۴۴) میں $\text{جم}\,\text{طہ}_0 = 1$ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{جم}\,\text{طہ}) = (1 - \text{جم}\,\text{طہ})^2 \left[\text{ا}^2\,\text{طا}^2 - 2\,\text{ک ج ہ ب}\,(1 + \text{جم}\,\text{طہ}) \right]$$

مساوات $\text{ف}(\text{جم}\,\text{طہ}) = 0$ کی اصلیں ہیں

$$\text{جم}\,\text{طہ} = +1،\ +1،\ \frac{\text{ا}^2\,\text{طا}^2}{2\,\text{ک ج ہ ب}} - 1$$

فرض کرو کہ ہم لکھتے ہیں

$$\text{طا}_0^2 = \frac{4\,\text{ک ج ہ ب}}{\text{ا}^2}$$

تو جب، $\text{طا}^2 = \text{طا}_0^2$ تو اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$\text{جم}\,\text{طہ} = +1،\ +1،\ +1$$

اور جب، $\text{طا}^2 > \text{طا}_0^2$ تو تیسری اصل اکائی سے بڑی ہے اور جب، $\text{طا}^2 < \text{طا}_0^2$ تو تیسری اصل اکائی سے کم ہے، فرض کرو $\text{جم}\,\text{طہ} = \text{جم}\,\text{ظہ}$ جہاں ظہ ایک حقیقی زاویہ ہے جو مساوات

$$\text{جم}\,\text{ظہ} = \frac{\text{ا}^2\,\text{طا}^2}{2\,\text{ک ج ہ ب}} - 1 = 1 - \frac{2(\text{طا}_0^2 - \text{طا}^2)}{\text{طا}_0^2} \qquad (۱۴۷)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

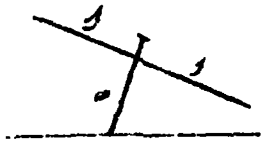
پس جب تک $\text{طا}^2 > \text{طا}_0^2$ اہتزازات منطبق حدود $\text{طہ} = 0$ اور $\text{طہ} = 0$ کے درمیان مقید رہتے ہیں اور اس لیے لٹو انتصابی رہتا ہے لیکن جوں ہی $\text{طا}^2 < \text{طا}_0^2$ اہتزازات حدود $\text{طہ} = 0$ اور $\text{طہ} = \text{ظہ}$ کے درمیان ہونے لگتے ہیں

فرض کرو کہ ہم لٹو کو زاویئی رفتار طا سے جو طا_0 سے بڑی ہے چلاتے ہیں، اس لیے پہلے پہل اس کا محور انتصابی ہے اور لٹو کی حرکت صرف اس کے محور کے گرد گردش کی حرکت ہے ۔ اب طہ کی حقیقی اصلیں ۰، ۰ ہیں

اور اس لیے اہتزازات کی کوئی سعت نہیں ہے اور لٹو کا محور ٹھیک انتصابی رہتا ہے (۳۱۶)
اس کو انگریزی عام زبان میں کہتے ہیں کہ لٹو "Asleep" ہے اور اردو میں اسکو لٹو کی نیند کہا جاتا ہے
اگر مفروضہ شرطیں بدرجہ اتم پوری ہوتیں تو یہ حرکت دائم جاری رہتی
لیکن فطرت میں ایسی کامل شرطیں موجود نہیں ہو سکتیں۔ کیل اور اس سطح کے درمیان جس پر لٹو گھومتا ہے تماس کا علاقہ ٹھیک ایک نقطہ نہیں ہوتا بلکہ ایک چھوٹا دائرہ یا قطع ناقص ہوتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ تماس پر تھوڑا سا پچکاؤ وقوع پذیر ہوتا ہے۔ کیل کو سخت فولاد کا بنانے اور لٹو کو ایک سخت سطح پر گھمانے سے یہ علاقہ چھوٹا بنایا جا سکتا ہے لیکن وہ پھر بھی محدود ابعاد کا ہوگا۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ کیلے پر کے تعاملات سب کے سب محور سے نہیں ملتے۔ لٹو کی گردش میں مزاحمت پیدا کرنے والا ایک فر کی چھوٹا جفت ہوتا ہے اور طا بتدریج گھٹتا ہے۔

جب طا اتنا گھٹ جاتا ہے کہ وہ طا. سے کم ہوتا ہے تو اہتزاز کی سعتیں طہ ... اور طہ ... ظہ ہوتی ہیں۔ لٹو اب نیند میں نہیں ہوتا بلکہ زاویہ ظہ میں سے لڑکھڑانے لگتا ہے۔ جیسے طا گھٹنا جاری رکھتا ہے ظہ مسلسل بڑھتا ہے جو مساوات (۱۴۷) سے ظاہر ہے اور بالآخر ظہ اتنی بڑی قیمت تک پہنچ جاتا ہے کہ لٹو زمین پر لڑھکنے لگتا ہے اور اسلیے گر پڑتا ہے۔

۲۵۷ — ایک بہت ہی سادہ قسم کے لٹو کی صورت میں یہ نتیجے جو شکل اختیار کرتے ہیں اُن کا امتحان کرنا دلچسپی کا موجب ہوگا۔ فرض کرو کہ کمیت ک اور نصف قطر ا کی ایک ایکساں قرص ہے اور اس کے مرکز میں سے ایک پن گذار کر لٹو بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ پن کا وہ طول جو قرص میں سے اس کی نچلی جانب نکلا ہوا ہے ہ ہے اور فرض کرو کہ قرص کی کمیت کے



شکل (۱۵۲)

مقابلہ میں پن کی کمیت قابلِ نظر انداز ہے۔ ھ وہی ہے جو دفعات ماسبق کے مسائل تحلیلی میں فرض کیا گیا تھا۔ ا اور ب کی قیمتیں ہیں

$$\text{ا} = \frac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{ا}^2 \ ،\ \text{ب} = \frac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{ا}^2$$

اِس لیے
$$\text{طا}_0^2 = \frac{4\,\text{ک ج ھ ب}}{\text{ا}^2} = \frac{4\,\text{ج ھ}}{\text{ا}^2}$$

جب لٹو فاصل رفتار طا۰ پر جس پر لڑکھڑانے کی ابتدا ہوتی ہے گھومنے لگتا ہے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار طا۰ ا ہے یعنی $2\sqrt{\text{ج ھ}}$۔ اس طرح لڑکھڑانا شروع ہوتا ہے جبکہ کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار $2\sqrt{\text{ج ھ}}$ میں گھٹ جاتی ہے، یہ رفتار ایسی ہے جو صرف قرص کے ارتفاع پر منحصر ہے اور اس کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔ چنانچہ ہم دیکھتے ہیں کہ قرص جتنا نیچے ہوگا اتنا سُست وہ بغیر لڑکھڑائے گھومے گا۔ اگر ہم ھ = ۲" لیں تو معلوم ہوگا کہ لڑکھڑانا شروع ہوتا ہے جبکہ کور کی رفتار تقریباً ۴،۷ فٹ فی ثانیہ ہے۔

کور زمین کو مس کرے گی جبکہ لڑکھڑانے کی سعت مس ظہ = $\frac{\text{ھ}}{\text{ا}}$ سے (۳۱۷)
حاصل ہو اور اس کے بعد لٹو زمین پر لڑھکنے گا۔ اگر ہم حسب سابق ا = ۶" اور ھ = ۲" لیں تو مس ظہ = $\frac{1}{3}$ اور اِس لیے جم ظہ = $\frac{3}{\sqrt{10}}$ اور $\frac{\text{طا}_0^2 - \text{طا}^2}{\text{طا}_0^2}$ = ۱۰۶، تقریباً۔ اس طرح طا = $\frac{19}{20}$ طا۰ تقریباً۔ پس ایسا لٹو نیند میں رہے گا تا آنکہ اس کی کور کی رفتار ۴،۷ فٹ فی ثانیہ تک گھٹ جائے۔ اس کے بعد وہ لڑکھڑائے گا اور جوں ہی اس کی کور کی رفتار تقریباً ۴،۵ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ تک گھٹ جائے گی وہ زمین پر لڑھکنے لگیگا۔

معمولی چھوٹے لٹو کے لیے جس کی شکل ناشپاتی جیسی ہوتی ہے ہم ھ = $1\frac{1}{2}$" تقریبی طور پر لے سکتے ہیں اور نقطہ تماس میں سے گذرنے والے محوروں کے گرد گھماؤ کے نصف قطروں کو $\frac{3}{4}$" اور ۲" لے سکتے ہیں۔ اس لیے

انچوں میں

$$\text{ا} = \frac{9}{16}\,\text{ک}\,،\quad \text{ب} = 4\,\text{ک}\,؛$$

$$\text{طا}^2 = \frac{4\,\text{ک ج ہ ب}}{\text{ا}^2} = \frac{20.48}{27}\,\text{ج}$$

ج = ۳۸۶″ فی ثانیہ فی ثانیہ لینے سے طا = ۱۷۰ گردشیں فی ثانیہ۔ اگر لٹو کو ایک ڈوری سے گھمایا گیا ہو جس کا سرا لٹو کے گرد نصف قطر ایک انچ کے دائروں میں لپیٹا گیا ہے تو ڈوری کو لٹو کے لحاظ سے تقریباً ۶۰ میل فی گھنٹے کی رفتار سے کھینچنا چاہئے تاکہ مطلوبہ زاوئی رفتار پیدا ہو۔

عام مثالیں

۱۔ ایک اُڑ پہیہ کے جمود کا معیار م ہے، اس کے محور کے گرد جس کا نصف قطر ب ہے ایک ڈوری لپٹی ہوئی ہے۔ وزن د کے مساوی تناؤ ایک ثانیہ تک ڈوری پر عائد کیا گیا ہے۔ ایک ثانیہ کے ختم پر اُڑ پہیہ کی زاوئی رفتار کیا ہوگی؟

۲۔ ایک بحری بیڑہ جس کا مجموعی ہٹاؤ ۲۰۰۰۰۰ ٹن ہے خط اُستوا پر مشرق سے مغرب کی جانب حرکت کرتا ہے اور فی گھنٹہ طول بلد کے ۲۰ دقیقے طے کرتا ہے۔ زمین کو کمیت 6×10^{21} ٹن کا ایک متجانس کرہ سمجھ کر زمین کی زاوئی رفتار میں تبدیلی معلوم کرو جو بیڑے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تقریباً 16×10^{-4} ثانئے کا اضافہ ہوتا ہے۔

۳۔ زمین کی کمیت 6×10^{21} ٹن ہے اور برف کے ٹیلے اور پگھلا ہوا برف وزنی ۱۰ ٹن قطب شمالی سے عرض بلد ۴۵° کی جانب حرکت کرتے ہیں۔ دن کے طول میں تبدیلی معلوم کرو۔

۴۔ کمیت ک کی ایک ٹرین شمالاً ۶۰ میل فی گھنٹہ سے دوڑتی ہے۔ ثابت کرو کہ مشرقی پٹڑی اور پہیہ کی کوروں کے درمیان زمین کی گردش کی وجہ سے

ایک دباؤ ہونا چاہیئے، اِس دباؤ کی مقدار معلوم کرو۔

۵۔ زمین پر شہابوں کے گرنے سے جو تمام سمتوں سے زمین پر پہنچتے ہیں غبار کی ایک پتلی تہ جمتی ہے جس کی موٹائی ھ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تبدیلی تقریباً $\frac{۵\,ھ\,غہ}{ا\,د}$ فی یوم ہوگی جہاں زمین کا نصف قطر فٹوں میں ا ہے اور زمین اور شہابی غبار کی کثافتیں علی الترتیب د اور غہ ہیں۔

۶۔ دو کمیتیں ک اور ک' جو چرخ اور محور سے لٹکائی گئی ہیں متوازن نہیں ہیں، چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ ک کا اسراع

$$\frac{ک\,ا - ک'\,ب}{ک\,ا^{2} + ک'\,ب^{2} + م}\,ا\,ج$$

ہے جہاں م، مشین کے جمود کا معیار اِس کے محور کے گرد ہے۔

۷۔ ایک ہلکی، کامل ملائم، نا استداد پذیر ڈوری ایک یکساں اسطوانے کی مرکزی تراش کے گرد لپٹی ہوئی ہے۔ ڈوری کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گرنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ اسراع $\frac{۲}{۳}$ ج کے ساتھ گرے گا۔

۸۔ طول ۲ ا کے دو مساوی یکساں ڈنڈے ایک سرے پر ڈھیلے جوڑے گئے ہیں اور اِن کو نصف قطر $\frac{ا\sqrt{۲}}{۳}$ کے ایک ثابت کرہ پر متشاکلاً رکھکر ایک افقی محل میں اِس طرح اٹھایا گیا ہے کہ قبضہ کرہ کو مس کرتا ہے۔ تب اِن کو اترنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب وہ اولاً ساکن ہوتے ہیں تو وہ افق سے زاویہ $جم^{-1}\frac{1}{۳}$ پر مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ ہر نقطہ تماس پر کرہ پر دباؤ ایک ڈنڈے کے وزن کا ایک ربع ہے اور نیز یہ کہ قبضہ پر کوئی فساد نہیں ہے۔

۹۔ ایک ڈنڈے کا ایک سرا ایک چکنے افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرا سرا ایک چکنی انتصابی دیوار پر، ڈنڈا افق سے زاویہ عہ پر مائل ہے۔

اگر اِس کو پھسلنے چھوڑ دیا گیا تو ثابت کرو کہ وہ دیوار سے جدا ہوگا جبکہ افق کے ساتھ اِس کا میلان جب$^{-1}$ ($\frac{۲}{۳}$ جب عہ) ہو جائے ۔

۱۰ ۔ اگر سورج بتدریج اِس طریقہ پر سکڑے کہ ترکیب اور شکل میں ہمیشہ اپنے مشابہ رہے تو ثابت کرو کہ جب ہر نصف قطر اپنے طول کا ن واں حصہ سکڑ چکے جہاں ن بڑا ہے تو زاوئی رفتار اپنی پہلی قیمت سے ($۱ + \frac{۲}{ن}$) گنا بڑھ جائے گی گردش کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی معلوم کرو ۔

۱۱ ۔ ایک لچکدار پٹے کا طبعی طول ۲ π ا، کمیت ک، اور مقیاس لہ ہے ۔ یہ پٹہ، افقی مستوی میں نصف قطر ا کے ایک کھردرے پہیہ پر ساکن ہے پٹہ کو پہیہ کے محیط کے مقابل پکڑ کر پہیہ کو زاوئی رفتار طا کے ساتھ گھمایا گیا۔ اگر پٹہ کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وسیع ہوگا اور جب اِس کا نیم قطر ر ہوگا تو اِس کی زاوئی رفتار $\frac{ا^۲ طا}{ر^۲}$ ہوگی اور اِس کی نیم قطری رفتار

$$\left[\frac{ا^۲ طا^۲}{ر^۲}(ر^۲ - ا^۲) - \frac{۲\pi لہ (ر - ا)^۲}{ک ا}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

ہوگی ۔

۱۲ ۔ ایک ایکساں مثلثی قرص ا ب ج کو اِس طرح سہارا گیا ہے کہ وہ اپنے مستوی میں ا کے گرد اہتزاز کر سکتا ہے، اِس کا مستوی انتصابی ہے ثابت کرو کہ اِس کے مماثل سادہ رقاص کا طول (۲۱۹)

$$\frac{۱}{۴} \frac{۳ (ب^۲ + ج^۲) - ا^۲}{\sqrt{۲ (ب^۲ + ج^۲) - ا^۲}}$$

ہے ۔

۱۳ ۔ کمیت ک کے شیشے کے ایک مکعب میں نصف قطر ا کا ایک کروی جوف بنایا گیا ہے اور اِس جوف کے اندر کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا گیا ہے ۔ پھر مکعب کو ایک چکنے افقی مستوی پر رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے

اگر ذرہ کرہ کے گرد ٹھیک ایک چکر لگائے اور اثنائے حرکت میں کرہ کو مس کرتا رہے تو ثابت کرو کہ

$$و^2 = ۵ ا ج + ۴ ا ج \frac{ک}{ک}$$

۱۴۔ ناقابل قدر کمیت کے ایک ڈنڈے کے سروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی ذرے لگائے گئے ہیں اور ایک سرے پر کے ذرہ پر ڈنڈے کے علی القوائم ایک ضرب لگائی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ذروں کی ابتدائی رفتاریں نسبت

$$۵ : ۲ : ۱$$

میں ہوں گی۔

۱۵۔ کمیت ک اور نصف قطر ا کا ایک کھردرا افقی اسطوانہ اپنے محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے۔ اس کے گرد ایک ڈوری لپیٹی گئی ہے جس کے آزاد سرے پر کمیت ک اور طول ل کی ایک زنجیر لگی ہوئی ہے۔ زنجیر کو ایکجا اکٹھا کر کے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر طہ وہ زاویہ ہو جس میں سے اسطوانہ زنجیر کے پوری طرح تن جانے سے وقت ت پیشتر گھوم چکا ہے تو ثابت کرو کہ

$$ک ا طہ = \frac{ک}{ل} \left(\frac{۱}{۲} ج ت^2 - ا طہ^2 \right)$$

۱۶۔ ایک ایکساں چپٹی دائری تھالی کو ایک کھردرے افقی مستوی پر پھینکا گیا ہے، اور کسی عنصر پر جو رفتار و سے حرکت کر رہا ہو رگڑ م $و^3 \times$ (عنصر کی کمیت) ہے جس کی سمت و کی سمت کے خلاف ہے۔ تھالی کے مرکز کا راستہ معلوم کرو۔

(۳۲۰)

بارہواں باب

تعمیم شدہ محدد

۲۵۸ — ابتک ہم نے مادی اجسام کے علم الحیل (حرکیات اور سکونیات) پر اس مفروضہ کے ساتھ بحث کی ہے کہ یہ اجسام لا تعداد چھوٹے ذروں پر مشتمل ہیں جو استوار جسم کی صورت میں اپنے اپنے محل پر مضبوطی کے ساتھ جکڑے ہوئے ہیں اور ان کے ذریعہ جسم کے ایک حصہ سے دوسرے حصہ تک قوت کو منتقل کیا جا سکتا ہے۔

۲۵۹ — استوار اجسام کی صورت میں بھی مادہ کی ساخت کے متعلق یہ قیاس بالکل مطابق نتائج پیدا نہ کر سکا۔ مثلاً دو غیر کامل لچکدار اجسام کے درمیان ٹکر کے بعد یا دو غیر کامل چکنے اجسام کے درمیان پھسلن کے بعد یہ معلوم ہوا ہے کہ توانائی کی کچھ مقدار نظروں سے غائب ہو جاتی ہے چنانچہ ہمیں یہ فرض کرنا پڑا تھا کہ یہ توانائی جسم کے انتہائی ذروں کی ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکتوں کے پیدا کرنے میں کام آتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں ٹکر یا پھسلن واقع ہونے کے بعد استوار اجسام کے متعلق یہ فرض نہیں کیا جا سکتا کہ وہ ان شرطوں کو پورا کرتے ہیں جن کا ادعا کیا گیا ہے۔

ان جسموں کی صورت میں جو صریحاً استوار نہیں ہیں حال اس سے زیادہ ابتر ہے۔ یہاں وہ قیاسات جو ہم نے استوار اجسام کے مطالعہ میں قائم کئے تھے کوئی مدد نہیں پہنچاتے اور ان کی بجائے دیگر قیاسات کے

بغیر آگے بڑھنا بہت دشوار ہے۔

۲۶۰ — اس منزل پر آگے بڑھنے کے دو طریقے ہیں۔ ہم ان نئے قیاسات کو جو احسن معلوم ہوں اختیار کر سکتے ہیں اور اس طریقہ پر زیر بحث مادہ کی ساخت کی تصویر کھینچ سکتے ہیں۔ لیکن یہ یقینی نہیں کہ اس طریقہ سے جو نتائج حاصل ہوں گے وہ صحیح ہوں گے کیونکہ کبھی بھی ہمیں اس کا یقین نہیں ہو سکتا کہ مادہ کی انتہائی ساخت کی نوعیت کے متعلق ہمارے قیاسات صحیح ہیں۔ پھر بھی ہم مادہ کی ساخت کے متعلق ان شرطی قیاسات کے ادخال سے یہ دیکھنا کہ کیا نتائج حاصل ہوتے ہیں خالی از قدر و قیمت نہیں ہے۔ اگر یہ نتیجے ان مظاہر کے مطابق ہیں جو فطرت میں زیر مشاہدہ آتے ہیں تو ہمارے شرطی قیاسات کا صداقت سے قریب ہونا درست ہو سکتا ہے۔ لیکن اس کے برخلاف اگر حاصل شدہ نتیجے ان مظاہر کے مطابق نہ ہوں تو ان قیاسات میں جن سے یہ نتیجے حاصل ہوتے ہیں یا تو ترمیم کرنی ہوگی یا انہیں ترک کرنا ہوگا۔

مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے ریاضی طبعیات کی مختلف شاخیں برآمد ہوں گی۔ تمثیلاً ریاضی طبعیات کی ایسی شاخوں میں سے "لچکدار ٹھوس اجسام کا نظریہ" اور "گیسوں کا حرکی نظریہ" پیش کئے جا سکتے ہیں۔ قبل الذکر کی بنیاد ان شرطی قیاسات پر ہے جو ان ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں جن سے ٹھوس اجسام کی ترکیب ہوتی ہے۔ اور بعد الذکر نظریہ کی بنیاد ان شرطی قیاسات پر ہے جو گیس کے ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں۔ مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے جو نتائج برآمد ہوتے ہیں ان کا تذکرہ اور تفہیم صریحاً اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

۲۶۱ — لیکن آگے بڑھنے کا ایک متبادل طریقہ ہے۔ ہم نے نیوٹن کے حرکت کے قوانین کو وہ مواد سمجھا ہے جو تجربی سائنس نے نظری سائنس کے لیے مہیا کیا ہے تاکہ نظری سائنس میں اس سے کام لیا جا سکے۔ ان

قوانین کی صداقت جبکہ انہیں مادی کائنات کے انتہائی ذروں پر استعمال کیا جائے کسی طرح یقینی نہیں ہے کیونکہ ہم ان انتہائی ذروں کو حاصل نہیں کر سکتے کہ ان پر تجربہ کیا جائے۔ تاہم فرض کرو کہ ہم اس کا امتحان کرتے ہیں کہ آیا علم الحیل میں صرف اس دعوے کے ساتھ (اور یہ بلاشبہ غیر یقینی ہے) کہ نیوٹن کے قوانین انتہائی ذروں پر اطلاق پذیر ہیں کوئی ترقی ہو سکتی ہے۔ اگر ہم اس سمت میں کوئی ترقی کر سکیں تو حاصل شدہ نتیجے بلاشبہ علم الحیل کی تمام دیگر توسیعات پر اطلاق پذیر ہوں گے خواہ ہم انتہائی ذروں کی نوعیت اور ترتیب کے متعلق کوئی مزید دعوے داخل کریں یا نہ کریں۔

۲۶۲ — وہ مقام جہاں سے ہم مادہ کو دیکھ رہے ہیں شائد ایک تمثیل سے واضح کیا جا سکتا ہے۔ اس تمثیل کو سب سے پہلے کلرک میاکسویل نے بیان کیا تھا۔ فرض کرو کہ ایک پیچیدہ مشین ایک بند کمرہ میں رکھی ہوئی ہے اور اس مشین اور بیرونی دنیا کے درمیان صرف متعدد رسیوں کے ذریعہ تعلق قائم ہے جو فرش کے سوراخوں میں سے نیچے کے کمرہ میں لٹک رہی ہیں۔ اگر کوئی شخص نیچے کے کمرہ میں داخل ہو تو اسے مشین کے معائنہ کرنے کا کوئی موقع نہیں ہے لیکن وہ مختلف رسیوں کو کھینچ کر مشین کو کچھ حد تک استعمال کر سکتا ہے۔ اگر ایک رسی کھینچنے پر اس کو معلوم ہو کہ دوسری رسیاں حرکت میں آتی ہیں تو وہ سمجھ سکتا ہے کہ یہ رسیاں اوپر کسی نہ کسی میکانیت کے ذریعہ مربوط ہونی چاہئیں لیکن وہ اس میکانیت کی ٹھیک نوعیت دریافت کرنے سے قاصر رہے گا۔

اس مخفی میکانیت کے متعلق یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ کائنات کی میکانیت کے ان حصوں کو تعبیر کرتی ہے جو ہماری نظر سے پوشیدہ ہیں اور رسیوں سے وہ حصے تعبیر ہوتے ہیں جن کو ہم چلا سکتے ہیں۔ فطرت میں بعض اعمال ہیں جن کو ہم انجام دے سکتے ہیں، یہ گویا ہماری تمثیل میں رسیوں کے کھینچنے کا جواب ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ان اعمال سے بعض نتائج پیدا ہوتے ہیں جو دوسری رسیوں کی حرکت کا جواب ہیں۔ لیکن وہ میکانیت

جس کی وجہ سے وہ سبب یہ اثر پیدا کرتا ہے بالکلیہ نامعلوم رہتا ہے مثلاً اگر ہم ایک برقی دَور کی چابی کو دبائیں تو یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ دُور رکھے ہوئے ایک برقی رو پیما کی سوئی حرکت کرتی ہے لیکن وہ حیلی اعمال جو دور کے تاروں میں سے اور برقی رو پیما کو گھیرے ہوئے اثیر میں سے اِس عمل کو منتقل کرتے ہیں نامعلوم رہتے ہیں۔

۲۶۴ — اب فرض کرو کہ وہ شخص جو نیچے کے کمرہ میں داخل ہوا ہے رسیوں کو اپنے حسب مرضی استعمال کرنے میں آزاد ہے اور یہ کہ وہ رسیوں کے درمیان تعلق کو دریافت کرنا چاہتا ہے ۔ وہ اِس قیاس پر ابتداء کر سکتا ہے کہ اوپر کے کمرہ کی مشین کی میکانیت میں (فرض کرو) بیرم چرخیاں اور دندانے دار پہیے شامل ہیں اور وہ بطور خود اُس طریقہ کا اندازہ لگا سکتا ہے جس میں رسیوں کو حرکت کرنا چاہئے اگر اس کے قیاسات صحیح ہیں۔ یہ عمل اُس کے مماثل ہوگا جس کو ہم دفعہ ۲۶۰ میں بیان کر چکے ہیں لیکن ہم اسکی تقلید یہاں نہیں کریں گے ۔

اِس کے برخلاف اوپر کی میکانیت کی نوعیت کے متعلق کسی قیاس آرائی کے بغیر نیچے کے شخص کو یہ معلوم ہوگا کہ اگر رسیاں کسی نہ کسی میکانیت کے ذریعہ مربوط ہیں تو اِن کی حرکت چند خاص قوانین کے تابع ہے مثلاً یہ کہنا کہ ہر ذرہ نیوٹن کے حرکت کے قانون کی پابندی کرتا ہے ۔

اِس کی تفہیم کے لیے فرض کرو کہ ہم سادہ ترین صورت لیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ صرف دو رسیاں ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی ا کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو دوسری رسی ب ہمیشہ دو انچ چڑھتی ہے ۔ میکانیت ایک بیرم، چرخیوں کا ایک نظام، یا دندانے دار پہیہ ہو سکتی ہے۔ لیکن خواہ وہ اِن میں سے کوئی ہو یا اِن سے بالکل مختلف کوئی اور انتظام ہو یہ معلوم ہوگا کہ رسی ا کی نیچے وار حرکت کو رسی ب پر ایک ایسی قوت لگا کر مقید کیا جا سکتا ہے جو ا پر عمل کرنے والی قوت کے نصف کے مساوی ہے یہ حقیقت موہوم کام کے اُصول سے منتج ہوتی ہے اور اس کو اُس قیاس سے

کوئی تعلق نہیں ہے جو مخفی میکانیت کی نوعیت کے متعلق قائم کیا گیا ہو۔
اب ہمارے سامنے حسب ذیل سوال ہے: کیا ہم مخفی میکانیت کے کسی علم کے بغیر یہ دریافت کرسکتے ہیں کہ رسیوں کی کیا حرکت پیدا ہوگی اگر ان کو کسی معلومہ طریقہ پر حرکت میں لایا جائے۔ اس کا جواب یہ ہے کہ ہاں ہم ایسا کرسکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں توانائی کی وہ مقدار معلوم ہو جو کسی قسم کی حرکت میں شامل رہتی ہے یعنے بشرطیکہ ہمیں ہر حرکت کی توانائی بالحرکت اور نیز ہر تشکیل (محل) کی توانائی بالقوہ معلوم ہو۔

اسی طرح اگر ہم تمثیلات سے حقیقتوں پر آئیں تو کائنات کی انتہائی میکانیت کے متعلق کسی علم کے بغیر ہم یہ معلوم کرسکتے ہیں کہ کسی ابتدائی شرطوں سے کیا حرکت پیدا ہوگی بشرطیکہ کائنات کے اس حصہ کی تمام تشکیلات کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ معلوم ہو جس سے ہم بحث کر رہے ہیں۔

ہیملٹن کا اصول

۲۶۴ — فرض کرو کہ ایک مادی نظام کے کسی واحد ذرہ کے محدد کسی آن لا_1، ما_1، ی_1 ہیں اور اس کی کمیت ک_1 ہے اور فرض کرو کہ اس پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں اُس کے حاصل کے اجزائے ترکیبی لا_1، ما_1، ے_1 ہیں۔ فرض کرو کہ اس ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع_1، و_1، ط_1 ہیں، اسلیے

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{فرلا}_1}{\text{فرت}} \text{، وغیرہ}$$

اب اگر اس ذرہ کی حرکت قوانین نیوٹن کے تابع ہے تو حاصل ہونا چاہئے

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}} = \text{لا}_1 \text{،} \qquad (۱۴۸)$$

ک۱ فرو۱ / فرت = ما۱ (۱۴۹)

ک۱ فرط۱ / فرت = ہے۱ (۱۵۰)

فرض کرو کہ ہم اِس حرکت کا مقابلہ قدرے مختلف حرکت سے جو قوانین نیوٹن کے تابع نہیں ہے کرتے ہیں۔ اِس دوسری حرکت میں فرض کرو کہ ک۱ کے محدد اُس آن جس پر یہ محدد حقیقی حرکت میں لا۱، ما۱، ی۱ ہیں لاَ۱، ماَ۱، یَ۱ سے تعبیر کئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اِس لمحہ پر رفتار کے اجزائے ترکیبی عَ۱، وَ۱، طَ۱ ہیں، اِس لیے (۳۲۴)

عَ۱ = فرلاَ۱ / فرت وغیرہ

فرض کرو کہ یہ مرمہ حرکت حقیقی حرکت سے اسقدر خفیف فرق رکھتی ہے کہ لاَ۱ ـ لا۱، عَ۱ ـ ع۱ جیسی کوئی مقدار جو صرف اِس فرق کے ایک حصہ کو تعبیر کرتی ہے ایک چھوٹی مقدار سمجھی جا سکتی ہے ـــ فرض کرو کہ ہم لاَ۱ ـ لا۱ کو مف لا۱ سے تعبیر کرتے ہیں اور ایسی ہی ترقیم دوسرے فرقوں کے لئے استعمال کرتے ہیں ـــ

مساواتوں (۱۴۸)، (۱۴۹)، (۱۵۰) کو جو ہر لمحہ پر درست ہیں مف لا۱، مف ما۱، مف ی۱ سے ضرب دو اور جمع کرو تو

ک۱ فرع۱ / فرت مف لا۱ + ک۱ فرو۱ / فرت مف ما۱ + ک۱ فرط۱ / فرت مف ی۱

= لا۱ مف لا۱ + ما۱ مف ما۱ + ہے۱ مف ی۱ (۱۵۱)

اب فرع۱ / فرت مف لا۱ = فر / فرت (ع۱ مف لا۱) ـ ع۱ فر / فرت (مف لا۱)

= فر / فرت (ع۱ مف لا۱) ـ ع۱ فر / فرت (لاَ۱ ـ لا۱)

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع}_1\ \text{مف}\ \text{لا}_1\right) - \text{ع}_1\left(\text{عَ}_1 - \text{ع}_1\right)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع}_1\ \text{مف}\ \text{لا}_1\right) - \text{ع}_1\ \text{مف}\ \text{ع}_1$$

اِس لئے

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}}\ \text{مف}\ \text{لا}_1 + \text{ک}_1 \frac{\text{فرو}_1}{\text{فرت}}\ \text{مف}\ \text{ما}_1 + \text{ک}_1 \frac{\text{فرط}_1}{\text{فرت}}\ \text{مف}\ \text{ی}_1$$

$$= \text{ک}_1\Big[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع}_1\ \text{مف}\ \text{لا}_1 + \text{و}_1\ \text{مف}\ \text{ما}_1 + \text{ط}_1\ \text{مف}\ \text{ی}_1\right) - \left(\text{ع}_1\ \text{مف}\ \text{ع}_1 + \text{و}_1\ \text{مف}\ \text{و}_1 + \text{ط}_1\ \text{مف}\ \text{ط}_1\right)\Big]$$

$$= \text{لا}_1\ \text{مف}\ \text{لا}_1 + \text{ما}_1\ \text{مف}\ \text{ما}_1 + \text{ے}_1\ \text{مف}\ \text{ی}_1 \qquad (۱۵۲)$$

بموجب مساوات (۱۵۱).

(۳۲۵) اِس قسم کی مساوات نظام کے ہر ذرہ کے لیے اور حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ نیز وہ درست ہے خواہ اصلی ہوئی حرکت کچھ ہی ہو۔ اِس مساوات کو تمام ذروں کے لیے جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma\ \text{ک}_1\Big[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع}_1\ \text{مف}\ \text{لا}_1 + \text{و}_1\ \text{مف}\ \text{ما}_1 + \text{ط}_1\ \text{مف}\ \text{ی}_1\right) - \left(\text{ع}_1\ \text{مف}\ \text{ع}_1\right) + \text{و}_1\ \text{مف}\ \text{و}_1 + \text{ط}_1\ \text{مف}\ \text{ط}_1\Big]$$

$$= \Sigma\left(\text{لا}\ \text{مف}\ \text{لا}_1 + \text{ما}\ \text{مف}\ \text{ما}_1 + \text{ے}\ \text{مف}\ \text{ی}_1\right) \quad \ldots\ldots (۱۵۳)$$

اب فرض کرو کہ حرکت کی توانائی بالحرکت ت سے تعبیر ہوتی ہے تو

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\Sigma\ \text{ک}_1\left(\text{ع}_1^2 + \text{و}_1^2 + \text{ط}_1^2\right)$$

$$\text{تب}\quad \text{مف}\ \text{ت} = \frac{1}{2}\Sigma\ \text{ک}_1\left(\text{عَ}_1^2 - \text{ع}_1^2 + \text{وَ}_1^2 - \text{و}_1^2 + \text{طَ}_1^2 - \text{ط}_1^2\right)$$

لیکن $\text{ع}'^2_1 - \text{ع}^2_1 = (\text{ع}_1 + \text{مف ع}_1)^2 - \text{ع}^2_1 = 2\,\text{ع}_1\,\text{مف ع}_1$

اگر ہم دوسرے رتبہ $(\text{مف ع}_1)^2$ کی چھوٹی مقدار کو نظر انداز کر دیں۔ اس لیے

$$\text{مف ت} = \Sigma\,\text{ک}_1(\text{ع}_1\,\text{مف ع}_1 + \text{و}_1\,\text{مف و}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف ط}_1)$$

۲۶۵ — فی الحال مان لو کہ قوتوں کا نظام بقائی ہے اور فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر نظام کی توانائی بالقوہ ک ہے اور خفیف طور پر ہٹی ہوئی تشکیل میں خیالی نظام کی توانائی بالقوہ کَ ہے۔ تب بموجب دفعہ ۱۱۸

$$\text{مف ک} = \text{کَ} - \text{ک}$$

= (وہ کام جو نظام کو حقیقی تشکیل سے ہٹی ہوئی تشکیل تک حرکت دینے میں انجام پایا)

$$= -\Sigma(\text{لا}_1\,\text{مف لا}_1 + \text{ما}_1\,\text{مف ما}_1 + \text{ہے}_1\,\text{مف ی}_1)$$

(۱۵۴)

مساوات (۱۵۳) میں اُن جملوں کی بجائے جو مف ت اور مف ک کے مساوی معلوم کئے گئے ہیں اندراج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات حسب ذیل سادہ شکل میں تحویل ہوتی ہے:

$$\Sigma\,\text{ک}_1\frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}(\text{ع}_1\,\text{مف لا}_1 + \text{و}_1\,\text{مف ما}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف ی}_1) - \text{مف ت} = -\text{مف ک}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\Sigma\,\text{ک}_1(\text{ع}_1\,\text{مف لا}_1 + \text{و}_1\,\text{مف ما}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف ی}_1) = \text{مف}(\text{ت} - \text{ک})$$

یہ مساوات حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ فرض کرو کہ ہم اس کا
تکمل حرکت کے کسی دو لمحوں ت = ت۱ اور ت = ت۲ کے درمیان کرتے ہیں تو (۲۲۹)

$$\Big[\Sigma\,\text{ک}_1(\text{ع}_1\,\text{مف لا}_1 + \text{و}_1\,\text{مف ما}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف ی}_1)\Big]_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2}$$

$$= \int_{ت_1}^{ت_2} مف (ت - ک) \, ذ ت \qquad (۱۵۵)$$

ہٹی ہوئی حرکت ابتک کسی قید کے تحت نہیں رہی الا آنکہ اس کے اور حقیقی حرکت کے درمیان فرق ہمیشہ خفیف ہونا چاہئے۔ اب ہم ایک اور قید عائد کرتے ہیں کہ اوقات $ت_1$ اور $ت_2$ پر ہٹی ہوئی حرکت میں تشکیلات اُن تشکیلات پر منطبق ہوتی ہیں جو حقیقی حرکت میں حاصل ہوتی ہیں۔ پس ہٹی ہوئی حرکت اب وہ ہے جس میں خیالی نظام وقت $ت = ت_1$ پر اسی تشکیل میں حرکت کی ابتدا کرتا ہے جس میں حقیقی نظام وقت $ت = ت_1$ پر کرتا ہے، اس کے بعد خیالی نظام وقت $ت_1$ سے $ت_2$ تک اُس راستہ سے جس پر حقیقی نظام حرکت کرتا ہے ذرا ہٹا ہوا حرکت کرتا ہے (کیونکہ حقیقی نظام قوانین نیوٹن کے تحت حرکت کرتا ہے اور خیالی نظام کی حرکت اس کے تحت نہیں ہے) اور بالآخر وقت $ت_2$ پر اسی محل میں آجاتا ہے جس میں حقیقی نظام آتا ہے۔

خیالی نظام پر اس شرط کے عائد کرنے سے اوقات $ت_1$ اور $ت_2$ پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مف لا_1 = مف ما_1 = مف ی_1 = ۰$$

اور اسی وضع کے رشتے دوسرے ذروں کے لئے۔ پس

$$\left[\sum ک_1 (ع_1 \, مف لا_1 + و_1 \, مف ما_1 + ط_1 \, مف ی_1) \right]_{ت_1}^{ت_2} = ۰$$

اور مساوات (۱۵۵) ہو جاتی ہے

$$\int_{ت_1}^{ت_2} مف (ت - ک) \, ذ ت = ۰$$

یہ ایک ایسی مساوات ہے جو صرف نظام کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی مقداروں پر منحصر ہے اور نظام کی میکانیت پر منحصر نہیں ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اس واحد مساوات سے نظام کے تمام معلومہ

حصوں کی حرکت معلوم کی جا سکتی ہے جوں ہی تَ اور کَ معلوم ہو جائیں اور اس کے لئے غیر معلومہ حصوں کی میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں ہے ۔

۲۶۶ — اس کو ثابت کرنے سے پیشتر ہم مساوات (۱۵۶) کو سمجھنے کی کوشش کریں گے ۔ فرض کرو کہ ہم ت - ک کو ل سے تعبیر کرتے ہیں ۔ (۲۲۷)

اب

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{مف}\,(\text{ت} - \text{ک})\,\text{فرت} = \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{مف}\ \text{ل}\ \text{فرت}$$

$$= \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} (\text{لَ} - \text{ل})\,\text{فرت}$$

$$= \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{لَ}\ \text{فرت} - \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{ل}\ \text{فرت}$$

$$= \text{مف}\left(\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{ل}\ \text{فرت}\right)$$

اگر ہم

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{ل}\ \text{فرت}$$

کو س سے تعبیر کریں تو یہ مساوات $\text{مف}\ \text{س} = 0$ ہو جاتی ہے یا

$$\text{سَ} = \text{س}$$

اس طرح دوسری اور اعلیٰ تر رتبوں کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کیا جائے تو حقیقی حرکت کے لئے تفاعل س کی قیمت وہی ہے جو کسی خفیف طور پر مختلف حرکت کے لیے متناظر تفاعل سَ کی ہے جبکہ یہ مختلف حرکت وہی لمحوں پر وہی تشکیلات سے حرکت کی ابتدا اور اختتام کرے ۔ دوسرے الفاظ میں تفاعل س اعظم ہوتا ہے یا اقل جبکہ تشکیلات کا سلسلہ وہی ہو جو فطرت میں فی الواقعی وقوع پذیر ہوتا ہے ۔

اقل ترین عمل کا اصول

۲۶۷ — حقیقی حرکت کی اثناء میں کل توانائی حسب مسئلہ دفعہ (۱۴۳) مستقل رہے گی، فرض کرو کہ کل توانائی ع سے تعبیر ہوتی ہے تو ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ت} + \text{ک} = \text{ع} \text{ ، } \text{ت} - \text{ک} = \text{ل}$$

تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلہ میں یہ کہنا صحیح نہیں ہے کہ اثنائے حرکت میں کل توانائی مستقل رہتی ہے لیکن تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلوں کی لامتناہی تعداد میں سے پھر بھی لامتناہی تعداد بچ رہے گی جن کے لئے مذکورۂ بالا شرطیں مع اس شرط کے کہ ہر لمحہ پر کل توانائی ع ہونی چاہیئے پوری ہونگی ۔ ایسے کسی سلسلے کے لیے (۳۲۸)
حاصل ہوگا،

$$\text{ت}' + \text{ک}' = \text{ع} \text{ ، } \text{ت}' - \text{ک}' = \text{ل}'$$

پس

$$\text{ل} = ۲\,\text{ت} - \text{ع} \text{ ، } \text{ل}' = ۲\,\text{ت}' - \text{ع}$$

اس لئے

$$\text{س} = \int_{\text{ت}_۱}^{\text{ت}_۲} \text{ل} \; \text{فرت}$$

$$= \int_{\text{ت}_۱}^{\text{ت}_۲} (۲\,\text{ت} - \text{ع}) \; \text{فرت}$$

$$= \int_{\text{ت}_۱}^{\text{ت}_۲} ۲\,\text{ت} \; \text{فرت} - (\text{ت}_۲ - \text{ت}_۱)\,\text{ع}$$

پس اگر س اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\int_{\text{ت}_۱}^{\text{ت}_۲} ۲\,\text{ت} \; \text{فرت}$$

اعظم ہے یا اقل ۔ اس تکملہ کو حرکت کا **عمل** کہتے ہیں ۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ تشکیلات کے تمام ممکن سلسلوں میں جو نظام کو ایک تشکیل سے دوسری تشکیل تک معلومہ وقت میں اس طریقہ پر لاتے ہیں کہ کل توانائی ہمیشہ ایک مخصوص مستقل کے مساوی ہوتی ہے وہ سلسلہ جو ایک فطری نظام سے مرتسم ہوسکتا ہے وہ ہے جس پر عمل اعظم ہے یا اقل ۔ اب چونکہ عمل بالعموم اقل ہوتا ہے اس لیے اس اصول کو **اقل ترین عمل کا اصول** کہتے ہیں ۔

اس اُصول کو اولاً موفرٹینز (Maupertius) نے بیان کیا تھا لیکن اس نے اس کو استدلال ریاضی سے ماخوذ نہیں کیا تھا بلکہ اُس کو اِس امر کا یقین تھا کہ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کائنات کی تبدیلیاں اس طرح وقوع پذیر ہونی چاہئیں کہ عمل اقل ہو ۔ (Essai de Cosmologie, 1751)-

غیر بقائی قوتیں

۲۶۸ ۔ اگر قوتیں بقائی نہ ہوں تو ہم مساوات (۱۵۴) میں

Σ (لا۱ مف لا۱ + ما۱ مف ما۱ + ے۱ مف ی۱)

کی بجائے ۔ مف ک نہیں رکھ سکتے اور اس لیے مساوات (۱۵۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوگی :

∫ (ت۱ سے ت۲) [مف ت + Σ (لا مف لا + ما مف ما + ے مف ی)] فرت = ۰ (۱۵۷)

لگرانج کی مساواتیں (۳۲۹)

۲۶۹ ۔ اگر نظام کے ہر ذرہ کے محدد لا، ما، ی، وغیرہ معلوم ہوں تو

ہم نہ صرف نظام کی تشکیل معلوم کر سکتے ہیں بلکہ وہ میکانیت بھی جس کے ذریعہ نظام کے مختلف اجزاء مربوط ہیں۔ تاہم یہ ہو سکتا ہے کہ مقداروں کی کمتر تعداد معلوم ہونے پر بھی نظام کی تشکیل متعین ہو سکے حالانکہ مقداروں کی اس تعداد سے میکانیت کا کوئی علم حاصل نہ ہوتا ہو۔

مثلاً ہماری پچھلی تمثیل میں ہم نے تصور کیا تھا کہ ایک نامعلوم مشین سے دو رسیاں لٹکتی ہیں اور رسیاں ایسے طریقہ پر مربوط ہیں کہ ایک رسی میں ایک انچ کی حرکت دوسری رسی میں ہمیشہ دو انچ کی حرکت پیدا کرتی ہے۔ اس صورت میں تشکیل پوری طرح معلوم ہو جاتی ہے جبکہ وہ واحد محدد معلوم ہو جائے جو پہلی رسی کے سرے کے محل کی پیمائش کرتا ہے۔ لیکن اس محدد کے معلوم ہونے سے رسیوں کو ملانے والی میکانیت کا علم حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

نیز ہم دفعہ ۶۵ میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی استوار جسم کا محل کافی مقداروں (چھ) کی قیمتوں سے متعین ہو جاتا ہے، یہ مقداریں جسم کے تین تاہم خط ذرّوں کے محل فضاء میں معلوم کرنے کے لیے مطلوب ہوتے ہیں۔ لیکن ان مقداروں کے علم سے اُن ذرّوں کی ترتیب کے متعلق کوئی علم حاصل نہیں ہوتا جن سے جسم بنا ہے۔

فرض کرو کہ مقداروں $ط_1$، $ط_2$، ....، $ط_ن$ کا ایک جٹ ایسا ہے کہ ان کی قیمت معلوم ہو تو اجسام کے ایک نظام کی تشکیل پوری طرح متعین ہو جاتی ہے۔ تب ان مقداروں $ط_1$، $ط_2$، ...، $ط_ن$ کو نظام کے **تعمیم شدہ محدد** کہا جاتا ہے۔

۲۷۰ — فرض کرو کہ نظام کے کسی ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہیں۔ تب $ط_1$، $ط_2$، ....، $ط_ن$ کی قیمتوں سے لا پوری طرح معلوم ہوتا ہے اور اس لئے وہ ان مقداروں کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

$$لا = ف\,(ط_1، ط_2، ....، ط_ن) \qquad (۱۵۸)$$

اگر نظام متحرک ہے تو مساوات (۱۵۸) کی تمام مقداریں وقت کے تفاعل ہیں۔ پس وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\,\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فرت}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\,\frac{\text{فرطہ}_2}{\text{فرت}} + \cdots\cdots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_n}\,\frac{\text{فرطہ}_n}{\text{فرت}}$$

اختصار کی خاطر فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ، $\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فرت}}$ ، .... کو لا̇ ، طہ̇$_1$ ، .... (۳۴۰)
سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب محصلۂ بالا مساوات کو لکھا جا سکتا ہے

$$\dot{\text{لا}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\,\dot{\text{طہ}}_1 + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\,\dot{\text{طہ}}_2 + \cdots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_n}\,\dot{\text{طہ}}_n \qquad (۱۵۹)$$

اِس لئے لا̇ ایک خطی تفاعل ہے طہ̇$_1$ ، طہ̇$_2$ ، .... ، طہ̇$_n$ کا جن کے سر طہ$_1$ ، طہ$_2$ ، .... ، طہ$_n$ کے تفاعل ہیں۔

توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\sum \text{ک}\left(\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 + \dot{\text{نی}}^2\right)$$

طہ̇$_1$ ، طہ̇$_2$ ، .... ، طہ̇$_n$ کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس کے سر طہ$_1$ ، طہ$_2$ ، .... ، طہ$_n$ کے تفاعل ہیں

توانائی بالقوہ ک صرف نظام کی تشکیل پر منحصر ہوتی ہے اور اسلیے ک ایک تفاعل ہے صرف طہ$_1$ ، طہ$_2$ ، .... ، طہ$_n$ کا۔

اس طرح تفاعل ل یا ت ـ ک ،

طہ$_1$ ، طہ$_2$ ، .... ، طہ$_n$ ، طہ̇$_1$ ، طہ̇$_2$ ، .... طہ̇$_n$

کا ایک تفاعل ہے ، فرض کرو

$$\text{ل} = \text{فہ}\left(\text{طہ}_1 ، \text{طہ}_2 ، \ldots ، \text{طہ}_n ، \dot{\text{طہ}}_1 ، \dot{\text{طہ}}_2 ، \ldots ، \dot{\text{طہ}}_n\right) \qquad (۱۶۰)$$

ہٹی ہوئی حرکت میں متناظر تفاعل لَ ،

$$\text{طہ}_1 + \text{مف طہ}_1 ،\ \text{طہ}_2 + \text{مف طہ}_2 ، \ldots \text{وغیرہ}$$

کا وہی تفاعل ہے اور اس لیے

$$\text{لَ} = \text{فہ}\,(\text{طہ}_1 + \text{مف طہ}_1 ،\ \text{طہ}_2 + \text{مف طہ}_2 ، \ldots \text{طہ}_{ن} + \text{مف طہ}_{ن} ،\ \text{ظہ}_1 + \text{مف ظہ}_1 ، \ldots)$$

ٹیلر کے مسئلہ سے ہم لَ کو شکل

$$\text{لَ} = \text{فہ}\,(\text{طہ}_1 ،\ \text{طہ}_2 ، \ldots ،\ \text{طہ}_{ن} ،\ \text{ظہ}_1 ، \ldots)$$

$$+ \text{مف طہ}_1 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}_1} + \text{مف طہ}_2 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}_2} + \ldots + \text{مف طہ}_{ن} \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}_{ن}}$$

$$+ \text{مف ظہ}_1 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ظہ}_1} + \ldots\ldots$$

میں پھیلا سکتے ہیں اور اس لیے مساوات (۱۶۰) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لَ} = \text{ل} + \sum_1^{ن} \text{مف طہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \sum_1^{ن} \text{مف ظہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ظہ}_1} \qquad (۱۶۱)$$

(۴۴۱) مساوات (۱۵۶)

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{مف}\,(\text{ت} - \text{ک})\ \text{فرت} = ۰$$

کو شکل

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} (\text{لَ} - \text{ل})\ \text{فرت} = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی بجائے

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \left(\sum_1^{ن} \text{مف طہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \sum_1^{ن} \text{مف ظہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ظہ}_1}\right) \text{فرت} = ۰$$

(۱۶۲)

کو لکھا جا سکتا ہے۔

لیکن

$$\text{سف ط}_1 = \text{ط}'_1 - \text{ط}_1 = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{ط}_1 + \text{سف ط}_1) - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\text{ط}_1 = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{سف ط}_1)$$

اِس لئے
$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\,\text{سف ط}_1\,\text{فرت} = \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{سف ط}_1)\,\text{فرت}$$

اور تکمل بالحصص سے یہ ہو جاتا ہے

$$\left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\,\text{سف ط}_1\right]_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} - \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\right)\text{سف ط}_1\,\text{فرت} \qquad (۱۶۳)$$

چونکہ ہٹی ہوئی تشکیل بموجب فرض حقیقی تشکیل پر منطبق ہوتی ہے اِس لیے اوقات ت_1 اور ت_2 پر $\text{سف ط}_1 = ۰$ ۔ اِس طرح پھیلاؤ (۱۶۳) میں پہلی رقم معدوم ہوتی ہے اور حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\,\text{سف ط}_1\,\text{فرت} = -\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\right)\text{سف ط}_1\,\text{فرت}$$

اب مساوات (۱۶۲) شکل

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \left\{ \sum^{\text{ن}} \text{سف ط}_1 \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\right) \right] \right\} \text{فرت} = ۰ \qquad (۱۶۴)$$

اختیار کرتی ہے ۔

حدود ت_1 اور ت_2 بالکلیہ ہمارے اختیار میں ہیں، مساوات درست رہے گی خواہ ت_1 اور ت_2 کو ہم کوئی قیمتیں دیں ۔ دوسرے الفاظ میں چھوٹے تفرقیوں کی ایک تعداد کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے خواہ مجموعہ میں
(۳۴۴) ایسے کتنے ہی تفرقی شامل ہوں ۔ اِس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ مجموعہ کی ہر رقم معدوم ہونی چاہئے، اِس لیے ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\sum^{\text{ن}} \text{سف ط}_1 \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_1}\right) \right] = ۰ \qquad (۱۶۵)$$

۲۷۱ ـــ اِس موقع پر ہمیں دو متبادلات پر غور کرنا ہوگا ۔ یہ ہو سکتا ہے کہ

مف طہ_1، مف طہ_2، ... ، $\text{مف طہ}_{\text{ن}}$ کی خواہ ہم کوئی قیمتیں مقرر کریں نئی تشکیل جس کا تشخص محددوں

$$\text{طہ}_1 + \text{مف طہ}_1 ،\ \text{طہ}_2 + \text{مف طہ}_2 ،\ \ldots ،\ \text{طہ}_{\text{ن}} + \text{مف طہ}_{\text{ن}}$$

کے ذریعہ ہوتا ہے ایک ممکن تشکیل ہو یعنی یہ تشکیل ایسی ہوگی کہ نظام اس کو اختیار کر سکتا ہے اور اس کی میکانیت سے جو قیود عائد ہوتے ہیں ان میں خلل نہیں پڑتا۔ اس صورت میں ہم کہتے ہیں کہ نظام "آزادی کے ن درجے" رکھتا ہے۔

اگر نظام آزادی کے ن درجے رکھے تو مساوات (۱۶۵) مف طہ_1، مف طہ_2، ... ، $\text{مف طہ}_{\text{ن}}$ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ مثلاً وہ درست ہے اگر ہم لیں

$$\text{مف طہ}_1 = \text{صہ}،\ \text{مف طہ}_2 = \text{مف طہ}_3 = \ldots = \text{مف طہ}_{\text{ن}} = 0 .$$

جہاں صہ کوئی چھوٹی مقدار ہے۔ اس صورت میں ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{صہ}\left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف } \dot{\text{طہ}}_1}\right)\right] = 0$$

اور اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف } \dot{\text{طہ}}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = 0 .$$

محددوں طہ_1، طہ_2، ... ، $\text{طہ}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک کے لیے اس کے مشابہ مساوات درست رہے گی۔ ان مساواتوں کو **لگرانج کی مساواتیں** کہتے ہیں۔ ن نامعلوم مقداروں طہ_1، طہ_2، ... ، $\text{طہ}_{\text{ن}}$ اور وقت کے لحاظ سے ان کے تفرقی سروں کے درمیان ایسی ن مساواتیں ہوں گی اس لیے ہم ان سے وہ طریقہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں طہ_1، طہ_2، ... ، $\text{طہ}_{\text{ن}}$ وقت کے ساتھ بدلتے ہیں۔ ان مساواتوں کو استعمال کرنے میں ہمیں صرف تفاعل ل کے جاننے کی ضرورت ہے اور اس لیے نظام کی

صرف توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کو جاننا ضروری ہے، نظام کی اندرونی میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اس طرح دفعہ (۲۶۳) کا مجوزہ مسئلہ حل ہو چکا اگر ہم لگرانج کی مساواتیں حل کر سکیں۔ (۳۳۴)

توضیحی مثال

عام رقاص — فرض کرو کہ ہم لگرانج کی مساواتوں کو ایک سادہ مثال پر استعمال کرتے ہیں چنانچہ عام رقاص کی حرکت کے مسئلہ پر غور کرو۔ ایک استوار جسم حرکت کرنے میں اس طور پر مقید ہے کہ ایک نقطہ و ثابت رہتا ہے اور خط و ث جو و کو مرکز ثقل سے ملاتا ہے ایک انتصابی سطح میں حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ و ث کا میلان سمت انتصابی سے طہ ہے، تب نظام کا محل بالکلیہ مقرر ہو جاتا ہے جوں ہی طہ کی قیمت معلوم ہو۔ دفعہ (۲۴۵) کی ترقیم میں توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ حسب ذیل ہیں:

$$ت = \frac{۱}{۲} ک گ^۲ \dot{طہ}^۲ ، \quad ھ = ک ج ھ (۱ - جم طہ)$$

جہاں ھ توانائی بالقوہ ہے اور ک کل کمیت۔ اس لیے

$$ل = \frac{۱}{۲} ک گ^۲ \dot{طہ}^۲ - ک ج ھ (۱ - جم طہ)$$



شکل (۱۵۴)

اس طرح $\frac{جف ل}{جف \dot{طہ}} = ک گ^۲ \dot{طہ}$ اور

لگرانج کی مساوات

$$\frac{ف}{فت}\left(\frac{جف ل}{جف \dot{طہ}}\right) = \frac{جف ل}{جف طہ}$$

ہو جاتی ہے $\quad ک گ^۲ \frac{ف^۲ طہ}{فت^۲} = - ک ج ھ \; جب طہ$

یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۲۴۵ میں حاصل ہوئی تھی اور اس سے حرکت معلوم کی جا سکتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ لگرانج کے طریقہ سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اُس طریقہ پر منحصر نہیں ہے جو رقاص کو لٹکانے کا ہے، صرف یہ شرط ہے کہ وہ مذکورۂ بالا طریقہ پر حرکت کرنے پر مجبور ہو۔ مثلاً نتیجہ درست رہتا ہے اگر د پر کوئی ٹیکن ہی نہ ہو اور ڈوریوں کے ذریعہ قیود عائد کئے جائیں۔

۲۶۲ — اب ہم دوسرے متبادل پر غور کریں گے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ اگر ہم مف $ط_۱$، مف $ط_۲$، ... مف $ط_ن$ کی اختیاری قیمتیں مقرر کریں تو حاصل شدہ نئی تشکیل ہر صورت میں ممکن تشکیل نہ ہو۔ یہ ہو سکتا ہے کہ بعض خاص رشتے ہوں جو پورے ہونے چاہئیں تاکہ میکانیت کی باعث جو قیود ہیں ان میں کوئی خلل نہ پڑے۔

مثلاً اس تمثیل میں جو قبل ازیں استعمال ہو چکی ہے فرض کرو کہ ایک کمرہ کی چھت سے دو رسیاں لٹک رہی ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو اوپر کی میکانیت دوسری رسی کو دو انچ اوپر چڑھنے پر مجبور کرتی ہے۔ فرض کرو کہ چھت کے نیچے رسیوں کے طول $ط_۱$، $ط_۲$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اب ایسا ہٹاؤ جس میں مف $ط_۱ = \frac{۱}{۱۰}$ انچ اور مف $ط_۲ = \frac{۱}{۵}$ انچ ممکن ہٹاؤ نہیں ہے کیونکہ اوپر کی میکانیت ایسے ہٹاؤ کی اجازت نہیں دیتی۔ مف $ط_۱$، مف $ط_۲$ میں ہمیشہ ربط

$$\text{مف } ط_۱ + \frac{۱}{۲}\text{ مف } ط_۲ = ۰$$

ہونا چاہئے۔

عام صورت میں فرض کرو کہ میکانیت کی باعث چند قیود عائد ہوتے ہیں، ان قیود کی شکل (۳۳۴)

$$ا_۱\text{ مف } ط_۱ + ا_۲\text{ مف } ط_۲ + \ldots + ا_ن\text{ مف } ط_ن = ۰ \quad (۱۶۶)،$$

$$ب_۱\text{ مف } ط_۱ + ب_۲\text{ مف } ط_۲ + \ldots + ب_ن\text{ مف } ط_ن = ۰ \quad (۱۶۷)،$$

وغیرہ ہے۔ تب مساوات (۱۶۵)

$$\text{حم}_{1}^{\text{ن}} \left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \right] \text{مف طہ} = \text{۰} \qquad (\text{۱۶۸})$$

صرف اسوقت درست ہے جبکہ مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ... مف طہ$_{\text{ن}}$ رشتوں (۱۶۶) (۱۶۷)، ... کو پورا کریں۔

لیکن ممکن ہٹاؤ کے لیے مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ...، مف طہ$_{\text{ن}}$ ایسے ہوں گے کہ یہ رشتے (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... سب کے سب درست ہوں گے۔ فرض کرو کہ ہم لہ، مہ، ... اور اکائی سے ضرب دیتے ہیں اور جمع کرتے ہیں جہاں لہ، مہ، ... تا حال غیر معین مقداریں ہیں، ہم ان کو غیر معین ضارب کہہ سکتے ہیں۔ اب مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \text{لہ ا}_1 + \text{مہ ب}_1 + \dots \right] \text{مف طہ}_1$$

$$+ \left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_2} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_2} + \text{لہ ا}_2 + \text{مہ ب}_2 + \dots \right] \text{مف طہ}_2$$

$$+ \dots + \left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}} + \text{لہ ا}_{\text{ن}} \right.$$

$$\left. + \text{مہ ب}_{\text{ن}} + \dots \right] \text{مف طہ}_{\text{ن}} = \text{۰} \qquad (\text{۱۶۹})$$

مقداریں مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ...، مف طہ$_{\text{ن}}$ اختیاری نہیں ہیں لیکن اگر نمونہ (۱۶۶) کے رشتے تعداد میں م ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مقداروں مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ...، مف طہ$_{\text{ن}}$ میں سے تمام الاّ م کے اختیاری ہیں اور ان مقداروں میں سے (ن ـ م) مقداروں کو اختیاری قیمتیں دیکر باقی م مقداروں کو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... کے حل سے معلوم کرنا چاہئے۔ اِس طریقہ پر حاصل شدہ تشکیل بالضرور ممکن تشکیل ہونی چاہیے فرض کرو کہ ہم

مف طہ$_{\text{م}+1}$، مف طہ$_{\text{م}+2}$، ...، مف طہ$_{\text{ن}}$

کو اختیاری قیمتیں دیتے ہیں اور پھر مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ..... سے (۳۳۵)
سف طہ۱، سف طہ۲، ... سف طہم کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔ نیز ہم م
غیر معین ضاربوں لہ، مہ، ... کا انتخاب کرتے ہیں اس طور پر کہ وہ م
مساواتوں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{1}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{1}}+\text{لہ}\,\text{ا}_{1}+\text{مہ}\,\text{ب}_{1}+\dots=0$$

(۱۷۰)

. . . .

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}}}+\text{لہ}\,\text{ا}_{\text{م}}+\text{مہ}\,\text{ب}_{\text{م}}+\dots=0$$

(۱۷۱)

کو پورا کرتے ہیں جہاں لاحقے ۱ تا م ہیں۔ تب مساوات (۱۶۹) ہو جاتی ہے

$$\sum_{\text{م}+1}^{\text{ن}}\left[\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}}+\text{لہ}\,\text{ا}_{\text{م}+1}+\text{مہ}\,\text{ب}_{\text{م}+1}+\dots\right]\text{سف طہ}_{\text{م}+1}=0$$

چونکہ سف طہ$_{\text{م}+1}$، سف طہ$_{\text{م}+2}$، ....، سف طہ$_{\text{ن}}$ سب کے سب
اختیاری ہیں اس لیے ہم لے سکتے ہیں

$$\text{سف طہ}_{\text{م}+1}=\text{صہ}،\ \text{سف طہ}_{\text{م}+2}=\text{سف طہ}_{\text{م}+3}=\dots=\text{سف طہ}_{\text{ن}}=0$$

اور حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فزت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{م}+1}}+\text{لہ}\,\text{ا}_{\text{م}+1}+\text{مہ}\,\text{ب}_{\text{م}+1}+\dots=0$$

اسی طرح ہم م + ۱ سے ن تک تمام لاحقوں کے لیے وہی مساوات حاصل کرسکتے ہیں لیکن یہ مساوات لاحقوں ۱ تا م کے لیے درست فرض کیجاچکی ہے (مقابلہ کرو مساواتوں (۱۷۰)، ۰۰ (۱۷۱)]۔

پس مساواتوں کا حسب ذیل مکمل نظام حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}+\text{لہ ا}_1+\text{مہ ب}_1+\dots=0,$$

. . . .

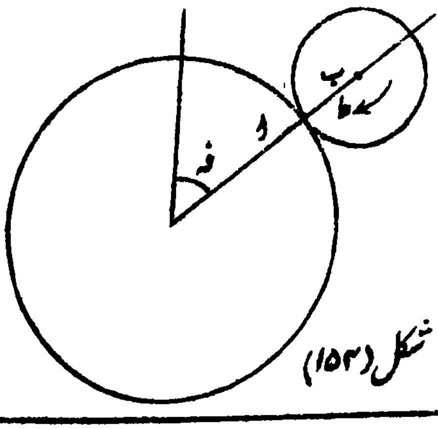
$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}}+\text{لہ ا}_{\text{ن}}+\text{مہ ب}_{\text{ن}}+\dots=0.$$

جس میں لاحقے ۱ تا ن ہیں۔ اِن ن مساواتوں سے م غیر معین ضاربوں ل، مہ، ۔۔۔ کو ساقط کیا جائے تو ن ۔ م مساواتیں باقی رہتی ہیں جن سے محددوں کی تبدیلیاں معلوم کی جاسکتی ہیں۔

توضیحی مثالیں (۳۳۶)

۱۔ نصف قطر ا کا ایک متجانس کرہ، نصف قطر ب کے ایک ثابت کرہ کی بیرونی سطح پر بغیر پھسلے لڑھکتا ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر مرکزوں کا خط سمت انتصابی سے زاویہ کہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ متحرک کرہ کی زاویٰ رفتار طہ ہے۔ متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار (ا + ب) کہٗ ہے اور اِس لیے



شکل (۱۵۴)

$$\text{ت}=\tfrac{1}{2}\text{ک}\left[(\text{ا}+\text{ب})^2\text{کہ}^{\cdot 2}+\tfrac{2}{5}\text{ا}^2\text{طہ}^{\cdot 2}\right]$$

اور توانائی بالقوہ ہے

$$\text{مہ}=\text{ک ج}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم کہ}$$

اِس لیے $\text{ل}=\text{ت}-\text{مہ}$

= ۱/۲ ک (ا + ب)^۲ کہ̇^۲ + ۱/۵ ک ا^۲ طہ̇^۲ − ک ج (ا + ب) جم کہ (ا)

طہ اور کہ میں تغیرات اختیاری نہیں ہیں اور ہم انہیں جو چاہیں قیمتیں نہیں دے سکتے کیونکہ متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار (ا + ب) کہ̇ ہے اور نیز ا طہ̇ ہونی چاہئے کیونکہ کرہ زاوی رفتار طہ̇ سے بغیر پھسلے لڑھک رہا ہے۔ اس لیے

ا طہ̇ = (ا + ب) کہ̇ (ب)

یہ رشتہ ہر ممکن حرکت کے ہر لمحہ پر درست رہتا ہے اور اس لئے وقت کے لحاظ سے تکمل کرنے پر حاصل ہونا چاہئے

ا طہ = (ا + ب) کہ + مستقل

اور اس لیے ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ محدود طہ، کہ کی تبدیلیاں رشتہ

ا مف طہ = (ا + ب) مف کہ

کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اس طرح لگرانج کی مساواتیں ہیں

فر/فرت (جف ل/جف طہ̇) − جف ل/جف طہ + لہ ا = ۰،

فر/فرت (جف ل/جف کہ̇) − جف ل/جف کہ − لہ (ا + ب) = ۰

لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

(ا + ب) [فر/فرت (جف ل/جف طہ̇) − جف ل/جف طہ] + ا [فر/فرت (جف ل/جف کہ̇) − جف ل/جف کہ] = ۰

مساوات (ا) سے اندراج کرنے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

(ا + ب) [فر/فرت (۲/۵ ک ا^۲ طہ̇)] + ا [فر/فرت {ک (ا + ب)^۲ کہ̇}

− ک ج (ا + ب) جب کہ] = ۰

(۳۴۷) ا طہ کی بجائے (ا + ب) کہ رکھنے کے بعد حاصل ہوتاہے

$$\frac{۷}{۵} \text{ک ا (ا + ب)}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲}\text{کہ}}{\text{فرت}^{۲}} = \text{ک ج ا (ا + ب) جب کہ}$$

$$\text{یا} \quad \text{(ا + ب)} \frac{\text{فر}^{۲}\text{کہ}}{\text{فرت}^{۲}} = \frac{۵}{۷} \text{ ج جب کہ}$$

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متحرک کرہ کا مرکز اس اسراع کے $\frac{۵}{۷}$ اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے جو ایک چکنے ذرہ کا ہوگا اگر یہ ذرہ نصف قطر ا + ب کے ایک کرہ پر نیچے پھسلے ۔

یہی نتیجہ طہ کو مساواتوں (ا) اور (ب) سے ساقط کرنے اور پھر کہ کو ایک واحد لگرانج کا محدد سمجھنے سے حاصل ہو سکتا ہے ۔

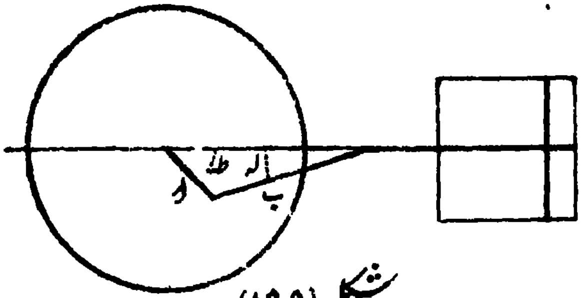
۲ ۔ ایک اڑپہیہ ایک فشارے سے جو ایک افقی اسطوانے میں حرکت کرتا ہے ایک کرنیک اور ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہے ۔ جب انجن میں بھاپ نہیں ہوتی تو اڑپہیہ اپنے توازن کے محل میں ساکن رہتا ہے ۔ اس کی حرکت جبکہ وہ ہٹا ہوا ہو معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ کرنیک اور ڈنڈے کے طول ا، ب ہیں اور طہ، کہ وہ زاویے ہیں جو وہ اڑپہیہ کے کسی محل میں سمت افقی سے بناتے ہیں ۔ تب انجن کا محل پوری طرح معلوم ہوتاہے جبکہ طہ اور کہ معلوم ہوں ۔ طہ اور کہ کی قیمتوں سے انجن کا محل معلوم ہوتا ہے لیکن اگر ہم طہ اور لہ کو اختیاری قیمتیں دیں تو انجن کا ممکن محل حاصل ہونا ضروری نہیں ہے ۔

اڑپہیہ، محور اور کرنیک کی گردش کی رفتار طہ ہے اور اس لیے اس حرکت کی توانائی بالحرکت $\frac{۱}{۲}$ ع طہ^{۲} ہے جہاں ع اڑپہیہ کے محور کے گرد انجن کے اس حصہ کا جمود کا معیار ہے ۔ اگر ہم ڈنڈے کے مرکز ثقل کو اس کے وسطی نقطہ پر فرض کریں تو مرکز ثقل کے محدد جن کی پیمائش اڑپہیہ کے محور سے ہوئی ہو حسب ذیل ہیں :

افقی : ا جم طہ + $\frac{۱}{۲}$ ب جم کہ

انتصابی : $\frac{1}{2}$ ب جب کہ



شکل (۱۵۵)

اس طرح ڈنڈے کے مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں :

(۳۳۸) افقاً — (ا جب ط × طہ + $\frac{1}{2}$ ب جب کہ × کہٗ)

انتصاباً $\frac{1}{2}$ ب جم کہ × کہٗ

اس لئے ڈنڈے کے مرکز ثقل کی پوری رفتار وٗ

وٗ^{2} = (ا جب ط × طہ + $\frac{1}{2}$ ب جب کہ × کہٗ)^2 + ($\frac{1}{2}$ ب جم کہ × کہٗ)^2

= ا^2 جب^2 ط × طہ^2 + ا ب جب ط جب کہ × طہ کہٗ + $\frac{1}{4}$ ب^2 کہٗ^{2}

سے حاصل ہو گی۔ ڈنڈے کی زاوئی رفتار کہٗ ہے اور اس کے گھماؤ کا نصف قطر گٗ

$$گ^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{ب}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ب^2$$

سے حاصل ہوگا۔

پس اگر ڈنڈے کی کمیت ک ہے تو اس کی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2}$ ک (وٗ^{2} + گ^2 کہٗ^{2})

= $\frac{1}{2}$ ک (ا^2 جب^2 ط × طہ^2 + ا ب جب ط جب کہ × کہٗ طہ

+ $\frac{1}{3}$ ب^2 کہٗ^{2})

ہے۔

بالآخر، اڑپہیہ کے مرکز سے فشاری ڈنڈے کے سرے کا افقی فاصلہ

ا جم طہ + ب جم کہ ہے اور اِس لیے فشارہ اور فشاری ڈنڈے کی رفتار ہے

- ا جب طہ × طہٗ - ب جب کہ × کہٗ

اگر فشارہ اور اِس کے ڈنڈے کی کمیت گ ہو تو انجن کے اِس حصہ کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}$$ گ (ا جب طہ × طہٗ + ب جب کہ × کہٗ)^2

ہے۔

اب پوری توانائی بالحرکت ت کے لیے حاصل ہوتا ہے

۲ ت = ع طہٗ^{2} + ک (ا^2 جب^2 طہ × طہٗ^{2} + ا ب جب طہ جب کہ × کہٗ طہٗ

+ $\frac{1}{2}$ ب^2 کہٗ^{2}) + گ (ا جب طہ × طہٗ + ب جب کہ × کہٗ)^2

(ا)

توانائی بالقوہ مہ جس کی پیمائش معیاری تشکیل طہ = کہ = ۰ سے ہوئی ہو

مہ = - ل ج ہ جب (طہ + صہ) - $\frac{1}{2}$ ک ج ب جب کہ (ب)

ہے جہاں ل، اڑپہیہ اور کرنیک کی کل کمیت ہے اور اِس کے مرکز ثقل کے قطبی محدد ہ، صہ ہیں جبکہ طہ = ۰ –

طہ اور کہ کی تبدیلیاں غیر تابع نہیں ہیں۔ شکل پر سرسری نظر ڈالنے سے یہ معلوم ہوگا کہ رشتہ

ا جب طہ = ب جب کہ (ج)

ہمیشہ قائم رہنا چاہیے اور اِس کو تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ اور کہ کو تعمیمی محددوں کے طور پر لیا جائے تو ہمیں فرض کرنا چاہیئے کہ وہ رشتہ

ا جم طہ مف طہ - ب جم کہ مف کہ = ۰

کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اِس طرح لگرانج کی مساواتیں ہونگی :

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہٗ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ ا جم طہ} = 0 \qquad (\text{د})$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہٗ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}} - \text{لہ ب جم کہ} = \cdot \qquad (\text{ع})$$

اِن مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنے پہ حاصل ہوتا ہے: (۳۳۹)

$$\text{ب جم کہ}\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہٗ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}}\right]$$

$$+\text{ا جم طہ}\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہٗ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}\right] = \cdot$$

اور ل کی بجائے مساواتوں (ا) اور (ب) سے اس کی قیمت درج کرنے سے یہ مساوات طہ اور کہ کے اور ان کے تفرقی سروں (بلحاظ وقت) کے درمیان ایک مساوات ہوجاتی ہے۔ اِس مساوات اور ہندسی ربط (ج)

$$\text{ا جب طہ} = \text{ب جب کہ} \qquad (\text{ف})$$

سے ہم طہ اور کہ کو وقت کی رقوم میں معلوم کرسکتے ہیں۔

مساوات (ف) استعمال کرکے ہم مساوات (ب) کو

$$\text{م} = -\text{ک ج ھ جب (طہ + ص)} - \frac{1}{2}\text{ک ج ا جب طہ}$$

میں تحویل کرسکتے ہیں۔

اگر پہیہ پر مناسب اوزان کو اِس طریقہ پر رکھا جاسکتا ہے کہ

$$\text{ص} = \cdot\text{، ک ھ} + \frac{1}{2}\text{ک ا} = \cdot$$

اور اگر ایسا ہوجائے تو مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی ارتفاع پر رہے گا۔ اسے انجن کو متوازن کرنا کہتے ہیں۔

اگر ہم یہ فرض کرلیں کہ انجن کو اِس طریقہ پر متوازن کیا جاچکا ہے تو م = ۰ اور اس لیے ل = ت۔ لیکن ہم لگرانج کی مساواتیں استعمال کئے بغیر حرکت کو آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ ت کو کل حرکت کی اثناء میں مستقل رہنا چاہئے اور مساوات (ف) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا جم طہ} \times \text{طہٗ} = \text{ب جم کہ} \times \text{کہٗ}$$

اور اس لیے ہم مساوات (ا) کی بجائے رکھ سکتے ہیں

۲ ت = ع طہَ^۲ + ک (اَ^۲ جب^۲ طہ × طہَ^۲ + اَ^۲ جب طہ جم طہ سں کہ × طہَ^۲

+ ½ اَ^۲ جم^۲ طہ قط^۲ کہ × طہَ^۲) + ک (ا جب طہ × طہَ + ا جم طہ سں کہ × طہَ)^۲

= طہَ^۲ [ع + ک اَ^۲ جب طہ جب (طہ + کہ) قط کہ + ½ ک اَ^۲ جم^۲ طہ قط^۲ کہ

+ ک اَ^۲ جب^۲ (طہ + کہ) قط^۲ کہ]

یہ کُل حرکت میں مستقل ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ طہَ مستقل ہے۔ پس اگرچہ انجن کو اس طریقہ پر متوازن کیا گیا ہو کہ وہ کسی محل میں ساکن رہ سکے تاہم اُس کا یکساں حرکت کرنا ضروری نہیں ہے اگر اُسے حرکت میں لایا جائے۔

غیر تقائی نظامات کے لیے لگرانج کی مساواتیں

۲۷۳ — غیر تقائی نظاموں کے لیے دفعہ (۲۶۸) میں بتایا جا چکا ہے کہ مساوات (۱۵۶)

$$\int_{ت_1}^{ت_2} مف\ ل\ فرت = ۰ \qquad (۱۷۲)$$

کی بجائے مساوات

$$\int_{ت_1}^{ت_2} [مف\ ت + \Sigma (لا\ مف\ لا + ما\ مف\ ما + ے\ مف\ ی)]\ فرت = ۰ \qquad (۱۷۳)$$

رکھی جانی چاہئے۔

اب چونکہ حسب مساوات (۱۵۸) (۲۴۰)

لا = ف (طہ₁، طہ₂، ....، طہن)

اِس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

مف لا = لاَ − لا

$$= \text{ف}\,(\text{طہ}_1 + \text{مف طہ}_1،\ \text{طہ}_2 + \text{مف طہ}_2 + \ldots) - \text{ف}\,(\text{طہ}_1،\ \text{طہ}_2 \ldots)$$

$$= \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\ \text{مف طہ}_1 + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\ \text{مف طہ}_2 + \ldots$$

جہاں دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداریں نظرانداز کی گئی ہیں ۔
اِس طرح

$$\Sigma\,(\text{لا مف لا} + \text{ما مف ما} + \text{ے مف ی}) = \text{طا}_1\,\text{مف طہ}_1 + \text{طا}_2\,\text{مف طہ}_2 + \ldots \text{طا}_\text{ن}\,\text{مف طہ}_\text{ن}$$

جہاں طا_1، طا_2، . . . $\text{طا}_\text{ن}$ نظام کی تشکیل پر منحصر ہیں اور اس لیے وہ صرف طہ_1، طہ_2، . . . $\text{طہ}_\text{ن}$ کے تفاعل ہیں ۔
مساوات (۱۷۳) اب ہو جاتی ہے

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{مف ت فرت} + \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} (\text{طا}_1\,\text{مف طہ}_1 + \text{طا}_2\,\text{مف طہ}_2 + \ldots + \text{طا}_\text{ن}\,\text{مف طہ}_\text{ن})\ \text{فرت} = 0 \qquad (۱۷۴)$$

جس طرح دفعہ (۷۰) میں ہم نے معلوم کیا تھا کہ

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{مف ل فرت}$$

کو

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \left\{ \Sigma_1^{\text{ن}}\ \text{مف طہ}_1 \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}'_1} \right) \right] \right\} \text{فرت}$$

میں مستحیل کیا جا سکتا ہے عین اسی طرح مساوات (۱۷۴) کی پہلی رقم کو

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \left\{ \Sigma_1^{\text{ن}}\ \text{مف طہ}_1 \left[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}'_1} \right) \right] \right\} \text{فرت}$$

میں مستحیل کیا جا سکتا ہے ۔ اِس کو درج کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\int_{\text{ت}_\text{۱}}^{\text{ت}_\text{۲}} \Big\{ \sum^{\text{ن}}_{\text{۱}} \text{مف ط}_\text{م} \Big[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \Big(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} \Big) + \text{طا}_\text{۱} \Big] \Big\} \text{فرت} = \text{۰}$$

(۲۷۳) اب چونکہ یہ وقت کی تمام ممکن سعتوں کے لیے درست ہے اس لیے ہر لمحہ پر حاصل ہونا چاہئے

$$\sum^{\text{ن}} \text{مف ط}_\text{۱} \Big[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \Big(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} \Big) + \text{طا}_\text{۱} \Big] = \text{۰} \qquad (\text{۱۷۵})$$

اگر مختلف ط بغیر کسی قید کے متغیر ہو سکتے ہیں یعنے اگر مف ط$_\text{۱}$، مف ط$_\text{۲}$، ... ، مف ط$_\text{ن}$ کو ہم جو چاہیں قیمتیں دے سکیں تو ہر مسر کو معدوم ہونا چاہئے اور اس صورت میں مساواتوں کا نظام ہوگا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \Big(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} \Big) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} - \text{طا}_\text{۱} = \text{۰} \qquad (\text{۱۷۶})$$

. . . .

لیکن اگر مف ط$_\text{۱}$، مف ط$_\text{۲}$، ... مف ط$_\text{ن}$ اُن قیود کے پابند ہوں جو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ..... میں ظاہر کئے گئے ہیں تو حسب دفعہ ۲۷۲ ہم معلوم کرتے ہیں کہ مساواتوں کے اس نظام کی بجائے نظام

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \Big(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} \Big) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_\text{۱}} - \text{طا}_\text{۱} + \text{لہ ل}_\text{۱} + \text{مہ ب}_\text{۱} + \dots = \text{۰}$$

(۱۷۷)

. . . .

کو رکھنا چاہئے ۔

۲۷۴ — مساواتوں کے یہ نظام اُن نظاموں میں تحویل ہوتے ہیں جو بقائی قوتوں کی خاص صورت میں قبل ازیں حاصل کئے جا چکے ہیں ۔ کیونکہ اس صورت میں اس کام پر غور کرو جو ایک خفیف ہٹاؤ میں جس میں صرف ط$_\text{۱}$ بدل کر ط$_\text{۱}$ + مف ط$_\text{۱}$ ہو جاتا ہے انجام پاتا ہے ۔ یہ کام طا$_\text{۱}$ مف ط$_\text{۱}$ اور نیز وہ ـ $\frac{\text{جف ہ}}{\text{جف ط}_\text{۱}}$ مف ط$_\text{۱}$ ہے اور اس لیے

$$\text{ط}_{۱} = -\frac{\text{جف م}}{\text{جف ط}_{۱}}$$

اس طرح $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{۱}} + \text{ط}_{۱} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{۱}} - \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_{۱}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_{۱}}$

اور $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_{۱}} = \frac{\text{جف (ل + م)}}{\text{جف ط}_{۱}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_{۱}}$

کیونکہ م میں ط۱ شامل نہیں ہوتا۔ اس طرح مساوات (۱۷۵) حسب سابق

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_{۱}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_{۱}} = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اسی طریقہ پر مساواتیں (۱۷۷)، ...، ان مساواتوں میں مستحیل ہوسکتی ہیں جو دفعہ ۲۷۲ میں حاصل ہوچکی ہیں۔

لگرانج کی مساواتوں کو راست استحالہ سے حاصل کرنا (۳۴۲)

۲۷۵ — لگرانج کی مساواتوں کو مساوات (۱۵۶) سے اخذ کرنے کی بجائے انہیں حرکت کی مساواتوں کے استحالہ سے راست حاصل کیا جاسکتا ہے۔

حسب سابق

$$\text{لا} = \text{ف}\,(\text{طہ}_{۱}،\ \text{طہ}_{۲}،\ ....،\ \text{طہ}_{ن})$$

اور اس لیے تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_{۱}}\,\frac{\text{فرطہ}_{۱}}{\text{فرت}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_{۲}}\,\frac{\text{فرطہ}_{۲}}{\text{فرت}} + ...$$

یا

$$\dot{\text{لا}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۱}}\,\dot{\text{طہ}}_{۱} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_{۲}}\,\dot{\text{طہ}}_{۲} + \ldots \qquad (۱۷۸)$$

اس طرح $\dot{\text{لا}}$ ایک خطی تفاعل ہے $\dot{\text{طہ}}_{۱}$، $\dot{\text{طہ}}_{۲}$، $\dot{\text{طہ}}_{۳}$ ... کا اور

$$\frac{\text{جف}\ \dot{\text{لا}}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} \qquad (179)$$

نیز چونکہ

$$\text{ت} = \frac{1}{2} \sum \text{ک} \left(\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 + \dot{\text{ی}}^2 \right)$$

اِس لیے ت حسب سابق طہ۱، طہ۲ ... کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس میں طہٗ۱، طہٗ۲ ... بھی شامل ہیں۔ تفرق سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1} = \sum \text{ک} \left(\dot{\text{لا}} \frac{\text{جف}\ \dot{\text{لا}}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1} + \dot{\text{ما}} \frac{\text{جف}\ \dot{\text{ما}}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1} + \dot{\text{ی}} \frac{\text{جف}\ \dot{\text{ی}}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1} \right)$$

یا مساوات (۱۷۹) سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1} = \sum \text{ک} \left(\dot{\text{لا}} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \dot{\text{ما}} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1} + \dot{\text{ی}} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1} \right)$$

اِس طرح

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1} \right) = \sum \text{ک} \left(\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرت}^2} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{فر}^2 \text{ی}}{\text{فرت}^2} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1} \right)$$

$$+ \sum \text{ک} \left[\dot{\text{لا}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} \right) + \dot{\text{ما}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1} \right) + \dot{\text{ی}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1} \right) \right] \ldots\ldots \qquad (180)$$

چونکہ $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}$ ایک تفاعل ہے طہ۱، طہ۲ .... کا اِس لیے (۴۴۳)

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} \right) = \frac{\text{جف}^2\ \text{لا}}{\text{جف طہ}_1^2} \frac{\text{فر طہ}_1}{\text{فرت}} + \frac{\text{جف}^2\ \text{لا}}{\text{جف طہ}_1\ \text{جف طہ}_2} \frac{\text{فر طہ}_2}{\text{فرت}} + \ldots\ldots \qquad (181)$$

لیکن مساوات (۱۷۸) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف ط}_1} = \frac{\text{جف}^2\text{ لا}}{\text{جف ط}_1^2}\,\text{طَ}_1 + \frac{\text{جف}^2\text{ لا}}{\text{جف ط}_1\text{ جف ط}_2}\,\text{طَ}_2 + \ldots \quad (\text{۱۸۲})$$

مساواتوں (۱۸۱) اور (۱۸۲) کے بائیں جانبی ارکان مماثل ہیں، اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طَ}_1}\right) = \frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف ط}_1}$$

اور مساوات (۱۸۰) کی آخری سطر

$$\Sigma\,\text{ک}\left(\text{لاَ}\,\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف ط}_1} + \text{ماَ}\,\frac{\text{جف ماَ}}{\text{جف ط}_1} + \text{ئَ}\,\frac{\text{جف ئَ}}{\text{جف ط}_1}\right)$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس کی قیمت

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ط}_1}\,\Sigma\,\text{ک}\left[\tfrac{1}{2}\left(\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 + \text{ئَ}^2\right)\right]$$

ہے یا

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_1}$$

اب مساوات (۱۸۰) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طَ}_1}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_1}$$

$$= \Sigma\,\text{ک}\left(\frac{\text{فر}^2\text{ لا}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1} + \frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ط}_1} + \frac{\text{فر}^2\text{ ئ}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف ئ}}{\text{جف ط}_1}\right)$$

لیکن حرکت کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{٧} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}^2\text{ لا}}{\text{فرت}^2}\text{، وغیرہ}$$

(۴۴۴)

اس لیے مساوات مندرجۂ بالا ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\right)-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}=\sum\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}+\text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1}+\text{ے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

اگر ہم نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کریں جس میں طہ_1 بڑھکر $\text{طہ}_1 + \text{مف طہ}_1$، طہ_2 بڑھکر $\text{طہ}_2 + \text{مف طہ}_2$، طہ_3 بڑھکر $\text{طہ}_3 + \text{مف طہ}_3$ وغیرہ ہو جائے تو انجام پائے ہوئے کام کے لیے جو دو مختلف جملے حاصل ہوتے ہیں ان کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے :

$$\text{ط}_1\,\text{مف طہ}_1+\text{ط}_2\,\text{مف طہ}_2+\ldots\ldots$$
$$=\sum\left(\text{لا مف لا}+\text{ما مف ما}+\text{ے مف ی}\right)$$

صفحہ (۰۰) میں مف لا کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے اس کا اندراج کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ط}_1\,\text{مف طہ}_1+\text{ط}_2\,\text{مف طہ}_2+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\sum\left[\text{لا}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}\text{مف طہ}_1+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_2}\text{مف طہ}_2+\ldots\right)+\text{ما}\,(\ldots\ldots)+\text{ے}\,(\ldots\ldots)\right]$$

$$=\text{مف طہ}_1\sum\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}+\text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1}+\text{ے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)+\text{مف طہ}_2\sum(\ldots)+\ldots$$

$$=\text{مف طہ}_1\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\right)-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\right]+\text{مف طہ}_2\,[\ldots]+\ldots\ldots$$

اور مساوات

$$\sum \text{مف طہ}_1 \left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} - \text{ط}_1 \right] = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے ۔

یہ مساوات وہی ہے جو (۵ ، ۱) ہے اور لگرانج کی مساواتوں کی مختلف شکلیں حسب سابق اخذ کی جا سکتی ہیں ۔

دھکے والی قوتوں کے لیے لگرانج کی مساواتیں

۶ ، ۲ — فرض کرو کہ دھکوں کا ایک نظام چھوٹے وقفہ $\text{ت} = \text{ت}_1$ تا $\text{ت} = \text{ت}_2$ عمل کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ طہ_1 ، طہ_2 ، طہ_3 ، ... ، $\text{طہ}_\text{ن}$ غیر تابع محدد ہیں اور اس لیے لگرانج کی مساواتیں ہیں :

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \text{ط}_1 \text{، وغیرہ}$$

اگر ہم اس مساوات کو فرت سے ضرب دیں اور $\text{ت} = \text{ت}_1$ سے $\text{ت} = \text{ت}_2$ تک تکمل کریں تو

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \right) \text{فرت} - \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \text{فرت} = \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{ط}_1 \text{فرت}$$

پہلی رقم کی قیمت ہے

$$\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \right)_{\text{ت} = \text{ت}_2} - \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \right)_{\text{ت} = \text{ت}_1}$$

اور جب وقفہ ت_1 تا ت_2 کو انتہائی چھوٹا کیا جاتا ہے تو جملہ بالا صرف اُس تبدیلی کی پیمائش کرتا ہے جو دھکے نے $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$ میں پیدا کی ہے ۔ (۳۴۵)

دوسری رقم $\int_{ت_۱}^{ت_۲} \frac{جف ت}{جف ط_۱}$ فرت میں تکمل $\frac{جف ت}{جف ط_۱}$ محدود ہے
اور اس لیے جب وقت کے وقفہ کو لاانتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو
یہ رقم بھی وقت کے ساتھ معدوم ہو گی ۔ اس طرح مساوات ہو جاتی ہے:

$$\frac{جف ت}{جف ط_۱} \text{ میں تبدیلی} = \int_{ت_۱}^{ت_۲} ط_۱ فرت \qquad (۱۸۳)$$

۲۷۷ ۔ اگر ف معمولی قوت ہو جو وقفہ $ت_۱$ تا $ت_۲$ میں دھکے کی طرح
عمل کرے تو ہم $\int_{ت_۱}^{ت_۲}$ ف فرت کو دھکہ کہتے ہیں ۔ تعمیم شدہ محدد $ط_۱$ کے
جواب میں

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} ط_۱ فرت$$

کو تعمیم شدہ دھکہ کہا جاتا ہے ۔ اس طرح مساوات (۱۸۳) شکل

$$\frac{جف ت}{جف ط_۱} \text{ میں تبدیلی} = \text{تعمیم شدہ دھکہ}$$

میں حاصل ہوتی ہے ۔

رشتہ

کسی ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی = ذرہ پر دھکہ

کے ساتھ مساوات بالا کی مشابہت ہونے کی وجہ سے $\frac{جف ت}{جف ط_۱}$ کو تعمیم شدہ
معیار حرکت کہتے ہیں جو محدد $ط_۱$ کے متناظر ہے ۔ پس اصطلاحات
"دھکہ" اور "معیار حرکت" کے اِن معنوں کے ساتھ رشتہ

معیار حرکت کی تبدیلی = دھکہ

تعمیم شدہ محددوں میں بھی درست ہے ۔

جب ہمارے محدد لا، ما، ی ہوں جو فضا میں ایک متحرک ذرہ کے محدد ہیں تو تعمیم شدہ معیار حرکت بلا شبہ معیار حرکت کے معمولی اجزائے ترکیبی کے مماثل ہو جائیں گے۔ چنانچہ

$$ت = \frac{1}{2} ک (لاْ^2 + ماْ^2 + یْ^2)$$

اِس لیے $\frac{جف ت}{جف لاْ} = ک لاْ$، وغیرہ

(۳۴۶)

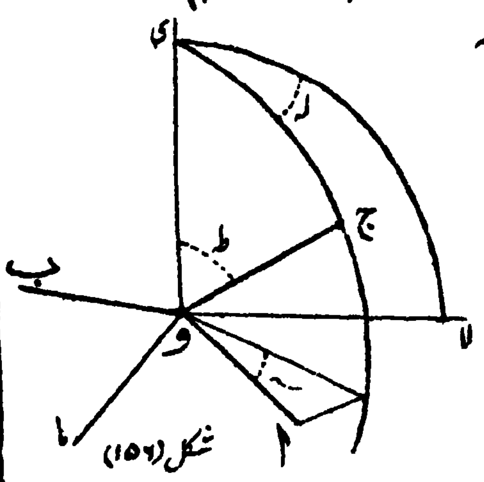
استوار جسم کے لیے یولر کی مساواتیں

۲۷۸ ــــ یولر کی مساواتیں (دفعہ ۲۵۳) لگرانج کی مساواتوں سے اخذ کیجا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم ہے جس میں نقطہ و ثابت ہے اور نیز یہ نقطہ فضا میں ثابت ہے یا وہ جسم کا مرکز ثقل ہے۔ فرض کرو کہ اِس اُستوار جسم کے معیار، نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کے گرد ا، ب، ج ہیں۔ تب اگر اِن محددوں کے گِرد گردش کے اجزائے ترکیبی سہ۱، سہ۲، سہ۳ ہوں تو حسب دفعہ ۲۴۸ حاصل ہوتا ہے:

$$ت = \frac{1}{2} (ا سہ_1^2 + ب سہ_2^2 + ج سہ_3^2) \qquad (۱۸۴)$$

لگرانجی محددوں کے طور پر



شکل (۱۵۶)

فرض کرو کہ جسم کے تیسرے محور و ج کے کُروی قطبی محدد طہ، لہ ہیں اور ایک تیسرا محدد سہ جسم کے محور اول و ا اور اُس مستوی کا درمیانی زاویہ ہے جو و ج اور محور طہ = ۰ میں سے گزرتا ہے یعنی مستوی ج و ی۔

ہیں اول $سہ_1$، $سہ_2$، $سہ_3$ کو طہ، لہ، سہ کی رقوم میں معلوم کرنا ہے تاکہ ۲ ف ت، اِن محددوں کے تفاعل کے طور پر بیان ہو سکے۔ جسم کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے یعنے وہ حرکت جو مستوی ج وی کے لحاظ سے ہے اور وہ حرکت جو مستوی ج وی کی بلحاظ ثابت محوروں کے ہے۔ اول الذکر حرکت، و ج کے گرد گردش سہ پر مشتمل ہے اور اگر اِس کو محوروں و ا، و ب، و ج پر تحلیل کیا جائے تو اِس کے اجزائے ترکیبی

۰، ۰، سہ

ہیں۔

مستوی ج و ی کی حرکت دو گردشوں یعنے

(ا) گردش طہ جو مستوی ج وی کے علی القوائم محور کے گرد ہے،
(ب) گردش لہ جو محور طہ = ۰ کے گرد ہے

سے مرکب ہے۔

اگر اِن گردشوں کو محاور و ا، و ب، و ج کی سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو پہلے حصہ کے اجزائے ترکیبی (۳۴۷)

طہ جب سہ، طہ جم سہ، ۰

اور دوسرے کے اجزائے ترکیبی

- لہ جب طہ جم سہ، لہ جب طہ جب سہ، لہ جم طہ

ہیں۔

اِن حرکتوں کو مرکب کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{array}{l} سہ_1 = طہ\ جب\ سہ - لہ\ جب\ طہ\ جم\ سہ \\ سہ_2 = طہ\ جم\ سہ + لہ\ جب\ طہ\ جب\ سہ \\ سہ_3 = سہ + لہ\ جم\ طہ \end{array}\right\} \quad (۱۸۵)$$

فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام

طا مف طہ + لا مف لہ + سا مف سہ

ہے۔ تب محدد سا کے لیے لگرانج کی مساوات ہے:

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہَ}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}} = \text{سا} \qquad (۱۹۶)$$

مساوات (۱۸۴) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہَ}} = \text{ا سہ}_۱ \frac{\text{جف سہ}_۱}{\text{جف سہَ}} + \text{ب سہ}_۲ \frac{\text{جف سہ}_۲}{\text{جف سہَ}} + \text{ج سہ}_۳ \frac{\text{جف سہ}_۳}{\text{جف سہَ}}$$

$$= \text{ج سہ}_۳$$ مساواتوں (۱۸۵) سے اندراج کرنے پر۔

نیز

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف سہ}} = \text{ا سہ}_۱ \frac{\text{جف سہ}_۱}{\text{جف سہ}} + \text{ب سہ}_۲ \frac{\text{جف سہ}_۲}{\text{جف سہ}} + \text{ج سہ}_۳ \frac{\text{جف سہ}_۳}{\text{جف سہ}}$$

$$= \text{ا سہ}_۱ \left(\text{طہَ جم سہ} + \text{لہَ جب طہ جب سہ}\right)$$

$$+ \text{ب سہ}_۲ \left(-\text{طہَ جب سہ} + \text{لہَ جب طہ جم سہ}\right)$$

$$= (\text{ا} - \text{ب})\,\text{سہ}_۱\,\text{سہ}_۲$$

بالآخر سا مف سہ وہ کام ہے جو بیرونی قوتیں چھوٹی گردش مف سہ میں انجام دیتی ہیں اور اس لیے بموجب دفعہ (۱۲۱) سا محور و ج کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ ن کے مساوی ہے۔

ان تمام اندراجات کو عمل میں لانے پر مساوات (۱۹۶) ہو جاتی ہے: (۳۴۸)

$$\text{ج}\,\frac{\text{فر سہ}_۳}{\text{فر ت}} - (\text{ا} - \text{ب})\,\text{سہ}_۱\,\text{سہ}_۲ = \text{ن}$$

جو یولر کی تیسری مساوات ہے اور دوسری دو مساواتوں کو تشاکل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

چھوٹے اہتزاز

۲۷۹ — فرض کرو کہ کسی نظام کے تعمیم شدہ محدد $\text{طہ}_۱$، $\text{طہ}_۲$، $\text{طہ}_۳$ ... $\text{طہ}_ن$ ہیں اور فرض کرو کہ یہ تمام محدد غیر تابع ہیں اور اس لیے $\text{طہَ}_۱$، $\text{طہَ}_۲$ ... $\text{طہَ}_ن$ کی

قیمتوں کے کسی جٹ سے نظام کی ایک ممکن تشکیل حاصل ہوتی ہے۔
فرض کرو کہ تشکیل

$$\text{ط}_{۱} = \bar{\text{ط}}_{۱} ،\ \text{ط}_{۲} = \bar{\text{ط}}_{۲} ،\ \ldots ،\ \text{ط}_{ن} = \bar{\text{ط}}_{ن} \qquad (۱۸۷)$$

توازن کی تشکیل ہے ۔ اب اگر

$$\text{ل}_{۱} = \text{ط}_{۱} - \bar{\text{ط}}_{۱} ،\ \text{ل}_{۲} = \text{ط}_{۲} - \bar{\text{ط}}_{۲} ،\ \ldots ،\ \text{ل}_{ن} = \text{ط}_{ن} - \bar{\text{ط}}_{ن}$$

تو مقداروں $\text{ل}_{۱}$، $\text{ل}_{۲}$، ....، $\text{ل}_{ن}$ کو نظام کے تعمیم شدہ محددوں کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور یہ محدد توازن کے محل میں سب کے سب معدوم ہونگے۔ فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں توانائی بالقوہ کی قیمت $\text{ک}_{ب}$ سے تعبیر کی گئی ہے ۔ کسی دوسری تشکیل میں توانائی بالقوہ کے جملہ کو ٹیلر کے مسئلہ سے شکل

$$\text{ک} = \text{ک}_{ب} + \text{ل}_{۱} \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_{۱}} + \text{ل}_{۲} \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_{۲}} + \ldots + \text{ل}_{ن} \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_{ن}}$$
$$+ \frac{۱}{۲} \left(\text{ل}_{۱}^{۲} \frac{\text{جف}^{۲}\text{ک}}{\text{جف ط}_{۱}^{۲}} + ۲ \text{ل}_{۱} \text{ل}_{۲} \frac{\text{جف}^{۲}\text{ک}}{\text{جف ط}_{۱} \text{جف ط}_{۲}} + \ldots \right)$$
$$+ \ldots\ldots$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرقی سروں کو توازن کے محل میں محسوب کیا گیا ہے ۔ لیکن توازن کے اس محل میں دفعہ ۱۳۵ کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_{۱}} = \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_{۲}} = \ldots = \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}_{ن}} = ۰$$

اس لیے ک کی قیمت کو شکل (۴۴۹)

$$\text{ک} = \text{ک}_{ب} + \text{ا}_{۱۱} \text{ل}_{۱}^{۲} + ۲ \text{ا}_{۲۱} \text{ل}_{۱} \text{ل}_{۲} + \ldots + \text{ا}_{نن} \text{ل}_{ن}^{۲}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جس میں $\text{ل}_{۱}$، $\text{ل}_{۲}$... کی وہ قوتیں جو دو سے بڑھی ہیں

نظر انداز کر دی گئی ہیں کیونکہ ہم صرف اُن حرکتوں پہ توجہ محدود رکھتے ہیں جن میں لہ_1، لہ_2 ... سب کے سب چھوٹی مقداریں ہیں ۔

توانائی بالحرکت حسب سابق (دفعہ ۲۷۶) $\dot{\text{لہ}}_1$، $\dot{\text{لہ}}_2$، ... $\dot{\text{لہ}}_\text{ن}$ کا ایک دو درجی تقاعل ہے ۔ فرض کرو کہ

$$\text{ت} = \text{ب}_{11}\dot{\text{لہ}}_1^2 + 2\,\text{ب}_{12}\dot{\text{لہ}}_1\dot{\text{لہ}}_2 + \dots + \text{ب}_{\text{نن}}\dot{\text{لہ}}_\text{ن}^2 \qquad (189)$$

سر ب_{11}، ب_{12}، ... $\text{ب}_{\text{نن}}$ فی الحقیقت طہ_1، طہ_2، ... $\text{طہ}_\text{ن}$ کے تقاعلات ہیں لیکن ہم ان کی قیمتوں کو اُن قیمتوں کے مساوی سمجھ سکتے ہیں جو توازن کی تشکیل میں حاصل ہوتی ہیں اور اس لیے ان کو مستقل مقداروں کے طور پر سمجھا جا سکتا ہے ۔

۲۸۰ ــ اب ن متغیروں لا_1، لا_2، ... $\text{لا}_\text{ن}$ کے دو درجی دو تقاعلوں پر غور کرو جو حسب ذیل ہیں:

$$\text{ف}(\text{لا}_1, \text{لا}_2, \dots \text{لا}_\text{ن}) = \text{ا}_{11}\text{لا}_1^2 + 2\,\text{ا}_{12}\text{لا}_1\text{لا}_2 + \dots + \text{ا}_{\text{نن}}\text{لا}_\text{ن}^2 ،$$

$$\text{ق}(\text{لا}_1, \text{لا}_2, \dots \text{لا}_\text{ن}) = \text{ب}_{11}\text{لا}_1^2 + \text{ب}_{12}\text{لا}_1\text{لا}_2 + \dots + \text{ب}_{\text{نن}}\text{لا}_\text{ن}^2$$

چونکہ تقاعل ت جس کی تعریف مساوات (۱۸۹) سے کی گئی ہے بالضرور مثبت ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق $(\text{لا}_1, \text{لا}_2, \dots \text{لا}_\text{ن})$ کو لا_1، لا_2، ... $\text{لا}_\text{ن}$ کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہونا چاہئے ۔ پس جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلہ سے ہم حسب ذیل نمونے کا ایک استحالہ معلوم کر سکتے ہیں:

$$\left.\begin{aligned} \text{لا}_1 &= \text{کہ}_{11}\text{ضا}_1 + \text{کہ}_{12}\text{ضا}_2 + \dots + \text{کہ}_{1\text{ن}}\text{ضا}_\text{ن} \\ \text{لا}_2 &= \text{کہ}_{21}\text{ضا}_1 + \text{کہ}_{22}\text{ضا}_2 + \dots + \text{کہ}_{2\text{ن}}\text{ضا}_\text{ن} \end{aligned}\right\} \qquad (190)$$

جس میں سر کہ، وغیرہ حقیقی ہیں ۔ یہ استحالہ ایسا ہے کہ ف اور **ف** حسب ذیل نمونے کے جملوں میں مستحیل ہوتے ہیں:

$$\text{ف}(\text{لا}_1,\text{لا}_2,\ldots,\text{لا}_n) = \text{عـ}_1\,\text{ضا}_1^2 + \text{عـ}_2\,\text{ضا}_2^2 + \cdots + \text{عـ}_n\,\text{ضا}_n^2,$$

$$\textbf{ف}(\text{لا}_1,\text{لا}_2,\ldots,\text{لا}_n) = \text{بـ}_1\,\text{ضا}_1^2 + \text{بـ}_2\,\text{ضا}_2^2 + \cdots + \text{بـ}_n\,\text{ضا}_n^2$$

اور تمام سر بـ_1، بـ_2، ...، بـ_n مثبت ہوں گے ۔

اِس مسئلہ کے جبریہ ثبوت علم التحلیل کے مقالات یا سامن کی ہائر الجبرا میں ملیں گے ۔ یہ مسئلہ ایک ہندسی تعبیر پر جس میں متغیروں کی تعداد تین ہے غور کرنے سے فوراً سمجھ میں آجائے گا۔ متغیروں کو لا، ما، ی لینے سے مساواتیں (۲۵۰)

$$\text{ف}(\text{لا},\text{ما},\text{ی}) = 1,\quad \textbf{ف}(\text{لا},\text{ما},\text{ی}) = 1 \qquad (191)$$

ہم مرکز دو درجیوں کی مساواتیں ہوں گی اور چونکہ لا، ما، ی کی تمام قیمتوں کے لیے **ف** مثبت ہے اس لیے دوسرا دو درجی ایک ناقص نما ہوگا ۔ یہ معلوم ہے کہ اگر دو ہم مرکز دو درجیوں میں سے ایک ناقص نما ہو تو ایسے دو درجی باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں ۔ اُس نمونے کے استحالہ سے جس کو مساوات (۱۹۴) سے بیان کیا گیا ہے ہم محددوں کے محوروں کو اِن وتروں پر منتقل کر سکتے ہیں اور تب دو درجیوں کی مساواتیں مطلوبہ اشکال

$$\text{عـ}_1\,\text{ضا}_1^2 + \text{عـ}_2\,\text{ضا}_2^2 + \text{عـ}_3\,\text{ضا}_3^2 = 1,\quad \text{بـ}_1\,\text{ضا}_1^2 + \text{بـ}_2\,\text{ضا}_2^2 + \text{بـ}_3\,\text{ضا}_3^2 = 1 \qquad (192)$$

میں حاصل ہوتی ہیں ۔

[معمولی استدلال سے اِس ہندسی مسئلہ کی صداقت ظاہر ہوگی کہ ایک ناقص نما اور ایک دوسرا دو درجی ہمیشہ باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں ۔ کیونکہ ایک حقیقی خطی استحالہ سے ناقص نما ایک کرہ میں مستحیل ہوگا اور دوسرا دو درجی ایک نئے لیکن تاہم حقیقی دو درجی میں مستحیل ہوگا۔ اب

اس حقیقی دو درجی کے صدر محور، کرہ اور دو درجی کے لیے باہم مزدوج حقیقی قطر ہیں اور اُن استحالہ کرنے سے باہم مزدوج حقیقی قطر باہم مزدوج حقیقی قطر رہتے ہیں۔

اور ہم نے جبریہ طور پر ثابت کیا ہے کہ مساواتیں (۱۹۱)، مساوات ل (۱۹۲) میں مستحیل ہو سکتی ہیں لیکن یہ ظاہر ہے کہ یہ جبریہ ثبوت صرف تین متغیروں کی صورت پر محدود نہیں ہے اس لیے مسئلہ بالا متغیروں کی کسی تعداد کے لیے درست ہونا چاہیے۔

۲۸۱ — اس مسئلہ سے ثابت ہوتا ہے کہ ہم نئے محدد $س_1$، $س_2$، ... $س_ن$ معلوم کر سکتے ہیں جو محددوں $ل_1$، $ل_2$، ... $ل_ن$ سے رشتوں

$$ل_1 = ک_{11} س_1 + ک_{12} س_2 + \dots + ک_{1ن} س_ن \qquad (۱۹۳)$$

$$\dot{ل}_1 = ک_{11} \dot{س}_1 + ک_{12} \dot{س}_2 + \dots + ک_{1ن} \dot{س}_ن \qquad (۱۹۴)$$

کے ذریعہ مربوط ہوں اس طور پر کہ اگر اِن محددوں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت حسب ذیل اشکال اختیار کریں:

$$ک = ک_ب + ع_1 س_1^2 + ع_2 س_2^2 + \dots + ع_ن س_ن^2 \qquad (۱۹۵)$$

$$ت = ب_1 \dot{س}_1^2 + ب_2 \dot{س}_2^2 + \dots + ب_ن \dot{س}_ن^2 \qquad (۱۹۶)$$

محددوں $س_1$، $س_2$، ... $س_ن$ کو نظام کے **صدر محدد** کہا جاتا ہے، بعض مصنف اِن کو **طبعی محدد** بھی کہتے ہیں۔

اِن محددوں کی رقوم میں لگرانج کی مساواتیں ہیں: (۳۵۱)

$$\frac{ف}{فت}\left(\frac{جف\, ت}{جف\, \dot{س}_1}\right) - \frac{جف\, ت}{جف\, س_1} = -\frac{جف\, ک}{جف\, س_1}، \quad \text{وغیرہ}$$

ہیں اور یہ مساواتیں

$$ب_1 \frac{ف^2 س_1}{فت^2} = -ع_1 س_1، \quad \text{وغیرہ}$$

ہو جاتی ہیں۔

قائم توازن

۲۸۲ — اگر ع_1 مثبت ہے تو فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1} = \text{ک}_1^2$ رکھتے ہیں اور اس لیے ک_1 حقیقی ہو گا۔

مساوات اب ہے

$$\frac{\text{ف}^2 \text{س}_1}{\text{ف ت}^2} = -\text{ک}_1^2 \text{س}_1$$

اور اس کا حل ہے

$$\text{س}_1 = \text{ا}_1 \text{ جم } (\text{ک}_1 \text{ت} - \text{ص}_1) \qquad (198)$$

جو دفعہ (۲۰۸) کے مطابق ہے۔ اس طرح حرکت تعدد ک_1 کی سادہ موسیقی حرکت ہے۔ اگر تمام سر ع_1، ع_2، .... ع_n مثبت ہوں تو مساواتوں کے مکمل حل کی شکل

$$\text{س}_1 = \text{ا}_1 \text{ جم } (\text{ک}_1 \text{ت} - \text{ص}_1)،$$
$$\text{س}_2 = \text{ا}_2 \text{ جم } (\text{ک}_2 \text{ت} - \text{ص}_2)، \text{ وغیرہ}$$

ہو گی اور کسی ذرہ کا محدد لا جس کی قیمت توازن کے محل میں لا_0 ہے حسب ذیل ہو گی:

$$\text{لا} = \text{لا}_0 + (\text{ط}_1 - \bar{\text{ط}}_1)\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1} + (\text{ط}_2 - \bar{\text{ط}}_2)\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_2} + \cdots\cdots$$

$$= \text{لا}_0 + \text{ل}_1 \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1} + \text{ل}_2 \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_2} + \cdots\cdots$$

$$= \text{لا}_0 + \text{ب}_1 \text{ جم } (\text{ک}_1 \text{ت} - \text{ص}_1) + \text{ب}_2 \text{ جم } (\text{ک}_2 \text{ت} - \text{ص}_2) + \cdots$$

جہاں ب_1، ب_2، .... نئے مستقلات ہیں۔

پس کسی واحد ذرہ کی حرکت وہ حرکت ہو گی جو متعدد سادہ موسیقی

حرکتوں سے مرکب ہوگی۔

۲۸۳ — کسی صدر محدد سہ_1 کے جواب میں توانائی بالقوہ $\text{ع}_1 \text{سہ}_1^2$ (۳۵۲)
ہے یا اگر ہم سہ_1 کو مساوات (۱۹۸) سے حاصل کریں تو یہ توانائی بالقوہ

$$\text{ع}_1 \text{ا}_1^2 \text{جم}^2 (\text{کہ}_1\text{ت} - \text{صہ}_1)$$

ہے۔

اسی طرح اس صدر ارتعاش کے جواب میں توانائی بالحرکت $\text{ب}_1 \dot{\text{سہ}}_1^2$ یا

$$\text{ب}_1 \text{ا}_1^2 \text{کہ}_1^2 \text{جب}^2 (\text{کہ}_1\text{ت} - \text{صہ}_1)$$

ہے۔ اگر ایک طویل وقت کے لیے اوسط لیا جائے تو $\text{جم}^2 (\text{کہ}_1\text{ت} - \text{صہ}_1)$ اور $\text{جب}^2 (\text{کہ}_1\text{ت} - \text{صہ}_1)$ کی اوسط قیمتیں $\frac{1}{2}$ ہیں اور اس لیے اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت علی الترتیب

$$\frac{1}{2} \text{ع}_1 \text{ا}_1^2 \text{ ، } \frac{1}{2} \text{ب}_1 \text{ا}_1^2 \text{کہ}_1^2$$

ہیں اور یہ مساوی ہیں کیونکہ $\text{کہ}_1^2 = \frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1}$ ۔ پس کسی ارتعاش میں اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت مساوی ہوتی ہیں۔

غیر قایم توازن

۲۸۴ — فرض کرو کہ مساوات (۱۹۵) کے سروں میں سے کوئی ایک سر (فرض کرو ع_1) منفی ہے۔ فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1} = -\text{کہ}_1^2$ رکھتے ہیں تو کہ_1 حقیقی ہوگا۔ اب مساوات (۱۹۷) شکل

$$\frac{\text{فر}^2 \text{سہ}_1}{\text{فرت}^2} = \text{کہ}_1^2 \text{سہ}_1$$

اختیار کرتی ہے اور اس کا حل ہے

$$س_١ = ا_١ و^{ک_١ ت} + ب_١ و^{ک_٢ ت}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $س_١$ وقت کے ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور قیمت $س_١ = ٠$ کے گرد اہتزاز نہیں کرتا۔ اس طرح حرکت غیر قائم ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت صرف اُس وقت قائم ہو سکتی ہے جبکہ سیروں $ع_١$، $ع_٢$، ...، $ع_ن$ میں سے سب سر مثبت ہوں۔ بالفاظ دیگر

قائم توازن کے لیے توانائی بالقوہ توازن کی تشکیل میں مطلقاً اقل ہونی چاہیئے۔

یہ وہ نتیجہ ہے جس کو بغیر ثبوت کے دفعہ ۱۵۲ میں بیان کیا جا چکا ہے۔ (۲۸۲)

قسری ارتعاش

۲۸۵ — وہ اہتزاز جن پر ہم اب تک غور کرتے رہے ہیں اُس نمونے کے ہیں جو آزاد ارتعاش کے طور پر مشہور ہیں یعنے کُل عاملہ قوتیں خود نظام کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

لیکن اہتزاز کا ایک اور نمونہ پیش ہوتا ہے جبکہ نظام پر اُن قوتوں کے علاوہ جو خود اُس کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں بیرونی جانب سے دوسری قوتیں بھی عمل کر رہی ہوں۔ اِن اہتزازوں کو قسری اہتزاز کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت علی الترتیب مساواتوں (۱۹۵) اور (۱۹۶) سے حاصل ہوئی ہیں اور یہ کہ کسی لمحہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا نظام ایسا ہے کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام

$$سا_١ مف س_١ + سا_٢ مف س_٢ + ...$$

ہے۔

اب اِس نظام کے لیے لگرانج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف }\dot{\text{س}}_1}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف س}_1} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف س}_1} + \text{سا}_1 \text{، وغیرہ}$$

یہ مساوات ہو جاتی ہے:

$$\text{۲ بہ}_1 \frac{\text{فر}^2\text{س}_1}{\text{فرت}^2} = -\text{۲ عہ}_1\text{س}_1 + \text{سا}_1 \qquad (۱۹۹)$$

جس میں سا، اب وقت کا ایک تفاعل ہے۔ اس مساوات کو اُن قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جا سکتا ہے جو تفرقی مساواتوں کی کسی کتاب میں مذکور ہوتے ہیں۔ اگر حسب سابق $\text{ک}_1^2 = \frac{\text{عہ}_1}{\text{بہ}_1}$ لیا جائے تو عام حل ہے:

$$\text{س}_1 = \text{ا}_1 \text{جم}(\text{ک}_1\text{ت} - \text{صہ}_1) + \frac{1}{\sqrt{\text{۲ عہ}_1\text{بہ}_1}} \int_{\bar{\text{ت}}=-\infty}^{\bar{\text{ت}}=\text{ت}} (\text{سا}_1)_{\text{ت}=\bar{\text{ت}}} \text{ جیب ک}_1(\text{ت} - \bar{\text{ت}})\,\text{فر}\bar{\text{ت}}$$

تکمیل کی نچلی حد یا تو $\bar{\text{ت}} = -\infty$ ہے یا وہ لمحہ ہے جس پر بیرونی قوتوں نے اولاً عمل کرنا شروع کیا تھا۔

۲۸۶ — ایک بہت اہم صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ سا، صرف وقت کے لحاظ سے دوری ہو، فرض کرو

$$\text{سا}_1 = \text{ع جم}(\text{ش}_1\text{ت} - \text{جہ}_1)$$

اب حل ہے

$$\text{سا}_1 = \text{ا}_1\text{جم}(\text{ک}_1\text{ت} - \text{صہ}_1) + \frac{\text{ع}}{\text{۲ عہ}_1 - \text{۲ بہ}_1\text{ش}_1^2}\text{ جم}(\text{ش}_1\text{ت} - \text{جہ}_1) \qquad (۲۵۴)$$

لیکن چونکہ $\text{عہ}_1 = \text{بہ}_1\text{ک}_1^2$ اس لیے

$$\text{سا}_1 = \text{ا}_1\text{جم}(\text{ک}_1\text{ت} - \text{صہ}_1) + \frac{\text{ع}}{\text{۲ عہ}_1\left(1 - \frac{\text{ش}_1^2}{\text{ک}_1^2}\right)}\text{ جم}(\text{ش}_1\text{ت} - \text{جہ}_1)$$

اِس طرح اب سا میں تغیّر 'تعدد کہ ا کی سادہ موسیقی حرکت اور نیز تعدد ث ا کی سادہ موسیقی حرکت سے مرکب ہے جہاں ث قوت عاملہ کا تعدد ہے ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ث ا 'کہ ا سے بہت ہی قریب ہو تو یہ دوسرا ارتعاش بہت بڑے حیطہ کا ہے ۔ انتہائی صورت ث ا = کہ ا میں دوسرا ارتعاش کا حیطہ لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن اب یہ دو ارتعاش ایک ہی دَور کے ہوتے ہیں اور اس لیے اِن کو مرکب کیا جا سکتا ہے ۔ ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ارتعاش لامتناہی حیطہ کا ہو گا کیونکہ ا اور صہ کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں اور یہ عین ایسی ہو سکتی ہیں کہ دوسری رقم کے لامتناہی حیطہ کو برباد کر دیں ۔ حاصل شدہ نتیجہ حسب ذیل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:

جب کسی نظام پر ایک دَوری قوت عمل کرے جس کا تعدد نظام کے صدہا ارتعاشات میں سے ایک کے تعدد کے بہت ہی قریب ہو تو قسری اہتزازات بہت بڑے حیطہ کے ہوں گے ۔

اِس کو گمک کا اصول کہتے ہیں۔

یہ اُصول ایسا ہے جس کے متعدد اطلاقات فطرت میں نظر آتے ہیں مثلاً ایک پُل کو جو مطلقاً اُستوار نہیں ہوتا ایک ایسا نظام سمجھا جا سکتا ہے جس میں متعدد آزاد ارتعاش ہیں ۔ اگر آدمیوں کی ایک جماعت قدم میں قدم ملاتے ہوئے باقاعدہ پُل پر سے گذرے تو وہ پُل پر ایک دَوری قوت لگائیں گے اور اگر ان کے قدم کا دَور پُل کے آزاد دَوروں میں سے کسی ایک پر تقریباً منطبق ہو جائے تو پُل میں قسری ارتعاشات کا حیطہ اسقدر بڑا ہو سکتا ہے کہ پُل پرخطر ہو جائے ۔ یہی سبب ہے کہ جب فوج پل کو عبور کرنا شروع کرتی ہے تو اِس کو "بے قاعدہ قدموں میں چلنے" کا حکم دیا جاتا ہے ۔

دوسری مثال ایک جہاز کی ہو سکتی ہے ' جہاز کامل طور پر اُستوار نہیں ہوتا اور اس لیے اس میں متعدد آزاد ارتعاش ہوں گے ۔ اِس کے انجنوں کی حرکت ایک دَوری قوت لگائے گی جس کا دَور اِس کی گردش کے مساوی ہوگا اور اگر یہ

دَور جہاز کے آزاد ارتعاشات میں سے کسی پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت بُری طرح نیچے اوپر ہونا شروع کرے گا۔ اِس کا علاج انجن کی چال کو بدل کر کیا جا سکتا ہے تا آنکہ وہ جہاز کے آزاد ارتعاش کے ساتھ گمک میں نہ ہو۔

آخری مثال کے طور پر یہ بتایا جا سکتا ہے کہ کوئی جہاز اپنے انتصابی (۳۵۵)
محل کے گِرد لُڑھکنے کا ایک آزاد دَور رکھے گا۔ اگر جہاز سمندر کے اندر بھنور میں ہو تو اِس سے ٹکرانے والی موجیں بیرونی قوتیں لگائیں گی جن کو تقریباً دَوری سمجھا جا سکتا ہے۔ اگر موجوں کا دَور جہاز کے دَور پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت زیادہ لُڑھکنے لگیگا اگرچہ موجیں مقابلتاً چھوٹی ہوں۔ اس خطرہ کا علاج جہاز کے راستہ کو بدل کر کیا جا سکتا ہے، اِس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ موجیں اب مختلف وقفہ پر جہاز سے ٹکرائیں گی۔ دوسرا طریقہ بادبان پھیلا کر جہاز کے میلان کو بدلنے کا ہے، اِس کی وجہ سے جہاز توازن کے ایک مختلف محل کے گِرد اہتزاز کرے گا اور اِس کے گِرد آزاد ارتعاشات مختلف ہوں گے۔

آئینی مساواتیں

۲۸۷ — اگر ط_1، ط_2، .... کسی نظام کے لگرانجی محدد ہوں تو توانائی بالحرکت ت ایک دودرجی تفاعل ہے $\dot{\text{ط}}_1$، $\dot{\text{ط}}_2$، ... کا۔ فرض کرو کہ متناظر معیار ع_1، ع_2، ...، $\text{ع}_\text{ن}$ ہیں جو مساواتوں

$$\text{ع}_1 = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف } \dot{\text{ط}}_1}\text{، وغیرہ} \qquad (۳۰۰)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ ہم ایک تفاعل $\bar{\text{ت}}$ شریک کرتے ہیں جہاں

$$\bar{\text{ت}} = \text{ع}_1 \dot{\text{ط}}_1 + \text{ع}_2 \dot{\text{ط}}_2 + \dots - \text{ت}$$

اِس طرح $\bar{\text{ت}}$ ایک تفاعل ہے ع_1، ع_2، ...، ط_1، ط_2، ...، $\dot{\text{ط}}_1$، $\dot{\text{ط}}_2$... کا۔

نیز یہ ظاہر ہے کہ ع_1، ع_2، ... تفاعلات ہیں $\dot{\text{ط}}_1$، $\dot{\text{ط}}_2$، ...، ط_1، ط_2، ... کے۔

تَ کو تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

فرتَ = ع$_1$ فرطہ$_1$ + ع$_2$ فرطہ$_2$ + ...

+ طہ$_1$ فرع$_1$ + طہ$_2$ فرع$_2$ + ...

− (جف ت / جف طہ$_1$) فرطہ$_1$ − (جف ت / جف طہ$_2$) فرطہ$_2$ ....

− (جف ت / جف طہ$_1$) فرطہ$_1$ − (جف ت / جف طہ$_2$) فرطہ$_2$ − ....

اور یہ، مساوات (۲۰۰) کی رو سے

فرتَ = طہ$_1$ فرع$_1$ + طہ$_2$ فرع$_2$ + ... − (جف ت / جف طہ$_1$) فرطہ$_1$ − (جف ت / جف طہ$_2$) فرطہ$_2$ − ...

(۲۰۱)

میں تحویل ہوتی ہے۔

اب چونکہ تفرقی فرطہ$_1$، فرطہ$_2$، ..... اس مساوات میں شریک (۲۵۶)
نہیں ہیں اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تَ کو صرف ع$_1$، ع$_2$، .....،
طہ$_1$، طہ$_2$، .... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم
آسانی سے اس کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

ع$_1$ طہ$_1$ + ع$_2$ طہ$_2$ + ... + ع$_ن$ طہ$_ن$

= طہ$_1$ (جف ت / جف طہ$_1$) + طہ$_2$ (جف ت / جف طہ$_2$) + ... + طہ$_ن$ (جف ت / جف طہ$_ن$)

= ۲ ت، کیونکہ ت ایک متجانس دو درجی تفاعل ہے طہ$_1$، طہ$_2$،

..... کا۔

اس طرح تَ = ۲ ت − ت = ت

جس سے یہ ثابت ہے کہ تَ، ت کے مساوی ہے لیکن وہ ع$_1$، ع$_2$،
....، طہ$_1$، طہ$_2$، .... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان ہوا ہے۔

اس لیے

$$\text{تَ} = \text{ت} = \frac{1}{2}\left(\text{ع}_1\,\text{طہ}_1 + \text{ع}_2\,\text{طہ}_2 + \dots + \text{ع}_\text{ن}\,\text{طہ}_\text{ن}\right)$$

تمثیلاً فرض کرو کہ $\text{ت} = \text{ا}\,\text{طہ}_1^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{طہ}_1\,\text{طہ}_2 + \text{ب}\,\text{طہ}_2^2$

تو $\text{ع}_1 = 2(\text{ا}\,\text{طہ}_1 + \text{ھ}\,\text{طہ}_2)$، $\text{ع}_2 = 2(\text{ھ}\,\text{طہ}_1 + \text{ب}\,\text{طہ}_2)$

اب تعریف کی رو سے

$$\text{تَ} = \text{ع}_1\,\text{طہ}_1 + \text{ع}_2\,\text{طہ}_2 + \dots - \text{ت}$$

$$= 2\,\text{طہ}_1(\text{ا}\,\text{طہ}_1 + \text{ھ}\,\text{طہ}_2) + 2\,\text{طہ}_2(\text{ھ}\,\text{طہ}_1 + \text{ب}\,\text{طہ}_2) - \text{ت}$$

$$= \text{ت} = \frac{1}{2}\,\text{ع}_1\,\text{طہ}_1 + \frac{1}{2}\,\text{ع}_2\,\text{طہ}_2$$

مساوات (۲۰۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف تَ}}{\text{جف طہ}_1} = -\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1},$$

$$\frac{\text{جف تَ}}{\text{جف ع}_1} = \text{طہ}_1 \qquad (۲۰۲)$$

لگرانج کی مساواتوں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = 0$$

میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف}(\text{ت} - \text{ک})}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \text{ع}_1$$

اِس طرح لگرانج کی مساواتیں شکل (۳۵۷)

$$\frac{\text{فر ع}_1}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف}(\text{ت} - \text{ک})}{\text{جف طہ}_1} = -\frac{\text{جف}(\text{تَ} + \text{ک})}{\text{جف طہ}_1}$$

میں لکھی جا سکتی ہیں، اور مساوات (۲۰۲) کی رُو سے

$$\frac{\text{فر طہ}_1}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف تَ}}{\text{جف ع}_1}$$

اگر ہم لکھیں ھ = تَ + ک تو یہ مساواتیں شکل ذیل اختیار کرتی ہیں :

$$\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ع}_1} ،$$

$$\frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}} = -\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف طہ}_1} ، \quad \text{وغیرہ}$$

۲۸۸ — اس کو حرکیاتی مساواتوں کی آئینی شکل کہا جاتا ہے۔ تفاعل ھ کو ہیملٹونی تفاعل کہتے ہیں اور چونکہ ھ = تَ + ک اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ھ کل توانائی ہے جو محددوں طہ_1، طہ_2، ....، طہ_n اور معیاروں ع_1، ع_2، ....، ع_n کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کی گئی ہے۔ یہ آئینی شکل وہ سادہ ترین اور کامل ترین شکل ہے جس میں تعمیم شدہ حرکیاتی مساواتیں بیان کی جاسکتی ہیں۔ اسی سبب سے مساواتوں کی یہ آئینی شکل حرکیات اعلیٰ، 'ریاضیاتی طبیعات' اور ریاضیاتی ہیئت کی بہت سی تحقیقاتوں میں ابتداً استعمال کیجاتی ہے۔

۲۸۹ — ہم اس کتاب کو تعمیم شدہ محددوں کے استعمال کی دو مثالیں دے کر ختم کریں گے، یہ مثالیں ریاضیاتی طبیعات کی دو شاخوں سے لی گئی ہیں۔

مثال ماحرکیات سے — فرض کرو کہ کسی شکل کا ایک ٹھوس جسم ایک ندی میں ہے جو یکساں رفتار و سے بہہ رہی ہے۔ اگر جسم پانی کی سطح کے نیچے کافی گہرائی پر ہو تو اس کی موجودگی سے سطح پر کے بہاؤ میں کوئی خلل نہیں ہوگا اور صرف جسم کے قرب میں پانی کے بہاؤ میں خلل پڑے گا۔ ابتدائی ماحرکیاتی اصولوں سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ صرف ایک طریقہ ہے جس میں پانی جسم پر سے گذر کر بہہ سکتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پانی کے بہاؤ کی توانائی بالحرکت مساوات

$$\text{ت} = \text{تب} + \text{ع و}^2$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ت، وہ قیمت ہے جو توانائی بالحرکت کی ہو گی اگر جسم کو (۳۵۸
پانی سے نکال لیا جائے۔ فرض کرو کہ جسم پر پانی کے دباؤ کے علاوہ بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کسی محور کے گرد اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ طا ہے اور فرض کرو کہ طہ ایک محدد ہے جس سے اُس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم اِس محور کے گرد گھومتا ہے۔ تب محدد طہ کے جواب میں لگرانج کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = \text{طا}$$

اگر بیرونی قوتیں جسم کو پانی میں ساکن رکھنے کے لیے عین کافی ہوں تو $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right) = 0$ اور اِس لیے

$$\text{طا} = -\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = -\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف طہ}}\,\text{و}^2$$

پس پانی کے دباؤ کے معیاروں کا مجموعہ۔ طا ہونا چاہئے یا

$$\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف طہ}}\,\text{و}^2$$

ہم عہ کو جسم کی شکل سے محسوب کر سکتے ہیں اور اِس طرح جسم پر عمل کرنے والے جفتوں کا علم حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال برق مقناطیسیت سے ۔ وہ توانائی جو طاقتوں ط′، طَ کی برق کی دو یکساں روؤں کے بہاؤ کو دو معلومہ بند دَوروں میں جاری کرنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے شکل

$$\text{ع} = \frac{1}{2}\,\text{ل}\,\text{ط}'^2 + \text{م}\,\text{ط}'\,\text{طَ} + \frac{1}{2}\,\text{ن}\,\text{طَ}^2$$

میں معلوم ہے جہاں ل اور ن علی الترتیب پہلے اور دوسرے دَوروں کی شکل پر منحصر ہیں اور م دونوں دَوروں کی شکل پر اور نیز ایک دوسرے کے لحاظ سے اِن کے محلوں پر منحصر ہے۔

فرض کرو کہ دوسرا دَور پہلے دَور کی جانب کسی خط پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ فرض کرو کہ لا ایک محدد ہے جو اِس خط پر پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اُس سمت میں جس میں لا کی پیمائش ہوئی ہے وہ قوت جو دوسرے دَور کو ساکن رکھنے کے لیے مطلوب ہے ﻻ ہے۔

فرض کرو کہ ل سے حسب معمول تفاعل ت ـ ک تعبیر ہوتا ہے اور فرض کرو دوسرے دَور پر ایک بیرونی قوت عاملہ ﻻ عمل کرتی ہے ۔ اب محدد لا کے لیے لگرانج کی مساوات ہے :

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لاَ}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}}=\text{ﻻ}$$

اور چونکہ کوئی اسراع نہیں ہے اِس لیے

$$\text{ﻻ}=-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}}$$

تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ

$$\text{ﻻ}=-\text{طَ}\,\frac{\text{جف م}}{\text{جف لا}}=-\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اگر دو رَووں کی توانائی توانائی بالقوہ ہوتی تو حاصل ہونا چاہیئے (۳۵۹)

$$-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}}=+\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}\,،\;-\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}=-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}$$

یعنے قوت ﻻ مشاہدہ کردہ قوت کے ٹھیک مخالف ہوتی ۔
اِس کے برخلاف اگر توانائی توانائی بالحرکت ہے تو

$$-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}}=-\frac{\text{جف ت}}{\text{جف لا}}=-\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اور اِس لیے ﻻ کی قیمت مشاہدہ کے مطابق ہے ۔
پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ کسی برقی رو کی توانائی کُلّاً توانائی بالحرکت ہوتی ہے ۔

عام مثالیں

۱۔ ایک انجن کی رگڑ ایسی ہے کہ ایک ایسی طاقت سے وہ ۲۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرنے لگتا ہے جبکہ کوئی بیرونی کام انجام نہیں دیتا۔ اس کے متحرک حصوں کا جمود ایسا ہے کہ جب انجن، ۱۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرتا ہے اور اس پر ایک ایسی طاقت عمل کرتی ہے تو اس کی چال میں ۱۰ گردشوں فی ثانیہ کا اسراع پیدا ہوتا ہے۔ اگر انجن کو اپنے حال پر چھوڑ دیا جائے جبکہ وہ اپنی پوری چال ۲۵۰ گردشوں فی ثانیہ سے حرکت کر رہا ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی گردشیں کریگا۔

۲۔ ایک مربع ایک وتر کے گرد زاوئی رفتار سہ سے آزادانہ حرکت کر رہا ہے کہ اچانک ایک راس جو اس وتر میں نہیں ہے ثابت ہو جاتا ہے۔ اس ثابت نقطہ پر دہکہ کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ نئی زاوئی رفتار ½ سہ ہوگی۔

۳۔ چار مساوی ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ا اور کمیت ک ہے ایک معین کی شکل میں آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ یہ نظام سکون سے انتصابی وتر کے ساتھ گرتا ہے اور ایک ثابت افقی بے لچک مستوی سے ٹکراتا ہے۔ دہکہ اور اس کے بعد والی حرکت معلوم کرو۔

۴۔ دو ذرے جو ایک استوار ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہیں ایک چکنے انتصابی دائرہ پر حرکت کرتے ہیں۔ چھوٹے اہتزاز کا وقت معلوم کرو۔

۵۔ ایک ایکساں ڈنڈے کا طول ل ہے، اس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ ج پر کے دو نقطوں سے مساوی ڈوریاں باندھی گئی ہیں اور ان ڈوریوں کے دوسرے سرے دو ثابت نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ج ہے باندھے گئے ہیں، یہ ثابت نقطے ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں۔ صدر محدد اور ارتعاش کے متناظر دور معلوم کرو۔

۶ — اگر پچھلی مثال کے ڈنڈے کے ایک سرے پر دھکہ د کی ایک افقی ضرب اس کے طول کے علی القوائم پڑے تو دھکے کے بعد والی حرکت معلوم کرو —

۷ — نصف قطر ا کا ایک کھُردرا ایکساں اسطوانہ ہے اور اس کی مرکزی تراش کے گرد ایک نا امتداد پذیر ڈوری لپٹی ہوئی ہے ۔ ڈوری کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ ف سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گھماتے ہوئے ڈوری کو اس پر لپیٹا گیا ہے یہانتک کہ وہ نقطہ ف کو مس کرتا ہے اور ف پر اسطوانہ کا مماس انتصابی ہے ۔ تب اسطوانہ کو چھوڑ دیا گیا ہے حرکت معلوم کرو —

۸ — پچھلی مثال میں اگر ف پر کا مماس اسطوانہ کے محور پر عمود ہو (۳۶۰) لیکن ٹھیک انتصابی نہ ہو تو حرکت معلوم کرو —

۹ — کروی قطبی محددوں میں ثابت کرو کہ اکائی کمیت کے ایک متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\left(\dot{\text{ر}}^{2} + \text{ر}^{2}\dot{\text{طہ}}^{2} + \text{ر}^{2}\,\text{جب}^{2}\text{طہ}\,\dot{\text{لہ}}^{2}\right)$$

سے حاصل ہوتی ہے —

پس ثابت کرو کہ ذرہ کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ر، طہ، لہ کی بڑھتی ہوئی سمتوں میں حسب ذیل مقداروں کے ہیں :

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ر}}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ر}}\,،\quad \frac{1}{\text{ر}}\left[\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{طہ}}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right]،$$

$$\frac{1}{\text{ر جب طہ}}\;\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{لہ}}}\right)$$

ثابت کرو کہ ان اسراعوں کی اصلی قیمتیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{\text{ف}^{2}\text{ر}}{\text{فت}^{2}} - \text{ر}\dot{\text{طہ}}^{2} - \text{ر}\,\text{جب}^{2}\text{طہ}\,\dot{\text{لہ}}^{2}\,،\quad \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\text{ر}^{2}\dot{\text{طہ}}\right) - \text{ر جب طہ جم طہ}\,\dot{\text{لہ}}^{2}\,،$$

$$\frac{1}{ر جب ط} \quad \frac{فر}{فرت} \quad (ر^2 جب^2 ط لہ)$$

۱۰ — یہ معلوم ہوا کہ ایک ذرہ کی رفتار اُس کے مدار میں اُس فاصلہ کے مُربع کے بالعکس بدلتی ہے جو اُس کو ایک ثابت نقطہ سے ہے۔ اِس کا مدار معلوم کرنے میں اقل ترین عمل کا اصول استعمال کرو اور اِس سے کشش کا قانون دریافت کرو۔

یہی نتیجے توانائی کے قانونِ بقا سے اخذ کرو۔

۱۱ — فرض کرو کہ کائنات کی تمام قوتیں نابود کردی گئی ہیں اور یہ کہ ایک مخفی میکانیت ہے جو توانائی بالحرکت کی حامل ہوسکتی ہے۔ فرض کرو کہ اِس توانائی بالحرکت کی مقدار صرف کائنات کے مادی اجسام کے محلوں پر منحصر ہے اور اگر کائنات کی قوتیں نابود نہ ہوتیں تو مذکورہ بالا توانائی بالحرکت مقدار میں صرف ایک مستقل اور علامت کے اختلاف کے ساتھ نظام کی توانائی بالقوہ کے مساوی ہوتی۔

ثابت کرو کہ اِس قسم کی کائنات کے حرکیاتی مظاہر اُس کائنات کے حرکیاتی مظاہر کے مماثل ہوں گے جس میں دونوں قوتیں اور توانائی بالحرکت موجود ہوں جہاں ثانی الذکر کائنات کی تبدیلیاں نیوٹن کے قوانین حرکت سے متعین کی گئی ہوں۔

۱۲ — متعدد بے کمیت کرے جن کے نصف قطر اُ، بُ، جُ، ... ہیں، کثافت ثہ کے ایک لامتناہی سمندر میں ایک خط مستقیم میں حرکت کرتے ہیں، اِن کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے $ر_{اب}$، $ر_{بج}$ ... ہیں اور اِن کی رفتاریں $و_ا$، $و_ب$ ... ہیں۔ جب اُ، بُ، جُ، ... بمقابلہ $ر_{اب}$، $ر_{بج}$ ... کے چھوٹے ہوتے ہیں تو سمندر کی حرکت کی توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{2}{3}\pi\,\text{ث}\,\text{ا}^{3}\,\text{و}_{\text{د}}^{2} + \cdots + 2\pi\,\text{ث}\,\frac{\text{ا}^{3}\text{ب}^{3}}{\text{ر}^{3}_{\text{وب}}}\,\text{و}_{\text{ر}}\,\text{و}_{\text{ب}} + \cdots$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

ثابت کرو کہ کسی مشاہد کو جو سمندر کی موجودگی سے بے خبر ہو کُرے اِس طرح حرکت کرتے نظر آئیں گے گویا کہ ان کمیتیں $\frac{2}{3}\pi\,\text{ث}\,\text{ا}^{3}$، $\frac{2}{3}\pi\,\text{ث}\,\text{ب}^{3}$، .... ہیں اور گویا کہ وہ قوتیں جو کُروں کے ہر زوج کے درمیان عمل کرتی ہیں اِن کی اِن کمیتوں کے حاصل ضرب کے اور اِن کی رفتاروں کے حاصل ضرب کے متناسب ہیں اور نیز ان کے درمیانی فاصلے کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہیں ۔

تمت

اشاریہ

نظری علم الحیل

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

اصطلاحات

نظری علم الحیل

Acceleration	اسراع
Action	عمل
Amplitude	حیطہ
Automobile	آٹو موبیل
Bob	لنگر
Buoyancy	تیراؤ، اچھال
Capstan	لنگر چرخ
Canonical equations	آئینی مساواتیں
Catenary	زنجیرہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circuit	دور
Coefficient of friction	رگڑ کی قدر
Coefficients of Inertia	جمود کے سر
Compression	پچکاؤ
Conservation (of energy)	تحفظ (توانائی کا)
Conservative (system of forces)	تحفظی یا بقائی (قوتوں کا نظام)

Contact	تماس
Couple	جفت
Couplings	جوڑک
Crane	حمال
Crank	کرنیک، گردونہ
Cycloid	خط تدویر
Cycloidal pendulum	تدویری رقاص
Dip	میلان
Driving wheels	چلاؤ پہیئے
Equilibrium	توازن
Elasticity	لچک
Electromagnetism	برق مقناطیسیت
Ellipse	ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Envelope	لفاف
Experimental science	تجربی سائنس
Extensible	امتداد پذیر
Extensibility	توسیع پذیری
Extension	توسیع
External forces	بیرونی قوتیں
Flanges	کوریں
Flexibility	ملائمت
Forced oscillation	قسری اہتزاز
Fork	دو شاخہ
Frame of reference	حوالے کا فریم

Frequency	تعدد
Friction	رگڑ
Gearing	گیرائی
Galvanometer	برقی رو پیما
Generalized coordinates	تعمیمی محدد
Harmonic	موسیقی
Hold (of a ship)	پیٹا (جہاز کا)
Horse-power	اسپی طاقت
Hub	ناف
Hydrodynamics	ماحرکیات
Hyperbola	قطع زائد
Impact	تصادم
Impulse	دھکہ
Inclined plane	مائل مستوی
Indicator diagram	مظہار نقشہ
Inertia	جمود
Inextensible	ناامتداد پذیر
Internal forces	بیرونی قوتیں
Kinetic Energy	توانائی بالحرکت
Lamina	پترا
Law of inverse square	معکوس مربع کا قانون
Line of action	خط عمل
Line of quickest descent	سریع ترین اُتار کا خط
Lockgate	قفلی گیٹ
Locomotive	لوکوموٹف، حراکہ

Mechanics	علم الحیل
Modulus of Elasticity	لچک کی قدر
Moment	معیار
Momentum	معیار حرکت
Natural science	طبعی سائنس
Orbit	مدار
Oscillations	اہتزاز
Parabola	مکافی
Pedal	رکاب
Pendulum	رقاص
Period	دَور
Pitch	گہائی
Piston	فشارہ
Pivot	چول
Point of inflection	نقطہ انعطاف
Potential energy	توانائی بالقوہ
Poundal	پونڈل
Principal axes	صدر محاور
Projectile	مرمی
Range (of a projectile)	ٹپہ (مرمی کا)
Reaction	تعامل
Reflection	انعکاس
Resilience	بازگشتگی
Resolution (of forces)	تحلیل (قوتوں کی)
Rest	سکون

Restitution (impulse of)	عود (کا دھکہ)
Retardation	ابطاء
Rigidity	استواری
Roller	بیلن
Rolling friction	لڑھکنی رگڑ
Rotation	گردش
Sag	جھوک
Shell	خول
Simple harmonic motion	سادہ موسیقی حرکت
Skidding	گھسٹنا
Slack (couplings)	ڈھیلے (جوڑ کے)
Span	فصل
Spherical cap	کروی ٹوپی
Spokes	آرے
Strength	طاقت
Suspension bridge	جھولا پل
Tension	تناؤ
Theoretical Science	نظری سائنس
Thrust	دھکیل
Tractive force	جرّی قوت
Transformation	استحالہ
Translation (motion of)	(حرکت) انتقال
Transmissibility	انتقال پذیری
Uniformity of nature	فطرت کی ایکسانیت
Vectors	سمتی

Vibrations	ارتعاش
Windlass	ڈنڈا چرخ
Windmill	ہوائی چکی
Wheel and axle	چرخ اور محور
Work	کام